

УДК 518:517.9

**Г. А. Шелудько****С. В. Угримов**, канд. техн. наукИнститут проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: sugrimov@ipmach.kharkov.ua)**МОДИФИКАЦИЯ СЕМЕЙСТВА ИТЕРАТИВНЫХ  
ТРЕХТОЧЕЧНЫХ МЕТОДОВ УТОЧНЕНИЯ ПРОСТЫХ  
КОРНЕЙ МОНОТОННОЙ НЕГЛАДКОЙ ФУНКЦИИ**

*Рассмотрена локализация корня выпуклой функции посредством дискретных трехточечных методов. Проведен анализ существующих методов, свободных от производных. Предложены их модификации на основе простой процедуры «сближения» характеристических точек Лагранжа–Эрмита. Идея сближения реализована многочисленными схемами и подтверждается численным экспериментом на представительном наборе тестовых функций разнообразной структуры. Установлено, что благодаря такой процедуре «сближения» возможно сравнительно просто повышать эффективность обычных поисковых средств локализации.*

*Розглянута локалізація кореня опуклої функції за допомогою дискретних триточкових методів. Проведено аналіз існуючих методів, вільних від похідних. Запропоновано їх модифікації на основі простої процедури «зближення» характеристичних точок Лагранжа–Ерміта. Ідея зближення реалізована чисельними схемами та підтверджується чисельним експериментом на повнооб'ємному наборі тестових функцій різноманітної структури. Встановлено, що завдяки такій процедурі «зближення» можливо відносно просто підвищувати ефективність звичайних пошукових засобів локалізації.*

**Введение**

В последнее время заметно повысился интерес к созданию новых и совершенствованию уже известных методов уточнения корней непрерывных функций  $f(x)$ , который привел к весьма большому количеству различных поисковых схем [1–7], в отличие от классических подходов, требующих обязательного знания производных исследуемой функции. Это вызвано прежде всего тем, что результаты такой распространенной задачи широко используются во многих разделах вычислительной математики и практически реализуемых постановках научно-технического характера. В частности, заслуживает особого внимания поиск экстремальных точек, к которому может быть легко сведена названная задача. Также в многочисленных прикладных задачах приходится искать вещественные корни уравнений, связанных с проблемами теории колебаний и неустановившихся вибраций, в задачах статического и динамического равновесия и т.п.

Каждый раз, решая относительно простые задачи поиска корня той или иной функции, авторы упомянутых выше методов, учитывая характер задачи, стремились совершенствовать (и упрощать по возможности) используемые ими средства, чтобы повысить качество решения, реализуемого итерационным процессом  $x_{n+1} = \varphi(f(x_n))$ . Здесь *итеративная функция*  $\varphi$  определяет суть выбранного метода – его точность и скоростные свойства.

К числу таких приемов уточнения корня предлагалось повышение порядка сходимости используемого метода, более точное вычисление промежуточных значений параметров метода и самой функции  $f(x)$ , а главное – привлечение дополнительных условий, к сожалению, сужающих круг решаемых задач (дифференцируемость функции  $f(x)$ , представление ее в виде, отличном от заданного путем ее преобразования и т. п.), что естественно, не могло не отразиться на снижении эффективности решения.

Создание высокоточных методов [7–12], даже свободных от производных, порождая, как правило, громоздкие вычислительные схемы, а главное – дорогостоящие алгоритмы, требует многих вычислений функции  $f(x)$  для получения новых точек итерационного процесса. Поскольку такие схемы проявляют свои качества, в том числе и объявленную скорость сходимости, в достаточно малой окрестности искомого корня  $X^*$ , то иногда приходится затрачивать значительные усилия для выбора приемлемой стартовой точки  $X_0$ .

Если же учесть, что в прикладных задачах научно-технического характера часто приходится довольствоваться грубой аппроксимацией для получения функции  $f(x)$ , которая к тому же оказывается *трудновычислимой*, то понятно, что центр тяжести должен быть перенесен на случай, когда предпочтение отдается *эффективности* получения корня, поскольку достижение важной характеристики – *точности* не является теперь самоцелью. Под трудно-вычислимыми функциями понимают такие функции, для вычисления которых требуется значительное время на ЭВМ, превышающее заданный ресурс [2].

