ций для геометрического моделирования объектов сложной формы / А. А. Лисняк, С. И. Гоменюк // Радіоелектроніка. Інформатика. Управління. – 2009. – № 2. – С. 76–81.
3. *Адамов А.* ADEM: подготовка к третьему тысячелетию / А. Адамов // САПР и графика. – 2000. – № 12. – С. 56–60.
4. *Ермилов В.* Концептуальные геометрические модели / В. Ермилов, В. Харин, М. Шалак // Department of Computer Aided Design. Izhevsk State Technical University. – Izhevsk, Russia, 2004. – С. 34–37.
5. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
6. *Максименко-Шейко К. В.* R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: ИПМаш НАН Украины, 2009. – 306 с.
7. *R-функции* и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Информационные технологии. – 2007. – №10. – С. 23–32.
8. *Maksimenko-Sheiko K. V.* R-functions in mathematical modeling of geometric objects with symmetry / K. V. Maksimenko-Sheiko, T. I. Sheiko // Cybernetics and Systems Analysis. – 2008. – Vol. 44 (6). – P. 855–862.
9. *Maksimenko-Sheiko K. V.* Automation of constructing equations of geometric objects in the method of R-functions / K. V. Maksimenko-Sheyko, A. M. Matsevityi, T. I. Sheiko // Cybernetics and Systems Analysis. – 2006. – Vol. 42 (2). – P. 284–290.

Поступила в редакцию
05.06.13

УДК 519.6

О. О. Литвин, канд. фіз.-мат. наук
Є. Л. Хурдей

Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: academ@kharkov.ua)

МЕТОД ПОБУДОВИ ОПЕРАТОРІВ ІЗ ЗАДАНИМИ ПРОЕКЦІЯМИ ВЗДОВЖ ПЕРЕТИННИХ ПРЯМИХ, ЯКІ ІНТЕРПОЛЮЮТЬ *F*(*X*, *Y*) В ТОЧКАХ ПЕРЕТИНУ ЦИХ ПРЯМИХ

Запропоновано метод побудови операторів наближення функції $f(x, y)$, який інтерполює $f(x, y)$ в точках перетину прямих Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$ і має проекції вздовж цих прямих, які збігаються з проекціями від $f(x, y)$ вздовж цих прямих. Метод побудови операторів інтерполяції функцій двох змінних із заданими проекціями досліджується для випадку перетинних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці. Розглянуто приклади побудови інтерполяційних операторів із заданими проекціями вздовж $M = 3, 4$ перетинних прямих.

Предложен метод построения операторов приближения функции $f(x, y)$, который интерполирует $f(x, y)$ в точках пересечения прямых Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$ и имеет проекции вдоль этих прямых, совпадающих с проекциями от $f(x, y)$ вдоль этих прямых. Метод построения операторов интерполяции функций двух переменных с заданными проекциями исследуется для случая пересекающихся прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Рассмотрены примеры построения интерполяционных операторов с заданными проекциями вдоль $M = 3, 4$ пересекающихся прямых.

Вступ

В роботах О. М. Литвина і О. О. Литвина наведено формулювання загального методу для побудови операторів наближення функцій двох змінних, які одночасно інтерполюють ці функції і мають задані проекції, а також наведено конкретні приклади для випадку, коли система прямих, вздовж якої знаходяться проекції, є системою взаємно перпендикулярних прямих, паралельних осям координат. Метод дозволяє будувати наближені розв'язки 2D задачі комп'ютерної томографії за умови, що невідомі значення функції в точках інтерполяції знаходяться з умови мінімуму деякого функціонала. В даній статті метод побудови операторів інтерполяції функцій двох змінних із заданими проекціями досліджується для випадку перетинних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці.

