

Из (11) видно влияние на коэффициенты упругости  $c_y$  и  $c_p$  не только параметров ЭМВ, но и задающего напряжения  $U_d$ .

#### Выводы

Таким образом, получены аналитические выражения коэффициентов демпфирования и упругости в ЭМВС с РМ. Использование полученных формул способствует более точному проектированию ЭМВ.

#### Литература

1. *Вибрации* в технике: В 4-х т. / Под ред Э. Э. Лавендела. – М.: Машиностроение, 1981. – Т. 4. – 510 с.
2. Божко А. Е. Оценка и анализ параметров жесткости в электромагнитных вибрационных стендах / А. Е. Божко, К. Б. Мякохлеб // Пробл. машиностроения. – 2003. – Т. 6, № 3. – С. 53–57.
3. Божко А. Е. Динамико-энергетические связи колебательных систем / А. Е. Божко, Н. М. Голуб. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.
4. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. – М.: Высш. шк., 1978. – 528 с.

Поступила в редакцию  
23.05.2013

УДК 539.3

**В. И. Гнитько**, канд. техн. наук

**У. Е. Огородник**

**Е. А. Стрельникова**, д-р. техн. наук

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: gnit@ipmach.kharkov.ua)

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ МАШИН ПРИ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ЖИДКОСТЬЮ

*Предложен метод расчета динамических характеристик оболочек вращения с жидкостью, подверженных действию кратковременных импульсных нагрузок. Метод основан на сведении задачи об определении давления жидкости на оболочку к системе сингулярных интегральных уравнений. Связанная задача теории упругости решается с помощью сочетания методов конечных и граничных элементов. Дифференциальные уравнения нестационарной задачи решаются численно методом Рунге–Кутты 4-го и 5-го порядка.*

*Запропоновано метод розрахунку динамічних характеристик оболонок обертання з рідиною, що зазнають дії короткочасних імпульсних навантажень. Метод ґрунтується на зведенні задачі з визначення тиску рідини на оболонку до системи сингулярних інтегральних рівнянь. Зв'язана задача теорії пружності розв'язується за допомогою поєднання методів скінченних та граничних елементів. Диференціальні рівняння нестационарної задачі розв'язуються чисельно методом Рунге–Кутта 4-го та 5-го порядку.*

### 1. Введение

Динамический анализ напряженно-деформированного состояния оболочечных конструкций часто выполняется при помощи конечноэлементных программ [1–6]. Но трехмерный анализ с учетом взаимодействия жидкости и конструкции является сложной и чрезвычайно трудоёмкой задачей. Поэтому для проведения исследования прочности и устойчивости оболочек при импульсных и сейсмических нагрузках принимаются упрощенные гипотезы. Предполагается, например, что жидкость состоит из двух частей: движущейся вместе с емкостью как жесткое целое и части, движущейся со своей собственной частотой. Опреде-

ление границ этих частей жидкости производится эмпирически. Не учитывается также упругость стенок резервуара. Отсутствуют работы, в которых бы учитывалась геометрическая нелинейность материала и нелинейный характер поведения жидкости. Следует отметить, что в большинстве работ рассматриваются цилиндрические оболочки; для численного моделирования применяется метод конечных элементов.

В данной работе описываются исследования авторов, посвященных динамике оболочечных конструкций, заполненных жидкостью. Здесь рассмотрен вопрос о свободных и вынужденных колебаниях оболочки вращения с произвольным меридианом. Для решения задачи используются одномерные методы конечных и граничных элементов. Это позволяет существенно сократить время расчета, что приводит к качественно новым возможностям при моделировании динамического поведения конструкций.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается связанная динамическая задача для оболочки вращения, частично заполненной жидкостью, подверженной кратковременному импульсному нагружению.