Аналитическое выражение для производных функции или вообще отсутствует или трудно достигается. Во многих практических приложениях производные функции  $f(x)$  часто недоступны, так как сама функция есть результат численного моделирования (некоторая численная процедура) и ее точную производную, если такая вообще существует, еще сложнее определить в необходимой точке.

### Постановка задачи

Имеется  $f(x)$  – функция одного переменного и предстоит решать уравнения вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где относительно функции известно, что она определена на сегменте  $[A, B]$  и существует, по крайней мере, одно действительное решение  $X^*$ , т. е. выполняется неравенство

$$f(A)f(B) < 0. \quad (2)$$

Предполагается, что на этом отрезке функция  $f(x)$  непрерывна и монотонна. Других ограничений на функцию не накладывается, в том числе и по гладкости. При этом функция  $f(x)$  может быть *трудновычислимой* или алгоритмически заданной.

Обычно после процедуры *отделения* простых корней функции  $f(x)$ , т. е. получения отрезка  $[A, B]$ , в котором функция определена и имеет место условие (2), переходят к приему *уточнения* корня  $X^* \in [A, B]$ , т. е. указанию отрезка  $[A_N, B_N] \subset [A, B]$  длиной  $L_N = B_N - A_N \leq \varepsilon$ , содержащего корень  $X^*$  функции  $f(x)$ . (Число  $\varepsilon > 0$ , как обычно, назначается и неизменно для всех шагов итерации  $k = 1, 2, \dots, N$ .)

Из множества способов [1–4, 7, 10], решающих задачу уточнения, интересен класс дискретных итеративных методов. Ограничимся рассмотрением лишь тех из них, которые, по нашему мнению, имеют наибольшее распространение и достаточно эффективны. Поскольку в общем предполагается негладкая локализация, то будут привлечены исключительно те методы, которые не используют *точные* производные функции  $f(x)$ . Арсенал методов негладкой локализации невелик. Существуют минимаксные поисковые процедуры (*метод Больцано* [4] для *корней* уравнения (1) и *метод Кифера–Джонсона* [2, 3] для *экстремальных точек*), порождающие глобально сходящиеся процессы, но их эффективность все же невысока. Поэтому часто используют поисковые методы, основанные на той или иной аппроксимации производных исследуемой функции. Правда, успех их применения существенно зависит от характера конкретной функции и размеров допустимой области, в то время как минимаксные процедуры работают всегда.

### Общий вид итеративной функции

Любая *итерационная формула* (ИФ) может быть представлена в ньютоновом виде

$$\varphi(x) = x - f(x)/\Delta, \quad (3)$$

где  $\Delta$  определяется принятым методом. Так, например, в методе Ньютона  $\Delta$  совпадает с производной  $f'(x)$  функции  $f(x)$ .

В дискретных аналогах (табл. 1) величина  $\Delta$  имеет иной вид в зависимости от количества и состава различных элементов, входящих в «производную»  $\Delta$ , приближающую истинную производную. Всякая дискретизация приводит, конечно, к определенному снижению точности ИФ. Использование двух *информативных точек* переводит метод Ньютона (3) с порядком  $p = 2$  в метод секущих с  $p = 1,618\dots$ , а использование трех точек – к методам с  $p = 1,839\dots$  [4]. (Если итерационный процесс  $x_{k+1} = \Phi(x_k)$  удовлетворяет условию  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(x_{k+1} - x_k)}{(x_k - x_{k-1})^p} = c \neq 0$ , то он имеет *сходимость порядка*  $p$ . Здесь  $k$  – номер итерации).