В працях [1–9] дається аналітичний огляд відомих методів розв’язання плоскої та просторової задач комп’ютерної томографії. В працях [10–15] сформульована і доведена теорема про метод побудови операторів поліноміальної інтерполяції із заданими проекціями вздовж заданої системи прямих. В [10] викладено загальний метод наближеного розв’язання плоскої задачі радонівської комп’ютерної томографії (РКТ) за допомогою операторів інтерлінації функцій двох змінних. Чисельна реалізація цього методу реалізована в дисертаційній роботі О. О. Литвина [10] для випадку інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих, паралельних осям координат, вздовж яких проекції вважаються відомими. В класичній задачі інтерполювання вважаються відомими множина точок (вузли інтерполяції) та значень наближуваної функції (яка може бути і невідома). Відомі формули для інтерполяційних поліномів Лагранжа степеня та їх аналоги в теорії сплайн-інтерполяції є добре вивченими з точки зору їх наближуючих властивостей. Водночас на практиці виникають ситуації, коли, крім значень, відомими є також інтеграли від функції вздовж заданого відрізка, якому належать вузли інтерполяції. Такі інтеграли (проекції) виникають, зокрема, в комп'ютерній томографії і є основою для методів розв'язання плоскої задачі комп'ютерної томографії (КТ), тобто дозволяють наближено відновити функцію двох змінних, яка є щільністю або коефіцієнтом поглинання проникаючого опромінення досліджуваного тіла у заданій площині. Зазначимо, що в ком'ютерній томографії відсутні такі алгоритми відновлення внутрішньої структури тіла, які можна назвати оптимальними, як, наприклад, оптимальні квадратурні формули Гаусса, оптимальні вузли інтерполяції тощо. Тому актуальною є побудова і дослідження операторів інтерполяції з відомими проекціями, які, на думку авторів цієї статті, можуть привести до побудови операторів 2D КТ з оптимальним вибором прямих, вздовж яких знаходяться проекції.

1. Постановка проблеми

В даній роботі розв'язується задача: для M ($M \geq 2$) перетинних прямих, серед яких немає паралельних, тобто кожна пряма перетинається з усіма іншими ($M - 1$) прямими, причому в одній точці не перетинаються більше ніж дві прямі, побудувати оператор $Lf(x, y)$ з властивостями

1. $Lf(x_{kl}, y_{kl}) = f(x_{kl}, y_{kl})$, $k, l = 1, 2, \ldots, M$, $k \neq l$,
2. $\int\limits_{\Gamma_k} Lf(x,y)ds = \int\limits_{\Gamma_k} f(x,y)ds = a_k$, $k = 1, 2, \ldots, M$,

де $\Gamma_k = \{(x,y) : \omega_k(x,y) = x\omega_{k1} + y\omega_{k2} - \gamma_k = 0\}$, $\omega_{k1}^2 + \omega_{k2}^2 = 1, (x_{kl}, y_{kl}) = \Gamma_k \cap \Gamma_l, k \neq l$; числа a_k будемо називати проекціями, як це прийнято в комп'ютерній томографії. Припустимо, що $\operatorname{supp} f(x, y) = D$ $[0, 1]^2$ і $(x_{kl}, y_{kl}) \in D$ $\forall k, l = 1, 2, \ldots, M, k \neq l$.

2. Аналіз літератури

Сформулюємо деякі відомі теореми (теореми 1–4), твердження яких будуть використані далі в теоремі 5. Нехай оператор $O_M(\{J_k\}; U, x, y)$ інтерлінує функцію f на вибраній системі прямих Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$, тобто задовольняє такі умови:

$$O_M(\{f\};U;x,y) = f(x,y) = f(x_k(t_k), y_k(t_k)) = f_k(t_k), (x,y) \in \Gamma_k ,$$

де t_k – деякий параметр на прямій Γ_k, $U = [u_{ij}]_{i=\overline{1,r}}^{j=\overline{1,p}}$ – деяка матриця, або $U = [u_j]_{i=\overline{1,r}}$ – деякий вектор невідомих сталих.

Теорема 1 [10]. Існують такі оператори $J_k = J_k(a_k; U; t_k) \approx f_k(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots M$ та $O_M(\{f_k\}; U, x, y)$, що для оператора $O_M(\{J_k\}; U, x, y)$ виконуються дві рівності

$$\int_{\Gamma_p} O_M(\{J_k\}; U, x, y)ds = a_p, \quad p = 1,2,\ldots M \tag{1}$$

$$O_M(\{J_k\}; U, x_{kl}, y_{kl}) = u_{kl}, \quad k,l = 1,2,\ldots M; \quad k \neq l \tag{2}$$

незалежно від вибору матриці.