Предположим, что жидкость идеальная, несжимаемая, а ее течение (индуцированное движением тела) является безвихревым. Обозначив компоненты скорости через  $V_x$ ,  $V_y$ ,  $V_z$ , условие несжимаемости сплошной среды получим из следующего равенства:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (1)$$

Поскольку поток безвихревой, то существует потенциал скоростей  $\phi$

$$V_x = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad V_z = \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

удовлетворяющий вследствие (1) гармоническому уравнению

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0.$$

Матричное уравнение движения оболочки, частично заполненной жидкостью, запишем в виде

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{P}(t) + \mathbf{Q}(t), \quad (2)$$

где  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{M}$  – матрицы жесткости и масс;  $\mathbf{U} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор-функция перемещений;  $\mathbf{Q}(t)$  – вектор внешней нагрузки,  $\mathbf{P}(t)$  – гидродинамическое давление жидкости. Давление жидкости находим из интеграла Коши–Лагранжа, который в линейном приближении имеет вид

$$\frac{P}{\rho_l} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} - gz + \frac{P_0}{\rho_l}, \quad (3)$$

где  $\phi$  – потенциал скоростей;  $\rho_l$  – плотность жидкости;  $g$  – ускорение свободного падения,  $z$  – координата точки жидкости, отсчитываемая в вертикальном направлении.

Обозначим смоченную поверхность оболочки через  $S_1$ , а свободную поверхность –  $S_0$ . Пусть декартова система координат  $0xuz$  связана с оболочкой, свободная поверхность жидкости  $S_0$  совпадает с плоскостью  $xOy$  в состоянии покоя. Считаем, что резервуар с жидкостью подвергается динамическому воздействию. На смоченной поверхности упругой оболочки требуется выполнение условия непротекания, на свободной поверхности задаются динамическое и кинематическое граничные условия. Динамическим граничным условием является равенство давления на свободной поверхности атмосферному, а кинематическое условие заключается в том, что частицы жидкости, первоначально находившиеся на свободной поверхности, остаются на ней во все время последующего движения.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче:

$$\mathbf{L}\mathbf{U} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \rho_l \dot{\phi} + gz = \mathbf{Q},$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, \quad P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta = 0, \quad P \in S_0$$

для определения неизвестных функций  $U$  и  $\phi$ .

### 3. Метод разложения по собственным формам в связанных динамических задачах

Будем искать собственные формы колебаний оболочки в жидкости в следующем виде:

$$U(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m c_k(t) u_k(x, y, z), \quad (4)$$

где функции  $u_k(x, y, z)$  – собственные формы колебаний оболочки в вакууме;  $c_k(t)$  – неизвестные коэффициенты.

Потенциал скоростей  $\phi$  представим в виде суммы двух потенциалов  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ .

Для определения  $\phi_1$  сформулируем следующую краевую задачу:

$$\nabla^2 \phi_1 = 0; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial t} = 0, \quad P \in S_0. \quad (5)$$

Здесь  $w(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m w_k(x, y, z) c_k(t)$ , функции  $w_k(x, y, z)$  являются нормальными компонентами собственных форм колебаний пустой оболочки.

Отметим, что из соотношения (3) и второго из уравнений (5) следует, что

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \phi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t). \quad (6)$$

Для определения функций  $\phi_{1k}$  имеем следующие краевые задачи:

$$\nabla^2 \phi_{1k} = 0; \quad \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n} = w_k, \quad P \in S_1; \quad \phi_{1k} = 0, \quad P \in S_0. \quad (7)$$

Потенциал  $\phi_2$  ищем в виде

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n d_k(t) \phi_{2k}(x, y, z),$$

где функции  $\phi_{2k}$  – собственные формы колебаний жидкости в жестком сосуде. Определим эти собственные формы. Предварительно рассмотрим задачу

$$\nabla^2 \phi = 0; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \zeta, \quad P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta = 0, \quad P \in S_0. \quad (8)$$

Последнее из уравнений (8) представляет собой динамическое условие на свободной поверхности. Дифференцируя это уравнение по  $t$ , приходим к уравнению для потенциала скоростей жидкости в жестком сосуде

$$\ddot{\phi} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_0. \quad (9)$$

Решение этой задачи ищем в форме

$$\phi(x, y, z, t) = e^{i\kappa t} \psi(x, y, z).$$

Потенциал  $\psi$ , описывающий свободные гармонические колебания жидкости (9), является решением следующей краевой задачи:

$$\nabla^2 \psi = 0; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_1; \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = \frac{\kappa^2}{g} \psi, \quad P \in S_0. \quad (10)$$

