

УДК 532.595

К. В. Аврамов^{*}, д-р техн. наук
Ю. В. Михлин^{**}, д-р физ.-мат. наук
В. Н. Романенко^{*},
А. А. Киреев^{***}, канд. физ.-мат. наук

* Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: kvavr@kharkov.ua)

** Национальный технический университет
«Харьковский политехнический институт»

*** Институт проблем механики РАН (г. Москва)

УСТАНОВИВШИЕСЯ АВТОКОЛЕБАНИЯ ГИБКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДВУХСТОРОННЕМ ОБТЕКАНИИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫМ ГАЗОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Исследуются тонкостенные конструкции, совершающие геометрически нелинейное деформирование и взаимодействующие с потенциальным газовым течением. Предлагается метод исследования устойчивости и бифуркаций установившихся колебаний таких систем. Основой этого подхода является решение системы сингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических производных перепада давления на конструкции. В результате применения метода Бубнова–Галеркина получена нелинейная динамическая система относительно обобщенных координат колебаний пластинки. Для исследования бифуркаций и устойчивости автоколебаний применяется метод пристрелки в сочетании с алгоритмом продолжения.

Досліджуються тонкостінні конструкції, що геометрично нелінійно деформуються і взаємодіють з потенційною газовою течією. Пропонується метод дослідження стійкості і бифуркацій сталих коливань таких систем. Основою цього підходу є розв'язання системи сингулярних інтегральних рівнянь відносно аеродинамічних похідних перепаду тиску на конструкції. В результаті застосування методу Бубнова–Гальоркіна отримана нелінійна динамічна система відносно узагальнених координат коливань пластинки. Для дослідження бифуркацій і стійкості автоколивань застосовується метод пристрелки у поєднанні з алгоритмом продовження.

Введение

В аэрокосмической технике, энергетике тонкостенные элементы конструкции взаимодействуют с газовыми потоками. Например, лопатки турбин обтекаются газовым течением, лопасти ветреных энергетических установок взаимодействуют с течением ветра. При таком взаимодействии часть энергии течения перекачивается в тонкостенную конструкцию, что приводит к интенсивным колебаниям. Такие колебания называются флаттером. Подчеркнем, что конструкции могут успешно эксплуатироваться в области флаттера [1]. При этом они совершают колебания с умеренными амплитудами порядка толщины конструкции.

Колебаниям конструкций в области флаттера посвящено огромное количество исследований. Подробный обзор литературы, посвященный этой тематике, приводится в работах [2–6]. В основном для исследования взаимодействия конструкций с газовым потоком используются сингулярные интегральные уравнения относительно плотности циркуляции. Такие уравнения удобны при решении задач аэродинамики, но их затруднительно применять в исследованиях аэроупругих колебаний. Дело в том, что при использовании отмеченных выше интегральных уравнений приходится учитывать вихри, сходящие с задней кромки

конструкции. Такие явления не учитываются, если сингулярные уравнения записываются относительно перепада давления. Этот подход развивается в настоящей статье.

1. Постановка задачи

Рассмотрим тонкостенные конструкции при двухстороннем взаимодействии с потенциальным газовым течением. В качестве такой конструкции может рассматриваться полая оболочка или пластинка. Предположим, что конструкция совершает геометрически нелинейное деформирование, то есть поперечные перемещения конструкции соизмеримы с ее толщиной, а деформации являются малыми. В этом случае напряжения и деформации удовлетворяют закону Гука. Динамическое напряженно-деформируемое состояние таких систем опишем поперечным перемещением $w(x, y, t)$ и функцией напряжений $\Phi(x, y, t)$, где x, y – две координаты срединной поверхности тонкостенной конструкции. Тогда динамика конструкции описывается системой двух нелинейных уравнений в частных производных относительно w, Φ

$$D \nabla^4 w + ch \dot{w} + \rho h \ddot{w} + \Delta p = \Lambda_1(w, \Phi); \quad (1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \Lambda_2(w, \Phi), \quad (2)$$

где $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$; $\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t}$; E – модуль Юнга; ρ – плотность материала конструкции; h –

толщина пластинки; c – коэффициент линейного демпфирования; Δp – перепад давлений, действующий на пластинку со стороны потока; $\Lambda_i(w, \Phi)$ – два нелинейных дифференциальных оператора. Перепад давлений определяется из решения задачи аэродинамики, которая будет рассмотрена ниже.