Доведення цієї теореми істотно використовує два типи операторів: перший $O_1 f(x, y)$, який є оператором інтерлінації функції $f(x, y)$ на заданій системі перетинних прямих, і оператори другого типу $J_k f$, які є операторами інтерполяції у точках перетину прямої Γ_k з іншими прямими і мають задану проекцію вздовж прямої Γ_k. В наведеній нижче теоремі 2 дано явний вигляд оператора $O_M(\{J_k\}; U, x, y)$ для випадку, коли система прямих Γ_k є взаємно перпендикулярною.

Хай $x_i, \gamma_i^{(2)} = \int_0^1 f(x_i, y)dy$, $i = 1,2,\ldots M$; $y_j, \gamma_j^{(1)} = \int_0^1 f(x, y_j)dx$, $j = 1,2,\ldots N$ – задані числа, $0 < x_i, y_j < 1, i = 1,2,\ldots M$, $j = 1,2,\ldots N$, $x_0 = y_0 = 0$, $x_{m+1} = y_{n+1} = 1$.

Теорема 2. [10]. Оператор $O_{mn}(x, y) =: O_{mn}(\{\gamma_i^{(1)}; \gamma_j^{(2)}\}; U; x, y)$,

$$O_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x)\left[\gamma_i^{(2)} + \sum_{j=1}^{n}\left(U_{ij} - \gamma_i^{(2)}\right)\phi_j(y)\right] +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} H_j(y)\left[\gamma_j^{(1)} + \sum_{i=1}^{m}\left(U_{ij} - \gamma_j^{(1)}\right)\psi_i(x)\right] - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_i(x)H_j(y)U_{ij},$$

де функції $\psi_i(x)$ $\varphi_j(y)$ такі, що $\psi_i(x_p) = \delta_{i,p}$, $i, p = 0, 1, \ldots, m$; $\phi_j(y_q) = \delta_{j,q}, \int_0^1 \psi_i(x)dx = \int_0^1 \phi_j(y)dy = 0; j, q = \overline{0, n}$ (базисні інтерполяційні поліноми або сплайни h_i, H_j задовольняють умови $h_i(x_p) = \delta_{i,p}$, $i, p = 0, 1, \ldots, m$ $H_j(y_q) = \delta_{i,p}$, $j, q = 0, 1, \ldots, n$),
має такі властивості:

$$O_{mn}(x_k, y_\ell) = U_{k\ell} \qquad \forall U_{k\ell} \in R, \quad k = 1,2,\ldots m, \ \ell = 1,2,\ldots n,$$

$$\int_0^1 O_{mn}(x_k, y)dy = \gamma_k^{(2)} = \int_0^1 f(x_k, y)dy, \qquad \int_0^1 O_{mn}(x, y_\ell)dx = \gamma_\ell^{(1)} = \int_0^1 f(x, y_\ell)dx$$

Для побудови цього оператора використовується формула інтерлінації на системі взаємно перпендикулярних прямих

$$O_{mn}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x)f(x_i, y) + \sum_{j=1}^{n} H_j(y)f(x, y_j) - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} h_i(x)H_j(y)f(x_i, y_j),$$

з властивостями $O_{mn}(x_k, y) = f(x_k, y)$, $O_{mn}(x, y_l) = f(x, y_l)$, $k = 1, 2, \ldots, m$; $l = 1, 2, \ldots, n$.

Нижче викладемо деякі аспекти чисельної реалізації вказаної теореми 1 для випадку M перетинних прямих, жодні три з яких не перетинаються в одній точці і серед яких нема паралельних.

Для розв'язання поставленої задачі будемо використовувати оператор $\overline{O}_M f(x, y)$ інтерлінації [14,15] функції $f(x, y)$ на системі прямих Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, M$,

$$\overline{O}_M f(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Re} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq k,l}}^{M} \frac{\omega_i(x, y)}{\omega_i(A_{kl})}\left[\varphi_k\left((x_{kl}, y_{kl}) - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}\omega_l(x, y)\right) + \varphi_l\left((x_{kl}, y_{kl}) - \frac{\tau_l}{\Delta_{kl}}\omega_k(x, y)\right) - \varphi_k(A_{kl})\right] \tag{3}$$

з властивостями

$$\overline{O}_M f(x,y)\Big|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x,y)\Big|_{\Gamma_k}, \quad k = 1,2,\dots M\ , \tag{4}$$