Ее решение определяет ряд собственных чисел  $\kappa_k$  и соответствующих им собственных функций  $\phi_{2k}$ . Решив задачу (10), будем искать  $\phi_2$  в виде

$$\phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n d_k(t) \Psi_k(x, y, z). \quad (11)$$

Таким образом, получены представления для потенциалов  $\phi_1$  и  $\phi_2$

$$\phi_1(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^m \varphi_{1k}(x, y, z) \dot{c}_k(t), \quad \phi_2(x, y, z, t) = \sum_{k=1}^n d_k(t) \varphi_{2k}(x, y, z).$$

Тогда, поскольку  $\phi = \phi_1 + \phi_2$ , получим

$$\nabla^2 \phi = \nabla^2 \phi_1 + \nabla^2 \phi_2 = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = \frac{\partial \phi_1}{\partial n} + \frac{\partial \phi_2}{\partial n} = \frac{\partial w}{\partial t}, \quad P \in S_1.$$

Следовательно, удовлетворяется уравнение Лапласа и граничное условие непротекания.

На свободной поверхности должно выполняться условие

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \dot{\zeta}, \quad P \in S_0; \quad \dot{\phi} + g\zeta = 0, \quad P \in S_0.$$

Дифференцируя последнее равенство по  $t$ , приходим к уравнению

$$\ddot{\phi} + g \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0, \quad P \in S_0. \quad (12)$$

Подставляя  $\dot{\phi}_1 = \ddot{\phi}_1 = 0$  в уравнение (12), получим с учетом (16)

$$\sum_{k=1}^n \ddot{d}_k(t) \varphi_{2k}(x, y, z) + g \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \frac{\partial \varphi_{1k}(x, y, z)}{\partial n} + g \sum_{k=1}^n d_k(t) \frac{\partial \varphi_{2k}(x, y, z)}{\partial n} = 0.$$

Используя соотношения, которым удовлетворяют функции  $\varphi_{2k}$

$$\frac{\partial \varphi_{2k}}{\partial n} = \frac{\kappa_k^2}{g} \varphi_{2k}, \quad P \in S_0,$$

приходим к дифференциальным уравнениям

$$\sum_{k=1}^n [\ddot{d}_k(t) + \kappa_k^2 d_k(t)] \varphi_{2k}(x, y, z) + g \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \frac{\partial \varphi_{1k}(x, y, z)}{\partial n} = 0. \quad (13)$$

Умножим уравнение (13) скалярно на функцию  $\varphi_{2l}$ . В силу ортогональности системы собственных форм колебаний жидкости в жестком сосуде получим следующие соотношения:

$$\ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\varphi_{2l}, \varphi_{2l})} \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \left( \frac{\partial \varphi_{1k}}{\partial n}, \varphi_{2l} \right) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

После определения функций  $\varphi_{1k}$  и  $\varphi_{2k}$  подставляем их в уравнение (2) и получаем дифференциальное уравнение

$$L \left( \sum_{k=1}^m c_k u_k \right) + M \left( \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k u_k \right) = -\rho_l \left( \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k \varphi_{1k} + \sum_{i=1}^n d_i \varphi_{2i} + gz \right) + Q. \quad (15)$$

Пусть  $\omega_k, u_k$  – собственные частоты и формы свободных колебаний оболочки в вакууме. Имеют место следующие соотношения:

$$L u_k = \omega_k^2 M u_k, \quad (M u_k, u_j) = \delta_{kj}. \quad (16)$$

Умножив скалярно уравнение (14) на  $u_j$  и принимая во внимание условия нормировки (16), получим следующую систему  $n + m$  дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{c}_j(t) + \omega_j^2 c_j(t) + \rho_L \sum_{k=1}^m \ddot{c}_k (\varphi_{1k}, u_j) + \sum_{i=1}^n \dot{d}_i (\varphi_{2i}, u_j) + g(z, u_j) = (Q, u_j), \quad j = 1, m$$

$$\ddot{d}_l(t) + \kappa_l^2 d_l(t) + \frac{g}{(\phi_{2l}, \phi_{2l})} \sum_{k=1}^m \dot{c}_k(t) \left( \frac{\partial \phi_{1k}}{\partial n}, \phi_{2l} \right) = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (17)$$

Таким образом, схема решения связанной динамической задачи для оболочки вращения состоит из следующих этапов.