Поперечные перемещения тонкостенной конструкции разложим по собственным формам линейных колебаний $\psi_j(x, y)$ так:

$$w(x, y, t) = \sum_{j=1}^{N_1} q_j(t) \psi_j(x, y), \quad (3)$$

где $q_i(t)$ – обобщенные координаты, описывающие колебания конструкции. Собственные формы колебаний $\psi_j(x, y)$ определяются методом Релея–Ритца. Функцию напряжений Φ , которая находится из решения уравнения (2), разложим по базисным функциям $F_{j\nu}(x, y)$, которые удовлетворяют граничным условиям для функции напряжений

$$\Phi = \sum_{j=1}^{N_2} \sum_{\nu=1}^{N_3} \theta_{j\nu}(t) F_{j\nu}(x, y). \quad (4)$$

В дальнейшем предполагается, что колебания конструкции близки к гармоническим

$$q_j(t) \approx \gamma_j \cos(\omega t) + \delta_j \sin(\omega t), \quad j = 1, 2, \dots, N.$$

Конструкция обтекается трехмерным, потенциальным, невязким, несжимаемым газом. На значительном расстоянии от конструкции течение имеет постоянную скорость U_∞ , которая параллельна оси x . Проекция скорости потока на оси декартовой системы координат обозначим через $u(x, y, z, t)$; $v(x, y, z, t)$; $w(x, y, z, t)$. Динамику потока опишем потенциалом скоростей $\phi(x, y, z, t)$. Отметим, что потенциал скоростей и давление $p(x, y, z, t)$ удовлетворяют следующим уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \phi = 0; \quad \nabla^2 p = 0.$$

2. Нелинейная динамическая модель автоколебаний конструкции

Используем аэродинамические производные для представления потенциала скоростей и давления [7]

$$\varphi(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} [\varphi_j^{(0)}(x, y, z)q_j(t) + \varphi_j^{(1)}(x, y, z)\dot{q}_j(t)];$$

$$p(x, y, z, t) = \sum_{j=1}^{N_1} [p_j^{(0)}(x, y, z)q_j(t) + p_j^{(1)}(x, y, z)\dot{q}_j(t)].$$

Согласно работе [7] аэродинамические производные $\varphi_j^{(0)}(x, y, z)$, $\varphi_j^{(1)}(x, y, z)$, $p_j^{(0)}(x, y, z)$, $p_j^{(1)}(x, y, z)$ удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_j^{(k)} = 0; \quad \nabla^2 p_j^{(k)} = 0; \quad k = 0, 1; \quad j = 1, 2, \dots, N_1.$$

Перепад давления на конструкции представим в виде аэродинамических производных

$$\Delta p = \sum_{j=1}^{N_1} [\Delta p_j^{(1)} \dot{q}_j + \Delta p_j^{(0)} q_j].$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\chi = \frac{\omega a}{U_\infty}; \quad \bar{x} = \frac{x}{a}; \quad \bar{y} = \frac{y}{b}; \quad r = \frac{a}{b}; \quad \tau = \omega t; \quad \vartheta_i = \frac{q_i}{h}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(1)} = \frac{\omega a \Delta p_j^{(1)}}{\rho_\infty U_\infty^2}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \frac{a \Delta p_j^{(0)}}{\rho_\infty U_\infty^2},$$

где χ – число Струхала.

Аэродинамические производные перепада давления удовлетворяют системе гиперсингулярных интегральных уравнений

$$\iint_S \frac{\Delta \bar{p}_j^{(1)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = -\frac{8\pi\chi}{r^2} \frac{\partial \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}};$$

$$\iint_S \frac{\Delta \bar{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = \frac{4\pi}{r^2} \left[\chi^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y}) - \frac{\partial^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2} \right]. \quad (5)$$

Решение системы сингулярных интегральных уравнений (5) зависит от параметра χ . Поэтому если численно исследуется задача аэроупругости, то систему (5) приходится решать для каждого значения χ . Чтобы избежать этого недостатка, к системе (5) применим следующую замену переменных:

$$\Delta \bar{p}_j^{(1)} = \chi \Delta \hat{p}_j^{(1)}; \quad \Delta \bar{p}_j^{(0)} = \chi^2 \Delta \hat{p}_j^{(0)} + \Delta \tilde{p}_j^{(0)}.$$

В результате получим систему сингулярных интегральных уравнений

$$\iint_S \frac{\Delta \hat{p}_j^{(1)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = -\frac{8\pi}{r^2} \frac{\partial \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}};$$

$$\frac{r^2}{4\pi} \iint_S \frac{\Delta \hat{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = \psi_j(\bar{x}, \bar{y}); \quad (6)$$

$$\frac{r^2}{4\pi} \iint_S \frac{\Delta \tilde{p}_j^{(0)}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) d\bar{x}_1 d\bar{y}_1}{[r^2(\bar{x} - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y} - \bar{y}_1)^2]^{3/2}} = -\frac{\partial^2 \psi_j(\bar{x}, \bar{y})}{\partial \bar{x}^2}.$$

Отметим, что система сингулярных интегральных уравнений (6) не содержит χ в качестве параметра и может решаться один раз. Для численного решения гиперсингулярного интегрального уравнения (6) применяется метод дискретных вихрей, подробно рассмотренный в работах [8, 9].