де Γ_k : $\omega_k(x, y) = x\omega_{k1} + y\omega_{k2} - \gamma_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, M$ – сім'я перетинних прямих, жодні три з яких не перетинаються в одній точці,

$$A_{kl} = (x_{kl}, y_{kl}),\ (k, l) \in \Re = \{(k, l) \mid \Gamma_k \cap \Gamma_l = A_{kl};\ k \neq l\},\ k, l, = 1, 2, \dots, M$$

точки перетину прямих Γ_k та Γ_l.

$$\Delta_{kl} = \begin{vmatrix} \omega_{k1} & \omega_{k2} \\ \omega_{l1} & \omega_{l2} \end{vmatrix} = -\Delta_{lk} \neq 0, \quad k \neq l;\ k,l = 1,2,\dots,M$$

$$\varphi_k(x,y)\,|_{\Gamma_k} = f(x,y)\,|_{\Gamma_k}$$

$$\varphi_k(A_{kl}) = \varphi_l(A_{kl}), \quad k \neq l;\ k,l = 1,2,\dots,M$$

$$\nu_k = (\omega_{k1}, \omega_{k2}), \qquad \tau_k = (\omega_{k2}, -\omega_{k1}).$$

Для побудови операторів $J_k(a_k, U; t_k)$ будемо використовувати такі твердження.

Теорема 3 [10]. Поліном $L_r g(x)$ степеня r^2, що інтерполює функцію $g(x)$ у точках $0 < x_1 < \dots < x_r < 1$

$$L_r g(x_p) = g(x_p), \quad p = 1, 2, \dots, n$$

і має задане значення інтеграла

$$\int_0^1 L_r g(x)dx = a = \int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 g dx,$$

можна написати у вигляді

$$L_r g(x) = a + \sum_{k=1}^{r}\left(g(x_k) - a\right)\left[\ell_{r,k}(x) - \int_0^1 \ell_{r,k}(x)dx \frac{w_{r^2}(x)}{\int_0^1 w_{r^2}(x)dx}\right],$$

$$\ell_{r,k}(x) = \prod_{j=1,\, j\neq k}^{r} \frac{x - x_j}{x_k - x_j},\ w_{r^2}(x) = \prod_{j=1}^{r}\left(x - x_j\right)^2.$$

Теорема 4 [10]. Хай система вузлів $0 \le x_1 \le \dots \le x_r \le 1$ задовольняє умову $\int_0^1 \omega_r(x)dx \neq 0$, де $\omega_r(x) = \prod_{j=1}^{r}\left(x - x_j\right)$. Тоді оператор

$$L_r(g;x) = \int_0^1 g(x)dx + \sum_{k=1}^{r}\left(g(x_k) - \int_0^1 g(x)dx\right)\left[l_{r,k}(x) - \int_0^1 l_{r,k}(x)dx \frac{\omega_r(x)}{\int_0^1 \omega_r(x)dx}\right]$$

кожній неперервній функції $g(x) \in C(I)$, $I = [0, 1]$ ставить у відповідність поліном найменшого степеня r з властивостями

$$\int_0^1 L_r(g;x)dx = \int_0^1 g(x)dx,$$

$$L_r(g;x_p) = g(x_p), \quad p = 1,2,\dots r$$

$$L_r(x^s;x) = x^s, \quad s = 0,1,\dots r.$$

Основні твердження статті

Теорема 5. Якщо у введеному вище операторі $\overline{O}_M f(x,y) = O_M(\{\phi_k\};U;x,y)$ замість функцій-слідів $\varphi_k(t_k)$, $k = 1, 2, \ldots, M$ підставити оператори одновимірної інтерполяції $L_{M-1}(\varphi_k, t_k)$ з властивостями $L_{M-1}(\varphi_k, t_{ki}) = u_{ki}$, $i = 1, 2, \ldots, M-1$, де t_{ki} – значення параметра t_k ($t_k = x$ або $t_k = y$), якому на прямій Γ_k відповідає точка (x_{ki}, y_{ki}) та $\int_{\Gamma_k} L_{M-1}(\varphi_k, t_k)dt_k = a_k$, то отримаємо оператор $O_M(\{L_{M-1}(\varphi_k, t_k)\}; \{U\}; x, y)$ з властивостями

$$O_M(\{L_{M-1}(\varphi_k,t_k)\};\{U\};x_{ij},y_{ij}) = u_{ij}$$

$$\int_{\Gamma_j} O_M(\{L_{M-1}(\varphi_k,t_k)\};\{U\};x,y)ds = a_j, \quad j = 1,2,\ldots,M.$$