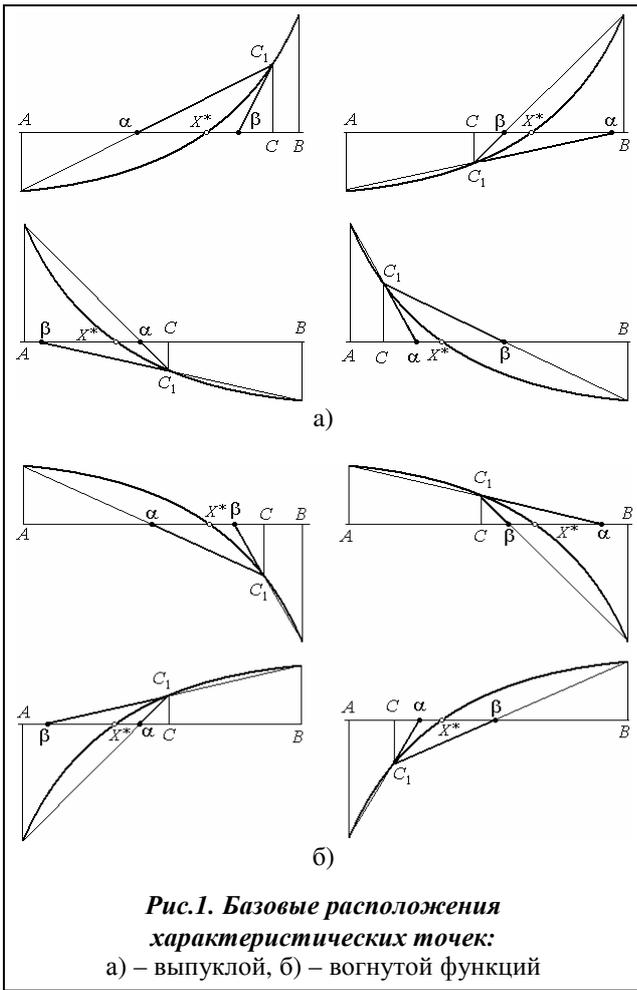
Для идентификации характера функции  $f(x)$  в окрестности решения  $X^*$  нам достаточно привлечь три, отличные от  $X^*$ , *информативные точки*  $A, B, C$ , т. е. точки, в которых известны значения функции  $f(x)$ . Использование большего числа точек, конечно, повышает качество идентификации, но и усложняет ИФ. Кроме этого, в таком случае необходимо иметь большее число информативных точек на начальном этапе, что не всегда приемлемо, особенно при трудновычислимых функциях. Применение же трех информативных точек обеспечивает то минимально возможное их количество, по которому можно судить о степени выпуклости и вогнутости функции (рис. 1).

Таблица 1. Трехточечные дискретные методы и их аналоги

Метод	ИФ в ньютоновой форме	ИФ, выраженная через характеристические точки $\alpha, \beta$
<b>RF1</b>	$X = C - \frac{f_C}{\Delta_{BA}}$	$X = C - (B - A) / \left( \frac{B - C}{C - \beta} + \frac{C - A}{C - \alpha} \right)$
<b>C1</b>	$X = C - f_C / \left( \frac{\Delta_{CA} + \Delta_{BC}}{2} \right)$	$X = C - 2 / [(C - \alpha)^{-1} + (C - \beta)^{-1}]$
<b>C2</b>	$X = C - f_C (\Delta_{CA}^{-1} + \Delta_{BC}^{-1}) / 2$	$X = (\alpha + \beta) / 2$
<b>ПД</b>	$X = C - \frac{f_C}{\frac{f_B - f_A}{f_B - f_C} \Delta_{CA} + \frac{f_A - f_C}{f_B - f_C} \Delta_{BC}}$	$X = \frac{B\alpha - A\beta}{B - A - \beta + \alpha}$
<b>ВН</b>	$X = C - \frac{f_C}{\Delta_{CA} + \Delta_{BC} - \Delta_{BA}}$	$X = C - (B - A) / \left( \frac{B - C}{C - \alpha} + \frac{C - A}{C - \beta} \right)$
<b>ВОН</b>	$X = C - f_C \left( \frac{B - C}{B - A} \Delta_{CA}^{-1} + \frac{C - A}{B - A} \Delta_{BC}^{-1} \right)$	$X = \frac{B - C}{B - A} \alpha + \frac{C - A}{B - A} \beta$
<b>КП</b>	$X = C - \frac{f_C}{\frac{B - C}{B - A} \Delta_{CA} + \frac{C - A}{B - A} \Delta_{BC}} \left( 1 + \frac{f_C \Delta_{BCA}}{2 \Delta_{CA} \Delta_{BC}} \right)$	$X = C - \frac{B - A}{\frac{B - C}{C - \alpha} + \frac{C - A}{C - \beta}} \left( 1 + \frac{\beta - \alpha}{B - A} \right)$
<b>КГ</b>	$X = C - \frac{f_C}{\frac{B - C}{B - A} \Delta_{CA} + \frac{C - A}{B - A} \Delta_{BC}} \left( 1 - \frac{f_C \Delta_{BCA}}{2 \Delta_{CA} \Delta_{BC}} \right)^{-1}$	$X = C - \frac{B - A}{\frac{B - C}{C - \alpha} + \frac{C - A}{C - \beta}} \left( 1 - \frac{\beta - \alpha}{B - A} \right)^{-1}$

Здесь мы останавливаемся на трехточечной минимальной схеме, в которой на каждом этапе (шаг, цикл) вычисляется функция  $f(x)$  только в одной точке, остальные две информативные точки используются от предыдущих вычислений, т. е. реализуется так называемый *итеративный процесс с памятью*, когда одно вычисление на шаге дополняется двумя уже известными информативными точками.