Теперь получим динамическую модель с конечным числом степеней свободы, описывающую колебания аэроупругой системы. Для этого разложения (3), (4) введем в уравне-

ние (2) и применим метод Бубнова–Галеркина. В результате получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно обобщенных координат θ_{jv} :

$$\sum_{j=1}^{N_2} \sum_{v=1}^{N_3} A_{rljv} \theta_{jv} = \sum_{i_1, i_2=1}^{N_1} B_{rl i_1 i_2} q_{i_1} q_{i_2}; \quad r = 1, 2, \dots, N_2; \quad l = 1, 2, \dots, N_3. \quad (7)$$

Решение системы (7) вводится в (4), а результат его решения – в (1). К полученному уравнению применяется метод Бубнова–Галеркина. В результате имеем нелинейную динамическую систему относительно обобщенных координат колебаний пластинки

$$\sum_{i=1}^{N_1} \rho h I_{ji} \left(\ddot{q}_i + \frac{c}{\rho} \dot{q}_i + \omega_i^2 q_i \right) + \sum_{i=1}^{N_1} \left(P_{ji}^{(0)} q_i + P_{ji}^{(1)} \dot{q}_i \right) + Z_j(q_1, \dots, q_{N_1}) = 0, \quad (8)$$

где $I_{ji} = \int_S \psi_i \psi_j dx dy$; $P_{ji}^{(0)} = \int_S \Delta p_i^{(0)}(x, y) \psi_j dx dy$; $P_{ji}^{(1)} = \int_S \Delta p_i^{(1)}(x, y) \psi_j dx dy$; Z_j – нелинейные относительно обобщенных координат функции, описывающие геометрически нелинейное деформирование конструкции; ω_i – собственные частоты линейных колебаний. Динамическую систему (8) относительно безразмерных переменных и параметров запишем как

$$\sum_{i=1}^{N_1} R_{ji} \left(\chi^2 \vartheta_i'' + \alpha \chi^2 \vartheta_i' + \chi_1^2 \Omega_i^2 \vartheta_i \right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N_1} \left(\chi^2 \pi_{1,ji} \vartheta_i + \pi_{2,ji} \dot{\vartheta}_i + \chi \pi_{3,ji} \dot{\vartheta}_i \right) + \chi_1^2 f_j(\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_1}) = 0, \quad (9)$$

где $\chi_1 = \frac{\omega_1 a}{U_\infty}$; $\vartheta_i' = \frac{d\vartheta_i}{d\tau}$; $\alpha_{jii_2} = \frac{h \chi_{jii_2}}{b \rho \omega_1^2 a}$; $\varepsilon = \frac{a \rho_\infty}{h \rho}$; $\alpha = \frac{c}{\omega \rho}$; $\Omega_j = \frac{\omega_j}{\omega_1}$;

$$R_{ji} = \int_S \psi_i \psi_j dx dy; \quad \pi_{1,ji} = \int_S \Delta \hat{p}_i^{(0)} \psi_j dx dy; \quad \pi_{2,ji} = \int_S \Delta \tilde{p}_i^{(0)} \psi_j dx dy; \quad \pi_{3,ji} = \int_S \Delta \tilde{p}_i^{(1)} \psi_j dx dy.$$

3. Применение метода пристрелки в анализе автоколебаний

Для исследования автоколебаний конструкции будет применяться метод пристрелки [10]. С помощью этого подхода исследуем периодические автоколебания в системе (9). Введем в рассмотрение фазовые переменные $y = (y_1, \dots, y_{2N_1}) = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_{N_1}, \dot{\vartheta}_1, \dots, \dot{\vartheta}_{N_1})$. Тогда динамическую систему (9) представим в следующем векторном виде:

$$\dot{y} = A_{gl} y - R(y), \quad (10)$$

где A_{gl} – матрица размером $2N_1 \times 2N_1$, описывающая линейную часть динамической системы; $R(y)$ – вектор-функция, имеющая следующую блочную структуру: $R(y) = [0 F(y)]^T$.