Доведення:

З властивостей (4) випливає, що $\int_{\Gamma_l} \overline{O}_M(\{\varphi_k\};U;x,y)ds = \int_{\Gamma_l} \varphi_l(t_l)dt_l$, $l = 1,2,\ldots,M$. Тому якщо замість $\varphi_l(t_l)$ підставимо оператор $J_l(U; a_l; t_l)$ з властивостями $\int_{\Gamma_l} J_l(U;a_l,t_l)dt_l = a_l$, то отримаємо, що $\int_{\Gamma_l} \overline{O}_m(\{J_k(U;a_k,t_k)\};U;x,y)ds = \int_{\Gamma_l} a_l$, $l = 1,2,\ldots,M$.

Оскільки оператори $J_l(U; a_l; t_l)$ інтерполюють значення u_{kl} при $t_l = t_{kl}$, то виконуються також інтерполяційні властивості $\overline{O}_m(\{J_k(U;a_k,t_k)\};U;x_{ij},y_{ij}) = u_{ij}, i,j = 1,2,\ldots,M, i \neq j$.

Теорема 5 доведена.

Отже, побудова потрібного оператора може бути виконана за такими кроками:

Крок 1. Використовуємо оператор $\overline{O}_M f(x,y)$ інтерлінації функцій $f(x, y)$ на системі M ($M \geq 3$) перетинних прямих, ніякі три з яких не перетинаються в одній точці та між ними немає паралельних, тобто оператор $\overline{O_M} f(x,y)$ з властивостями

$$\overline{O}_M f(x,y)\Big|_{\Gamma_k} = f(x,y)\Big|_{\Gamma_k} = \varphi_k(x,y)\Big|_{\Gamma_k}, \quad k = 1,2,\ldots M .$$

Крок 2. Замінюємо сліди $\varphi_k(x, y)$ функції $f(x, y)$ як функції однієї змінної (x або y, або t_k) операторами інтерполяції із заданими проекціями. В результаті отримаємо шуканий оператор.

Розглянемо приклади

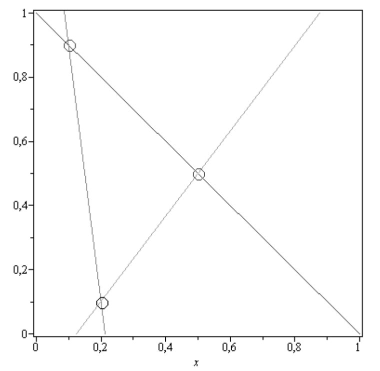

Рис 1. Графіки трьох прямих, вздовж яких знаходяться проекції, і три точки інтерполяції

Приклад 1. Нехай $M = 3$ і задано три прямі $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$, $k = 1, 2, 3$

$$\omega_1 = \frac{x+y-1}{\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{8x+y-1{,}7}{\sqrt{65}}, \quad \omega_3 = \frac{4x+3y-0{,}5}{5},$$

які перетинаються в точках $A_{12}(0{,}1; 0{,}9)$, $A_{13}(0{,}5; 0{,}5)$, $A_{23}(0{,}2; 0{,}1)$ (рис. 1).

$$\omega_k(A_{kl}) = \omega_l(A_{kl}) = 0, \quad k \neq l, \quad k, l = 1, 2, 3,$$

$$\varphi_1(y) = f(1-y, y), \ \varphi_2(y) = f\left(\frac{1{,}7-y}{8}, y\right),$$

$$\varphi_3(y) = f\left(\frac{0{,}5+3y}{4}, y\right),$$

$$l_{kps}(y) = \frac{y - y_{kp}}{y_{ks} - y_{kp}}, \ wr_{kps}(y) = (y-y_{kp})^2(y-y_{ks})^2 .$$