1. Определение частот и форм свободных колебаний оболочки в вакууме методом конечных элементов.

2. Определение частот и форм колебаний жидкости в жесткой оболочке под действием силы тяжести с использованием метода граничных элементов.

3. Определение частот и форм колебаний упругой оболочки без учета действия силы тяжести с использованием метода граничных элементов.

4. Решение системы дифференциальных уравнений второго порядка (17) с использованием метода Рунге–Кутты 4-го и 5-го порядка.

#### 4. Системы граничных интегральных уравнений

Далее будем использовать цилиндрическую систему координат. Представим неизвестные функции в виде рядов Фурье по окружной координате

$$w = w(r, z) \cos \alpha \theta, \quad \phi = \phi(r, z) \cos \alpha \theta. \quad (18)$$

Чтобы решить связанную задачу гидроупругости, необходимо определить потенциалы  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Эти задачи сведены к решению систем сингулярных интегральных уравнений. Определение потенциала  $\phi_1$  осуществляется так же, как и в [8, 9] и приводит к следующей системе интегральных уравнений:

$$\begin{aligned} 2\pi\phi(z_0) + \int_{\Gamma} \phi(z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Phi(P, P_0)\rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z)\Phi(P, P_0)r(z)d\Gamma_1, \quad P_0 \in S_1; \\ \int_{\Gamma} \phi(z)\Theta(z, z_0)r(z)d\Gamma - \int_0^R q(\rho)\Phi(P, P_0)\rho d\rho &= \int_{\Gamma} w(z)\Phi(P, P_0)r(z)d\Gamma_1, \quad P_0 \in S_0; \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Theta(z, z_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} \left\{ \frac{1}{2r} \left[ \frac{r^2 - r_0^2 + (z_0 - z)^2}{a-b} E_{\alpha}(k) - F_{\alpha}(k) \right] n_r + \frac{z_0 - z}{a-b} E_{\alpha}(k) n_z \right\}, \\ \Phi(P, P_0) &= \frac{4}{\sqrt{a+b}} F_{\alpha}(k). \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь введены такие обозначения:

$$\begin{aligned} E_{\alpha}(k) &= (-1)^{\alpha} (1 - 4\alpha^2) \int_0^{\pi/2} \cos 2\alpha\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta, \\ F_{\alpha}(k) &= (-1)^{\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\alpha\theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, \quad k^2 = \frac{2b}{a+b}. \end{aligned}$$

При  $\alpha = 0$  эти выражения представляют собой стандартные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Чтобы определить потенциал  $\phi_2$ , необходимо построить функции  $\phi_{2k}$ . Обозначим  $\phi_{2k}^1$  значения  $\phi_{2k}$  на смоченной поверхности  $S_1$  и  $\phi_{2k}^0$  значения  $\phi_{2k}$  на свободной поверхности  $S_0$ . Используя прямую формулировку метода граничных элементов для решения краевой задачи (7), запишем следующую систему сингулярных интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
 2\pi\phi_{2k}^1 + \iint_{S_1} \phi_{2k}^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \phi_{2k}^0 \frac{1}{r} dS_0 + \iint_{S_0} \phi_{2k}^0 \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) dS_0 &= 0 \\
 - \iint_{S_1} \phi_{2k}^1 \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r} \right) dS_1 - 2\pi\phi_{2k}^0 + \frac{\kappa^2}{g} \iint_{S_0} \phi_{2k}^0 \frac{1}{r} dS_0 &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{21}$$

Предполагая, что  $\phi = \phi(r, z) \cos \alpha\theta$ , получаем для каждой гармоники (18) соотношения вида

$$\begin{aligned}
 \iint_{S_1} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_1 &= \int_r \phi(z) \Theta(z, z_0) r(z) d\Gamma, \\
 \iint_{S_0} \phi \left( \frac{1}{r(P, P_0)} \right) dS_0 &= \int_0^R \phi(\rho) \Phi(P, P_0) \rho d\rho.
 \end{aligned}$$

Здесь ядра  $\Theta(z, z_0)$  и  $\Phi(P, P_0)$  определены в (20).