В дальнейшем рассмотрим динамику пластин. Тогда нелинейная вектор-функция $F(y) = (F_1, \dots, F_{N_1})$ принимает вид

$$\frac{\chi^2}{\chi_1^2} F_j = \sum_{i_1, i_2=1}^{N_1} \alpha_{jii_2}^* y_{i_1} y_{i_2}.$$

Периодические автоколебания системы (10) удовлетворяют следующим краевым условиям:

$$y(0) = y(2\pi). \quad (11)$$

Динамическую систему (10) с краевыми условиями (11) запишем в виде системы нелинейных алгебраических уравнений. Введем вектор начальных условий для динамической системы (10) $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,2N_1})$. Тогда решение системы (10) с начальными условиями y_0 при $\tau = 2\pi$ обозначим $y_{2\pi}$. Это решение представим следующей вектор-функцией $y_{2\pi} = y_{2\pi}(y_0, \chi, \chi_1)$. Тогда краевую задачу (17), (18) запишем в виде системы $2N_1$ нелинейных алгебраических уравнений

$$y_{2\pi}(y_0, \chi, \chi_1) - y_0 = 0. \quad (12)$$

Отметим, что динамическая система (10) инвариантна относительно преобразования времени $\tau \rightarrow \tau + \tau_0$, где параметр τ_0 выбирается произвольно. Выберем величину τ_0 , так, что $\vartheta_1|_{t=0} \equiv y_{0,N_1+1} = 0$. Для расчета бифуркационной диаграммы автоколебаний пластинки величина одного начального условия, например $y_{0,L}$, задается с некоторым шагом. Тогда вектор неизвестных системы нелинейных алгебраических уравнений (12) представим так: $z = (y_{0,1}, \dots, y_{0,L-1}, y_{0,L+1}, \dots, y_{0,N_1}, y_{0,N_1+2}, \dots, y_{0,2N_1}, \chi, \chi_1)$. Для решения системы нелинейных алгебраических уравнений (12) применяется метод Ньютона–Рафсона. Хорошо известно, что на каждой итерации этого метода рассчитывается матрица Якоби, которая представляется в следующем векторном виде:

$$J = \left\{ \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{01}} - l_1, \dots, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,L-1}} - l_{L-1}, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,L+1}} - l_{L+1}, \dots, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,N_1}} - l_{N_1}, \right. \\ \left. \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,N_1+2}} - l_{N_1+2}, \dots, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,2N_1}} - l_{2N_1}, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial \chi}, \frac{\partial y_{2\pi}}{\partial \chi_1} \right\},$$

где $\frac{\partial y_{2\pi}}{\partial y_{0,i}}$ – вектор из частных производных решения; l_i – вектор размерности $2N_1$; на i -м месте этого вектора стоит 1, а все остальные элементы нулевые. Численные исследования показали, что для расчета частных производных, входящих в матрицу Якоби, конечно-разностные формулы не всегда дают достоверные результаты. Поэтому получим системы дифференциальных уравнений, решениями которых являются элементы матрицы Якоби J .

Такой подход впервые был предложен в [11]. Частные производные $\frac{\partial y}{\partial y_{0i}}$ удовлетворяют следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial y}{\partial y_{0v}} \right) = A_{gl} \frac{\partial y}{\partial y_{0v}} - DR \frac{\partial y}{\partial y_{0v}}; \quad \frac{\partial y}{\partial y_{0v}} \Big|_{t=0} = l_v,$$

где матрица Якоби DR имеет такую блочную структуру:

$$DR = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ DF & 0 \end{bmatrix};$$

$$\frac{\chi^2}{\chi_1^2} \frac{\partial F_j}{\partial y_l} = 3\alpha_{jll}^* y_l^2 + 2y_l \sum_{i=1}^{N_1} \beta_{jli} y_i + \sum_{i=1}^{N_1} \beta_{jil} y_i^2 + \sum_{\substack{i_1, i_2=1 \\ (i_1, i_2) \notin \Phi_1 \\ (i_1, i_2) \notin \Phi_2}}^{N_1} \delta_{jli_1 i_2} y_{i_1} y_{i_2};$$

$$\Phi_1 = \{(i_1, i_2) \in Z | i_2 = i_1 = l\};$$

$$\Phi_2 = \{(i_1, i_2) \in Z | i_2 = l \text{ or } i_2 = i_1 \text{ or } i_1 = l\}.$$