Використаємо формулу для побудови оператора, який в точках перетину цих прямих набуває значення, що збігаються із значеннями наближуваної функції, і має інтеграли вздовж цих прямих, які збігаються з проекціями вздовж цих прямих від наближуваної функції $f(x, y)$

$$L_r\varphi_r(y) = a_r + \sum_{k=1}^{r}\left(\varphi_r(x_{rk}, y_{rk}) - a_r\right)\left[l_{kps}(y) - \int_0^1 l_{kps}(y)dy \frac{wr_{kps}(y)}{\int_0^1 wr_{kps}(y)dy}\right].$$

Підставляємо ці формули у (3)

$$Lf(x, y) = \sum_{(k,l)\in\Re}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{M}\frac{\omega_i(x)}{\omega_i(A_{kl})}\left[L_k\varphi_k\left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}\omega_l(x)\right) + L_l\varphi_l\left(A_{kl} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}\omega_k(x)\right) - L_k\varphi_k(A_{kl})\right]$$

Ця формула має шукані властивості

$$Lf(A_{kl})|_{\Gamma_k} = f(A_{kl})|_{\Gamma_k};$$

$$\int_0^1 Lf(x, y)|_{\Gamma_k}\, dx = \int_0^1 f(x, y)|_{\Gamma_k}\, dx.$$

Приклад 2. Нехай $M = 4$ і задано чотири прямі $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$, $k = 1, 2, 3, 4$

$$\omega_1 = \frac{x+y}{\sqrt{2}} - \frac{4}{5\sqrt{2}}, \quad \omega_2 = \frac{5x - 7y + 2}{\sqrt{74}}, \quad \omega_3 = \frac{-x - 8y + 5}{\sqrt{65}}, \quad \omega_4 = \frac{-6x - y + 4}{\sqrt{37}},$$

які перетинаються в точках $A_{12}\left(\frac{3}{10}, \frac{1}{2}\right)$, $A_{13}\left(\frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right)$, $A_{14}\left(\frac{16}{25}, \frac{4}{25}\right)$, $A_{23}\left(\frac{19}{47}, \frac{27}{47}\right)$, $A_{24}\left(\frac{26}{47}, \frac{32}{47}\right)$, $A_{34}\left(\frac{27}{47}, \frac{26}{47}\right)$ (рис 2.).

$$\omega_k(A_{kl}) = \omega_l(A_{kl}),\ k \neq l,\ k, l = \overline{1,4},$$

$$\varphi_i(y) = f\left(\frac{\gamma_i - \omega_{i2}y}{\omega_{i1}}, y\right),$$

$$l_{kp}(y) = \prod_{\substack{s=1\\ s\neq p,k}}^{M}\frac{y - y_{kp}}{y_{ks} - y_{kp}}, \quad k = 1,2,3,4, \quad p = 1,2,3,4,$$

$$wr_k(y) = \prod_{\substack{s=1\\ s\neq k}}^{4}(y - y_{ks})^2.$$

Використаємо формулу для побудови оператора, який в точках перетину цих прямих набуває значення, що збігається із значеннями наближуваної функції і має інтеграли вздовж цих прямих, які збігаються з проекціями вздовж цих прямих від наближуваної функції $f(x, y)$

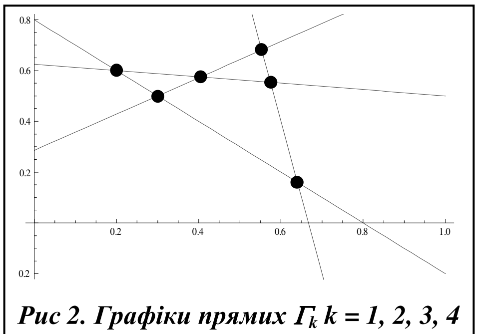

Рис 2. Графіки прямих Γ_k k = 1, 2, 3, 4 та точки їх перетину

$$L_r\varphi_r(y) = a_r + \sum_{k=1}^{r}\left(\varphi_r(x_{rk}, y_{rk}) - a_r\right)\left[l_{kp}(y) - \int_0^1 l_{kp}(y)dy \frac{wr_k(y)}{\int_0^1 wr_k(y)dy}\right];$$