Для численного решения систем, описанных уравнениями (19)–(21), использовался метод граничных элементов с постоянной аппроксимацией неизвестной плотности на элементах [7, 8].

**5. Численные результаты**

Полное решение динамической задачи требует рассмотрения частот и форм колебаний жидкости в жесткой оболочке. В качестве примеров здесь рассмотрены коническая и цилиндрическая оболочки (рис. 1, 3). Аналитические значения частот для конической оболочки определены по следующей формуле [11]:

$$\kappa^2 = \frac{g}{R} \lambda_0 \operatorname{th}(\lambda_0 \bar{H}), \tag{22}$$

где  $\bar{x} = x/R$ ,  $\bar{y} = y/R$ ,  $\bar{z} = z/R$ ,  $\bar{H} = H/R$ ;  $R$  – радиус свободной поверхности;  $H$  – уровень заполнения оболочки;  $\lambda_0$  – корни уравнения  $I'_\alpha(\lambda) = 0$ ; в котором  $I_\alpha(r)$  функции Бесселя первого рода.

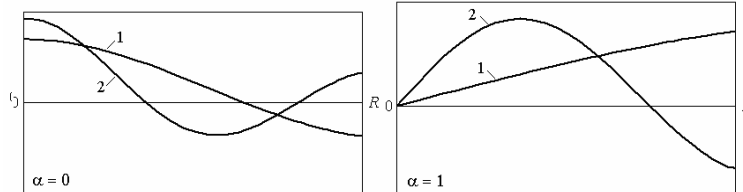
При численном решении было использовано  $n$  граничных элементов на меридиане оболочки и  $m$

**Таблица 1. Сходимость значений собственных частот при сгущении сетки**

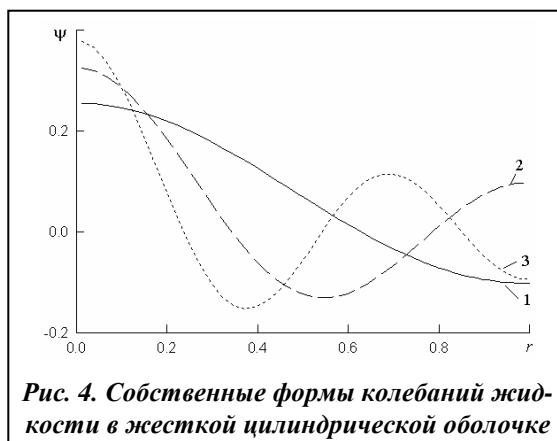
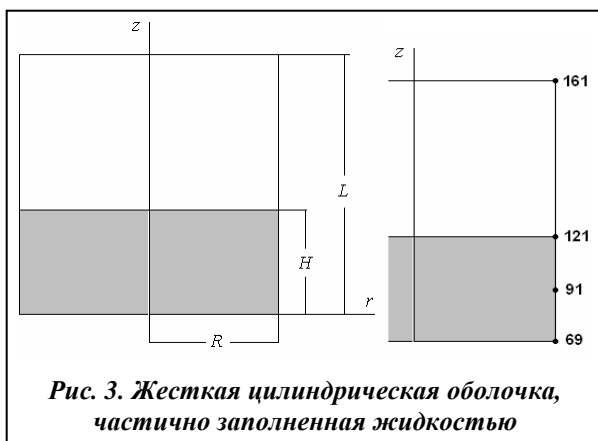
$n + m$	$\alpha = 0$		$\alpha = 1$	
	1	2	1	2
10 + 10	3,54	6,93	1,39	5,15
20 + 20	3,50	6,78	1,38	5,05
30 + 30	3,48	6,74	1,37	5,02
40 + 40	3,47	6,71	1,37	5,01
[11]	3,46	6,70	1,36	4,97



**Рис. 1. Жесткая коническая оболочка, частично заполненная жидкостью**



**Рис. 2. Первая и вторая формы колебаний свободной поверхности конической оболочки при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$**



граничных элементов на свободной поверхности жидкости. В табл. 1 показаны численные значения двух первых частот  $\kappa^2 R/g$  для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$  при разных  $n$  и  $m$ . Здесь также представлены аналитические значения, вычисленные по формуле (22).