Как видно из рис. 1, все схемы расположения точек группы (б) повторяются в группе (а), являясь симметричным отображением относительно оси абсцисс.



Поскольку первоначально у нас задан только отрезок, содержащий простой корень, то в начале процесса имеются только две информативные точки  $A$  и  $B$ . Точка  $C$  может быть выбрана произвольно внутри отрезка, например, посередине отрезка. Однако чем ближе находится точка  $C$  к решению, тем быстрее мы найдем решение. Поэтому точку  $C$  можно выбирать, например, методом *Regula falsi* (**RF**) [11].

Наряду с введенными точками  $A, B, C$  имеет смысл говорить еще о двух неинформативных точках  $\alpha, \beta$  (см. рис. 1)

$$\alpha = (Af_C - Cf_A)/(f_C - f_A), \quad (4)$$

$$\beta = (Bf_C - Cf_B)/(f_C - f_B),$$

которые будут участвовать во многих дискретных модификациях известных методов. Кстати, формулы (4) совпадают с интерполяционными формулами Лагранжа–Эрмита [4]. Здесь  $f_A, f_B, f_C$  – значения функции  $f(x)$  в соответствующих точках  $A, B, C$ .

На рис. 1 показаны лишь некоторые случаи из множества различных возможных взаимных расположений информативных точек  $A, B, C$ , на основе которых можно установить кусочно-

разностные характеристики  $\Delta_{CA}, \Delta_{BC}, \Delta_{BA}, \Delta_{BCA}$  функции  $f(x)$

$$\Delta_{CA} = (f_C - f_A)/(C - A), \quad \Delta_{BC} = (f_B - f_C)/(B - C),$$

$$\Delta_{BA} = (f_B - f_A)/(B - A), \quad \Delta_{BCA} = 2(\Delta_{BC} - \Delta_{CA})/(B - A),$$

по которым можно приближенно судить о характере первых производных  $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C$  на сегментах  $[A, C], [C, B], [A, B]$ , и второй производной  $\Delta_{BCA}$  в точке  $C$  функции  $f(x)$ .

Структура дискретной трехточечной ИФ, используемой при поиске корня и свободной от производных в аналитическом виде, в общем случае может быть записана в канонической ньютоновой форме (3)

$$x = C - f_C/\Delta(A, B, C; f_A, f_B, f_C, \Delta_{CA}, \Delta_{BC}, \Delta_{BA}, \Delta_{BCA}), \quad (5)$$

где  $\Delta(\cdot)$  – известная отличная от нуля функция своих аргументов. Поэтому, с учётом связи (4) трехточечная ИФ (5) представляется в следующем виде (см. табл. 1):

$$x = \varphi(A, B, C, \alpha, \beta). \quad (6)$$

Остановимся только на некоторых трехточечных методах, оказавших заметное влияние на развитие итерационных подходов, которые будем использовать в дальнейшем.

В табл. 1 как раз приведены такие трехточечные методы, позволяющие обходиться только одним значением функции  $f(x)$  на каждом цикле итерации.

Рассматриваемые здесь трехточечные методы относятся к числу одних из самых простейших, когда удается, не прибегая к вычислению производных, достигать относительно неплохих результатов как по точности, так и по эффективности.

**Метод RF1.** Если положить в канонической форме (5)  $\Delta = \Delta_{BA}$ , то получим простое обобщение метода **RF** (см. табл. 1). Метод особенно проявляет свои положительные свойства, когда точка  $C$  уже находится в достаточно малой окрестности решения.

**Метод C1.** В этом методе вместо грубой разделенной разности  $\Delta_{BA}$  метода **RF1** используется аппроксимация ее в виде *среднего арифметического* левой и правой разделенных разностей  $\Delta_{CA}$  и  $\Delta_{BC}$ , т. е. приходим к обобщению метода секущих (**C**) (см. табл. 1).