Підставляємо ці формули у (3)

$$Lf(x,y) = \sum_{(k,l)\in\Re}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq k,l}}^{M}\frac{\omega_i(x,y)}{\omega_i(A_{kl})}\left[L_k\varphi_k\left(A_{kl} - \frac{\tau_k}{\Delta_{kl}}\omega_l(x,y)\right) + L_l\varphi_l\left(A_{kl} - \frac{\tau_l}{\Delta_{lk}}\omega_k(x,y)\right) - L_k\varphi_k(A_{kl})\right]. \quad (5)$$

Формула (10) і є шуканою формулою з властивостями

$$Lf(A_{kl}) = f(A_{kl}), \qquad k = 1,2,3,4, \quad k \neq l;$$

$$\int_0^1 Lf(x,y)|_{\Gamma_k}\, dx = \int_0^1 f(x,y)|_{\Gamma_k}\, dx, \qquad k = k = 1,2,3,4.$$

Висновки

В даній статті запропоновано метод побудови операторів наближення функції $f(x, y)$, який інтерполює $f(x, y)$ в точках перетину прямих Γ_k $k = 1, 2, \ldots, M$ і має проекції вздовж цих прямих, які збігаються з проекціями від $f(x, y)$ вздовж цих прямих. Розглянуто приклади побудови інтерполяційних операторів із заданими проекціями вздовж $M = 3, 4$ перетинних прямих.

Автори планують використати ці результати для розробки методу розв'язання плоскої задачі РКТ, в якій значення $f(x_{kl}, y_{kl})$ є невідомими, а відомі лише проекції $\int_{\Gamma_k} f(x,y)ds$, $k = 1, 2, \ldots, M$.

Література

1. *Наттерер Ф.* Математические аспекты компьютерной томографии: Пер. с англ./ Ф. Наттерер. – М.: Мир, 1990. – 279 с.
2. *Троицкий И. Н.* Статистическая теория томографии / И. Н. Троицкий. – М.: Радио и связь, 1989. – 240 с.
3. *Радон И.* Об определении функций по их интегралам вдоль некоторых многообразий / И. Радон // Хелгасон Р. Преобразование Радона. – М.: Мир, 1983. – 135 с.
4. *Хелгасон С.* Преобразование Радона: Пер с англ. / С. Хелгасон. – М.: Мир, 1983. – 152 с.
5. *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям. Основы реконструктивной томографии / Г. Хермен. – М.: Мир, 1983. – 352 с.
6. *Терещенко С. А.* Методы вычислительной томографии / С. А. Терещенко. – М.: Физматгиз, 2004. – 320 с.
7. *Федоров Г. А.* Вычислительная эмиссионная томография / Г. А. Федоров, С. А. Терещенко. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 184 с.
8. *Тихонов А. Н.* Математические задачи компьютерной томографи / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, А. А. Тимонов. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
9. *Попов Д. А.* Восстановление характеристических функций в двумерной радоновской томографии / Д. А. Попов // Усп. мат. наук. – 1998. – Т. 53, вып. 1 (319). – С. 115–198.
10. *Литвин О. О.* Математичне моделювання в малоракурсній комп’ютерній томографії на основі інтерлінації та мішаної апроксимації функцій: Автореф. дис. … канд. фіз. – мат. наук. – К: 2009. – 20 с.
11. *Литвин О. М.* Оператори інтерполювання із заданими значеннями інтеграла / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Розробка та застосування математичних методів в науково-технічних дослідженнях: Тези доп. Всеукраїн. наук. конф., Львів, 5–7 жовтня 1995 р. – Львів, 1995. – С. 113.
12. *Литвин О. М.* Про один підхід до розв’язання плоскої задачі рентгенівської комп’ютерної томографії / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Нелинейные краевые задачи математической физики и их приложения: Сб. науч. тр. Ин-та математики НАН Украины, Киев, 1996. – С. 170–173.

13. *Литвин О. М.* Метод розв'язання плоскої задачі рентгенівської комп'ютерної томографії / О. М. Литвин, О. О. Литвин // Доп. НАН України. – 1998. – № 12. – С. 29–33.
14. *Литвин О. М.* Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Х.: Основа, 2002. – 544 с.
15. *Литвин О. М.* Методи обчислень. Додаткові розділи / О. М. Литвин. – К.: Наук. думка, 2005. – 332 с.

Надійшла до редакції
21.06.13