На рис. 2 даны формы собственных колебаний жидкости на свободной поверхности. Анализ численных результатов показал, что удовлетворительная точность достигнута при 20+20 граничных элементах.

Рассмотрим жесткий круговой цилиндр радиуса  $R = 1$  м и глубиной заполняющей его жидкости  $H$  (рис. 3) и определим собственные частоты и формы колебаний жидкости в жесткой цилиндрической оболочке.

В табл. 2 приведены результаты расчетов первых трех собственных чисел  $\kappa^2$  при  $H_0 = 0,7$  м для  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 1$ , определенных по предложенной методике и вычисленных по формуле [9].

**Таблица 2. Собственные частоты жесткой цилиндрической оболочки**

$\alpha$	метод	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$\alpha = 0$	МГЭ	3,800	7,029	10,206
	[11]	3,796	7,015	10,173
$\alpha = 1$	МГЭ	1,583	5,334	8,558
	[11]	1,581	5,325	8,536
$\alpha = 2$	МГЭ	2,975	6,717	9,997
	[11]	2,970	6,704	9,969

На рис. 4 представлены собственные формы колебаний на свободной поверхности цилиндрической оболочки при  $\alpha = 0$ .

Далее приведены примеры расчета вынужденных колебаний полусферической и конической оболочек с жидкостью. Рассмотрена полусфера (рис.6) под действием импульсной нагрузки  $Q(r, \vartheta, z, t) = P(r, \vartheta, z)\Theta(t)$ ,  $P = \text{const}$ . Импульс принимался в форме

$$\Theta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq T_1 \\ 0, & t > T_1 \end{cases}$$

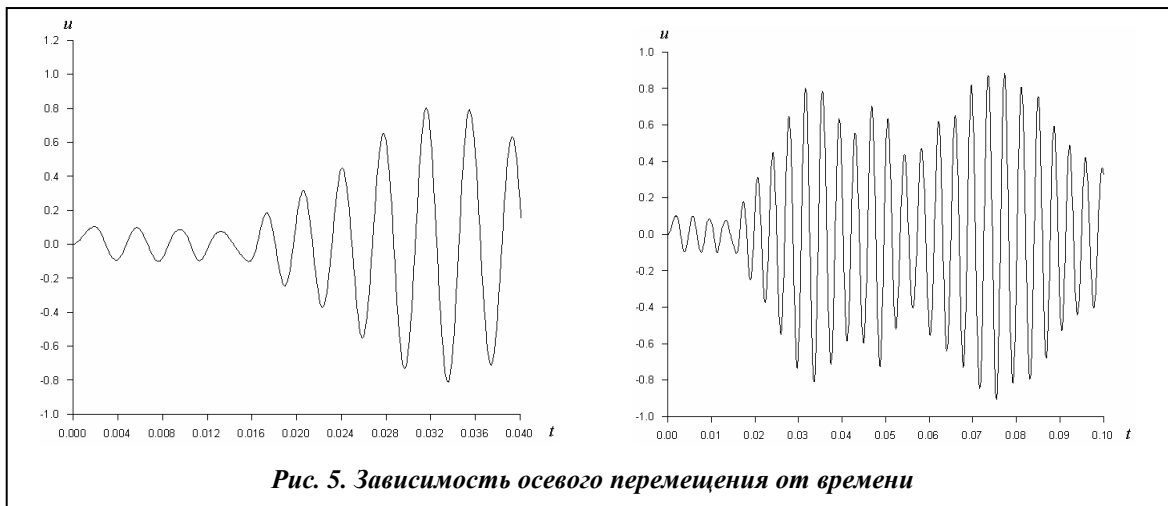




Рис. 6. Схема оболочки и зависимость радиальных перемещений от времени

где  $T_1 = 0,002$  с. На рис. 7 показана зависимость осевого перемещения от времени. В [8, 10] проведено сравнение результатов авторов и данных, полученных с помощью программного комплекса ANSYS.