Вектор частных производных $\frac{\partial y}{\partial \chi_1}$ удовлетворяет следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial y}{\partial \chi_1} = \frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi_1} y + A_{gl} \frac{\partial y}{\partial \chi_1} - \frac{2\chi_1}{\chi^2} \tilde{R}(y) - \frac{\chi_1^2}{\chi^2} D\tilde{R} \frac{\partial y}{\partial \chi_1}, \quad (13)$$

где матрица Якоби $D\tilde{R}$ имеет блочную структуру

$$D\tilde{R} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ Df & 0 \end{bmatrix}; \quad f_j = \frac{\chi^2}{\chi_1^2} F_j;$$

матрица $\frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi_1}$ представляется так:

$$\frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \chi_1} & 0 \end{bmatrix}; \quad \frac{\partial A}{\partial \chi_1} = -\frac{2\chi_1}{\chi^2} \text{diag}(\Omega_1^2, \dots, \Omega_{N_1}^2).$$

Вектор частных производных $\frac{\partial y}{\partial \chi}$ удовлетворяет следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{d}{d\tau} \frac{\partial y}{\partial \chi} = \frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi} y + A_{gl} \frac{\partial y}{\partial \chi} + 2 \frac{\chi_1^2}{\chi^3} \tilde{R}(y) - \frac{\chi_1^2}{\chi^2} D\tilde{R} \frac{\partial y}{\partial \chi}, \quad (14)$$

где матрица $\frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi}$ имеет блочную структуру

$$\frac{\partial A_{gl}}{\partial \chi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\partial A}{\partial \chi} & \frac{\partial B}{\partial \chi} \end{bmatrix}.$$

Элементы подматриц определяются так:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_{ii}}{\partial \chi} &= 2 \frac{\chi_1^2 \Omega_i^2}{\chi^3} + 2\varepsilon \frac{\pi_{2,ii}^*}{\chi^3}; & i=1, \dots, N_1; & \quad \frac{\partial A_{ji}}{\partial \chi} = 2\varepsilon \frac{\pi_{2,ji}^*}{\chi^3}; & (i, j)=1, \dots, N_1; & \quad i \neq j; \\ \frac{\partial B_{ii}}{\partial \chi} &= \varepsilon \frac{\pi_{3,ii}^*}{\chi^2}; & i=1, \dots, N_1; & \quad \frac{\partial B_{ji}}{\partial \chi} = \varepsilon \frac{\pi_{3,ji}^*}{\chi^2}; & (i, j)=1, \dots, N_1; & \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (15)$$

Для определения матрицы Якоби J численно интегрируется совокупность систем уравнений (11), (13)–(15). Эти системы дифференциальных уравнений представляются в виде одной системы размерности $2N_1(2N_1 + 1)$, которая численно интегрируется.

Итак, с помощью метода Ньютона–Рафсона решалась система нелинейных алгебраических уравнений (12) и определялись начальные условия периодических автоколебаний в динамической системе (10). Для расчета бифуркационной диаграммы автоколебаний к системе (12) применялся метод продолжения, который подробно рассмотрен в монографии [10]. Для анализа устойчивости периодических автоколебаний рассчитывалась фундаментальная матрица уравнений в вариациях при $t = 2\pi$; определялись собственные значения этой фундаментальной матрицы-мультипликатора. Численные процедуры для их расчета представлены в работе [10].

4. Численное моделирование автоколебаний

Проводился численный анализ автоколебаний пластинки (рис. 1), которая рассматривалась в статье [12]. Численные значения параметров пластины выбирались следующими: $a = 0,27$ м; $b = 0,127$ м; $\alpha = 0,1$; $h = 0,39 \cdot 10^{-3}$ м; $\rho = 2,84 \cdot 10^{-3}$ кг/м³; $\rho_\infty = 1,43$ кг/м³; $E = 70,56 \cdot 10^9$ Па; $\nu = 0,3$.

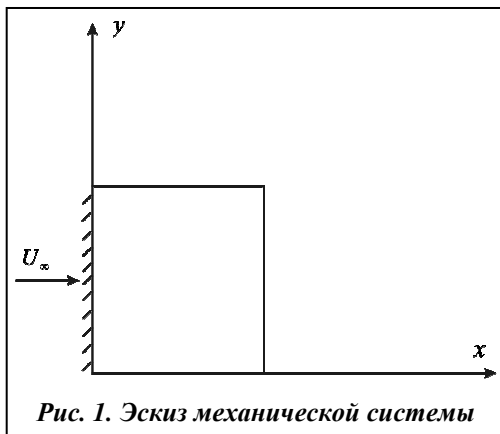


Рис. 1. Эскиз механической системы

Для расчета колебаний консольной пластинки применялся метод Релея–Ритца. Собственные частоты колебаний в Гц таковы: $\omega_1 = 4,471$; $\omega_2 = 20,09$; $\omega_3 = 27,85$; $\omega_4 = 65,19$; $\omega_5 = 78,10$; $\omega_6 = 124,23$; $\omega_7 = 134,86$; $\omega_8 = 154,49$.