Схема оболочки и зависимости радиальных перемещений точек 1,2 от времени показаны на рис. 6.

Рассмотрена также упругая цилиндрическая оболочка с плоским дном, частично заполненная жидкостью под действием импульсной нагрузки. Геометрия оболочки резервуара показана на рис.3, параметры резервуара следующие: радиус  $R = 1$  м, толщина  $h = 0,01$  м, длина  $L = 2$  м, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ , плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность жидкости  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>. Уровень заполняющей жидкости обозначен через  $H$  ( $H = 0,8$  м). Граничные условия  $u_r = u_z = u_\theta = 0$  при  $z = 0$  и  $r = R$ .

Распределенное давление действует на цилиндрическую поверхность резервуара по закону

$$q(r, z, t) = q_0 \cos k\varphi(r, z) \exp(-t / \tau),$$

где  $q_0 = 0,1$  МПа,  $\tau = 14,2 \cdot 10^{-6}$  с. Время действия импульса  $t_n = 5 \cdot 10^{-3}$  с.

Для иллюстрации расчетов радиальное перемещение вычислено в трех точках, которые показаны на рис. 3; точка 1 (узел 91) расположена на смоченной части стенки, точка 2 (узел 121) принадлежит границе свободной поверхности жидкости, точка 3 (узел 69) находится вблизи основания. На рис. 7–9 представлены радиальные перемещения, вычисленные предложенным методом (сплошная линия) и с помощью конечноэлементного комплекса (штриховая линия).

Иллюстрации демонстрируют хорошее согласование результатов, полученных различными методами, что свидетельствует о надежности предложенного алгоритма.

## 6. Выводы

Разработан эффективный численный метод анализа динамического поведения произвольных оболочек вращения, частично заполненных жидкостью, при

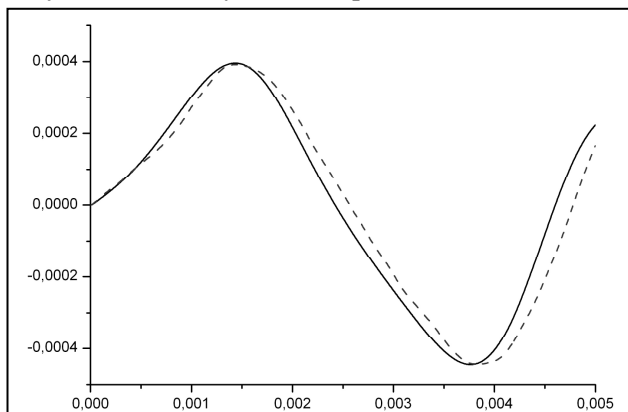


Рис. 7. Изменение во времени радиального перемещения в точке 1

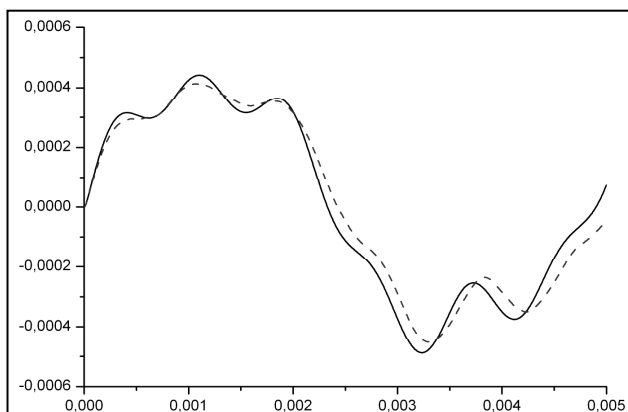


Рис. 8. Изменение во времени радиального перемещения в точке 2



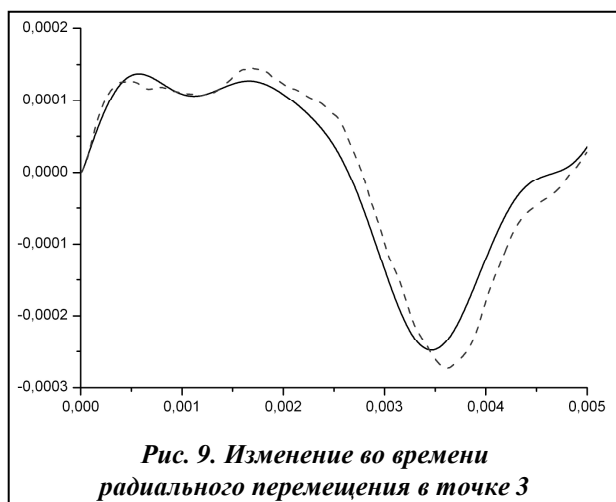


Рис. 9. Изменение во времени радиального перемещения в точке Z

импульсном нагружении. Потенциал скоростей представлен в виде суммы двух слагаемых, соответствующих задачам определения частот и форм свободных колебаний жидкости в жесткой оболочке и упругой оболочки с жидкостью без учета гравитационной составляющей. Интегрирование по объему жидкости сведено к интегрированию вдоль меридиана оболочки и радиуса свободной поверхности жидкости, т.е. является одномерным. В этом заключается основное преимущество нашего метода, основанного на комбинации метода граничных интегральных уравнений, метода конечных элементов и разложения в ряды Фурье. Проведены численные исследования динамики цилиндрического резервуара, заполненного несжимаемой жидкостью.

### Литература

1. Мокеев В. В. Исследование динамики конструкций с жидкостью и газом с помощью метода конечных элементов / В. В. Мокеев // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1998. – № 6. – С. 166–174.
2. Слепян Л. И. Метод граничных интегральных уравнений в гидроупругости / Л. И. Слепян, С. В. Сорокин // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1989. – № 4. – С. 166–177.
3. Shkenev S. The dynamics of an elastic and elastoplastic shell filled with an ideal liquid / S. Shkenev // Proc. Of IV All-Union Conf. on the Theory of Shells and Plates. – Moscow: Nauka, 1964. – P. 997–1007.
4. Celebi M. S. Fully Non-linear 3-D Numerical Wave Tank Simulation / M. S Celebi, M. H. Kim, R. F. Beck // J. Ship Research. – 1998. – Vol. 42, № 1. – P. 33–45.
5. Selmane A. Vibration analysis of anisotropic open cylindrical shells subjected to a flowing fluid / A. Selmane, A. A. Lakis // J. Fluids Struct. – 1997. – Vol. 11. – P. 111–134.
6. Zhang Y. L. A finite element method for modelling the vibration of initially tensioned thin-walled orthotropic cylindrical tubes conveying fluid / Y. L. Zhang, D. G. Gorman, J. M. Reese // J. Sound Vib. – 2001. – Vol. 245. – № 1. – P. 93–112.
7. Brebbia C. A. Boundary element techniques / C. A. Brebbia. – New York: Springer-Verlag, Inc, 1984. – 464 p.
8. Strelnikova E. Free and forced vibrations of the shells of revolution interacting with the liquid / E. Strelnikova, E. Yeseleva, V. Gnitko, V. Naumenko // Proc. of XXXII Conference Boundary elements and other mesh reduction methods WITPress, Transaction on Modeling and Simulation. – 2010. – P. 203–211.
9. Луковский И. А. Введение в нелинейную динамику жестких оболочек с полостями, заполненными жидкостью / И. А. Луковский // Киев: Наук. думка, 1990. – 296 с.
10. Ventsel E. Free vibrations of shells of revolution filled with a fluid / E. Ventsel, V. Naumenko, E. Strelnikova, E. Yeseleva // Eng. analysis with boundary elements. – 2010. – Vol. 34. – P. 856–862.

Поступила в редакцию  
15.02.13