Исследовалась потеря устойчивости состояния равновесия пластинки. Для этого рассматрива-

лась устойчивость тривиального состояния равновесия системы (10), в которой отображались нелинейные слагаемые. Было обнаружено, что при $\chi_1^{(H)} = 0,25$; $\chi = 1,09$ происходит бифуркация Хопфа, а в области $\chi_1 < \chi_1^{(H)}$ наблюдаются неустойчивые состояния равновесия. При $\chi_1 > \chi_1^{(H)}$ состояние равновесия пластинки является устойчивым. В точке бифуркации Хопфа $\chi_1 = \chi_1^{(H)}$ рождаются автоколебания, которые будут исследоваться в дальнейшем. Отметим, что на основании расчетов, представленных в [10], бифуркация Хопфа наблюдается при $\chi_1^{(H)} = 0,257$; $\chi = 1,29$. Итак, результаты расчетов потери устойчивости пластины, полученные нами, и в статье [10] близки.

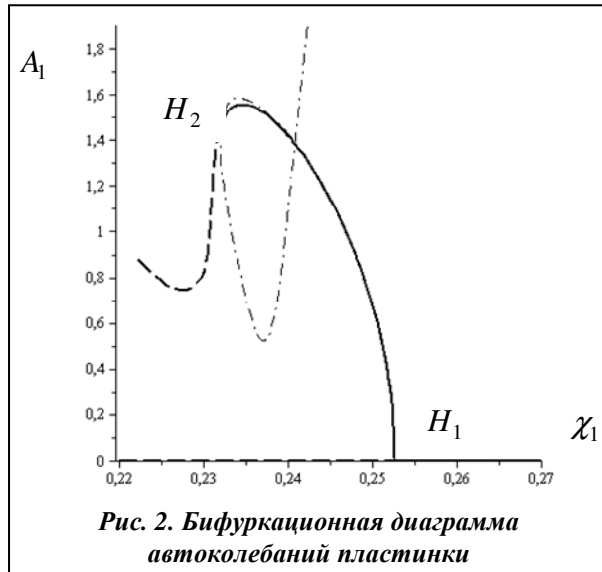
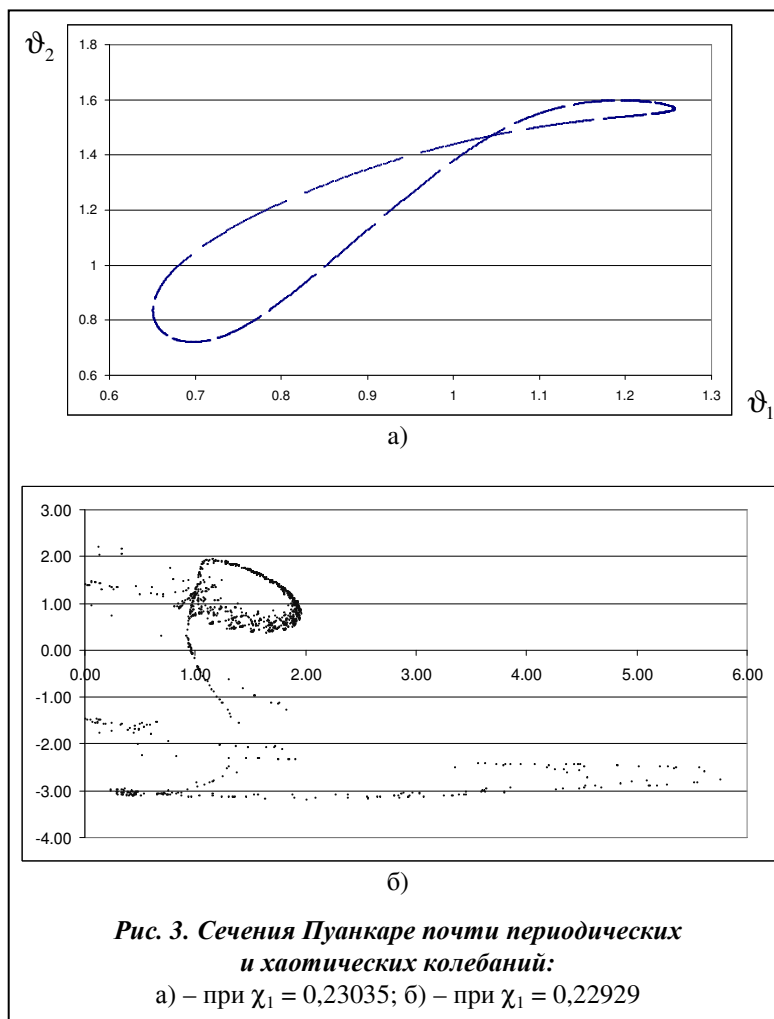


Рис. 2. Бифуркационная диаграмма автоколебаний пластинки

Теперь исследуются автоколебания, которые возникают вследствие бифуркации Хопфа. Значительный вклад в автоколебания пластинки вносит геометрическая нелинейность, которая учитывается в виде нелинейных кубических слагаемых в модели (11). Для исследования устойчивости и бифуркаций автоколебаний пластинки применяется метод пристрелки, который рассматривается в разделе 4. Результаты расчетов приводятся на рис. 2. Устойчивое состояние равновесия пластинки наблюдается при $\chi_1^{(H)} < \chi_1$. В точке H_1 при $\chi_1 = \chi_1^{(H)}$ возникает бифуркация Хопфа, и от состояния равновесия пластинки отделяются устойчивые периодические колебания. Вследствие этой бифуркации состояния равновесия пластинки становятся неустойчивыми. Неустойчивые состояния равновесия показываются пунктирной линией, а устойчивые – сплошной. Устойчивые автоколебания пластинки существуют вплоть до точки H_2 , где наблюдается бифуркация Неймарка–Сакера [10]. Эта бифуркация происходит при $\chi_1 = \chi_1^{(2)}$. При дальнейшем квазистатистическом уменьшении χ_1 периодические автоколебания являются неустойчивыми. На рис. 3 штрих-пунктирной линией приводятся результаты расчетов, полученные методом гармонического баланса. До точки H_2 поведение, полученное методом пристрелки и методом гармонического баланса, близко. Однако далее результаты расчетов, полученные методом гармонического баланса, существенно отличаются от реального поведения системы.

Для исследования динамического поведения при $\chi_1 < \chi_1^{(2)}$ проводилось прямое численное интегрирование динамической системы (11) из начальных условий неустойчивых колебаний, представленных на рис. 2. Для определения вида установившихся колебаний рассчитывались сечения Пуанкаре. Для этого использовалась следующая плоскость в фазовом пространстве системы: $\Sigma = \{(\vartheta_1, \dots, \vartheta_8, \dot{\vartheta}_1, \dots, \dot{\vartheta}_8) \in R^{16} \mid \dot{\vartheta}_1 = 0\}$. Результаты расчета сечений Пуанкаре представлены на рис. 3. По их виду делается вывод о форме установившихся колебаний. Сразу за бифуркационной точкой H_2 наблюдаются почти периодические колебания. В качестве примера сечения Пуанкаре почти периодических колебаний при $\chi_1 = 0,23035$ приводятся на рис. 3, а. На этом рисунке представлено 1200 точек. При дальнейшем уменьшении χ_1 почти периодические колебания преобразуются в хаотические. В качестве примера сечения Пуанкаре хаотических колебаний при $\chi_1 = 0,22929$ приводятся на рис. 3, б.



кация Хопфа и Неймарка–Сакера. В результате бифуркации Неймарка–Сакера возникают почти периодические колебания, которые преобразуются в хаотические.

Литература

1. *A modern course in aeroelasticity* / E. Dowell, H. Curtiss, R. Scanlan, F. Sisto. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1995. – 879 p.
2. *Paidoussis M. P. Fluid-Structure Interactions: Slender Structures and Axial Flow* / M. P. Paidoussis. – London: Academic Press, 1998. – 654 p.
3. *Belotserkovskii S. M. Study of the unsteady aerodynamics of lifting surfaces using the computer* / S. M. Belotserkovskii // *Annual Rev. Fluid Mech.* – 1977. – Vol. 9. – P. 469–494.
4. *Friedmann P. P. Renaissance of aeroelasticity and its future* / P. P. Friedmann // *Aircrafts.* – 2002. – Vol. 36. – P. 105–121.
5. *Dowell E. H. Aeroelasticity of plates and shell* / E. H. Dowell. – Leyden: Noordhoff International Publishing, 1975. – 345 p.
6. *A theoretical study of paper flutter* / Y. Watanabe, K. Isogai, S. Suzuki, M. Sugihara // *Fluids and Structures.* – 2002. – Vol. 16. – P. 543–560.
7. *Белоцерковский С. М. Аэродинамические производные летательного аппарата и крыла при дозвуковых скоростях* / С. М. Белоцерковский, Б. К. Скрипач. – М.: Физматгиз, 1975. – 423 с.
8. *Кантор Б. Я. Гиперсингулярные интегральные уравнения в задачах механики сплошной среды* / Б. Я. Кантор, Е. А. Стрельникова. – Харьков: Новое слово, 2005. – 253 с.
9. *Avramov K. V. Resonant many-mode periodic and chaotic self-sustained aeroelastic vibrations of cantilever plates with geometrical nonlinearities in incompressible flow* / K. V. Avramov, E. A. Strel'nikova, C. Pierre // *Nonlinear Dynamics.* – 2012. – Vol. 70. – P. 1335–1354.
10. *Аврамов К. В. Нелинейная динамика упругих систем* / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – М.; Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010. – 704 с.

Заключение

В статье предложен метод исследования аэроупругих колебаний тонкостенных конструкций, взаимодействующих с потенциальным, несжимаемым газовым потоком. Для исследования установившихся автоколебаний получена система сингулярных интегральных уравнений относительно аэродинамических производных перепада давлений, которая описывает взаимодействие пластины с газовым потоком.

Аэроупругие автоколебания пластины сведены к нелинейной динамической системе с конечным числом степеней свободы. Для исследования периодических автоколебаний используется метод пристрелки в сочетании с методом продолжения, который позволяет исследовать устойчивость и бифуркации периодических автоколебаний. С помощью этого подхода исследована бифуркация Хопфа и Неймарка–Сакера.

11. *Kawakami H.* Bifurcation of periodic responses in forced dynamics nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters / H. Kawakami // IEEE Trans. Circuits and Systems. – 1984. – Vol. 31. – P. 83–104.
12. *Tang D. M.* Flutter and limit cycle oscillations of two-dimensional panels in three-dimensional axial flow / D. M. Tang, H. Yamamoto, E. H. Dowell // Fluids and Structures. – 2003. – Vol. 17. – P. 225–242.

Поступила в редакцию
04.09.12

УДК 534.1 : 539.3

И. В. Янчевский, канд. техн. наук

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины
(г. Киев, e-mail: yanchevsky@ukr.net)

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПАКЕТНОГО ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Представлены результаты конечноэлементного моделирования переходных процессов деформирования пакетного «продольно-изгибного» пьезопреобразователя, погруженного в безграничную идеальную сжимаемую жидкую среду. Исследовано влияние акустической среды на деформации преобразователя при различных законах изменения во времени подводимого к его токопроводящим покрытиям электрического сигнала.

Наведені результати скінченноелементного моделювання перехідних процесів деформування пакетного «поздовжньо-згинного» п'єзоперетворювача, зануреного в безмежне ідеальне стисливе рідке середовище. Досліджено вплив акустичного середовища на деформації перетворювача за різних законів зміни у часі електричного сигналу, що підводиться до його струмопровідних покриттів.

Введение

Интерес к исследованиям динамических режимов работы технических устройств, функционирующих на основе пьезоэффекта, обусловлен широкой номенклатурой их практических приложений, в частности, в прикладной гидроакустике для излучения и приема ультразвуковых волн. Расчет эксплуатационных параметров таких устройств зачастую проводится методами «эквивалентных электрических цепей» или «четырёхполюсника» [1]. Впрочем, использование этих методов лишает возможности детального анализа закономерностей деформирования входящих в состав указанных устройств пьезоэлектрических преобразователей, а также оценки механической и диэлектрической их прочности с учетом взаимодействия с акустическими средами. К тому же замещение пьезопреобразователя эквивалентной схемой проводится с привлечением ряда упрощающих предположений, что ведет к неизбежным погрешностям, а полученные на основе этих методов результаты расчета основных характеристик пьезопреобразователя справедливы для достаточно узкого диапазона изменения внешних воздействий. Поэтому в настоящее время повышенное внимание уделяется развитию метода «связанных полей» [1], когда изучение процессов в гидроэлектродупругих системах проводится через совместное решение уравнений колебаний пьезопреобразователя как деформируемого тела [2], уравнений движения акустической среды и теоретических основ электротехники [3] (в случае учета процессов в электрических цепях).

Однако анизотропия пьезоэлектрических материалов и связанность полевых величин различной физической природы определяет значительные математические трудности при построении строгих аналитических решений краевых задач гидроэлектродупругости даже для геометрически простых моделей пьезопреобразователей. Из публикаций последних лет по