**Метод C2.** В этом методе, обобщающем метод **C1**, «производная»  $\Delta$  аппроксимируется *средним гармоническим* левых и правых конечных разностей  $\Delta_{CA}$  и  $\Delta_{BC}$  (см. табл. 1).

**Метод подобного деления (ПД).** Идея метода основана на предположении, что в малой окрестности корня  $X^*$  он делит сегмент  $[A, B]$  приблизительно в том же отношении, что и подынтервал  $(\alpha, \beta)$  (см. табл. 1).

**Метод взвешенных наклонов (ВН).** Аппроксимация «производной»  $\Delta$  в этом методе производится *переменными* весами  $(B - C)/(B - A)$  и  $(C - A)/(B - A)$  в отличие от методов **C1** и **C2** (см. табл. 1).

**Метод взвешенных обратных наклонов (ВОН).** Здесь подынтервал  $(\alpha, \beta)$  делится корнем  $X^*$  так же, как и сегмент  $[A, B]$  делится образующей точкой  $C$  (см. табл. 1).

Дальнейшее использование геометрического подхода и методики взвешивания открывает возможность получать дискретные аналоги ИФ, еще более эффективные.

**Дискретный метод касательных парабол (КП).** Взвешивание наклонов  $\Delta_{CA}$  и  $\Delta_{CB}$ , когда веса выбираются обратно пропорционально значениям  $\beta - A$  и  $B - \alpha$  соответственно, приводит к итерационной формуле (см. табл. 1), в структуре которой хорошо просматривается метод *касательных парабол П. Л. Чебышева* [3]. Метод **КП** отличается от метода **ВН** корректирующим множителем в скобках.

**Дискретный метод касательных гипербол (КГ).** Наличие в методе **КП** корректирующего множителя, ускоряющего линейный процесс **ВН**, подсказывает, что возможно аналогично, но иным способом ввести подобный множитель, исходя из геометрических соображений. Например, множителем может стать отношение  $\lambda = (B - A)/(B - A + \alpha - \beta)$ , которое в зависимости от знака ординаты  $f_C$  может быть меньше или больше единицы, оставаясь всегда положительным (см. табл. 1). Нетрудно видеть в методе **КГ** структурное сходство с методом *касательных гипербол Хелли–Салехова* [5].

При расстановке новой тройки информативных точек  $A, B, C$  располагая новой информативной точкой  $X$ , следует руководствоваться правилом: целесообразно сохранять точку с малым по модулю значением функции в числе трех информативных точек, в крайних из которых по-прежнему реализуется условие (2), а выбранный при этом отрезок по возможности был бы меньшим в сравнении с отброшенным. Новой точкой  $C \in [A, B]$  должна стать одна из двух внутренних точек  $X$  или  $C$ , в зависимости от разности значений  $C$  и  $X$ .

В образующей точке  $C$  по отношению к другим информативным точкам, как правило, сосредоточена наиболее ценная информация. Точка  $C$  указывает, в каком направлении расположен корень  $X^*$  и насколько «близко» он отстоит от точки  $C$  (см. рис. 1).

### Эффективность методов

Эффективность методов обычно оценивают по Островскому [1]

$$E = \lim_{k \rightarrow \infty} N_k \sqrt{\ln |X_{k+1} - X^*| / \ln |X_k - X^*|},$$

где  $N_k$  – число вычислений ИФ для перехода от  $X_k$  к  $X_{k+1}$ .

Однако в качестве критерия эффективности удобно использовать также информационный подход, основанный на оценке *количества информации*

$$E = N^{-1} \log_2(p_k / p_n), \quad (7)$$

где  $p_n$  и  $p_k$  – вероятности достижения решения  $X^*$  в областях  $P_n$  и  $P_k$ , полученных на данном и последующем этапах поиска, а  $N$  – общее количество вычислений, которые следует произвести для перехода  $P_n \rightarrow P_k$ .

Для оценки эффективности рассматриваемых методов можно заменить в формуле (7) вероятности на обратные величины от объемов шаров с центрами в точке  $X^*$ , в которые вписаны соответствующие области  $P_n$  и  $P_k$ , что приводит (7) к виду

$$E = N^{-1} \log_2 \left( \left| X^* - X_0 \right| / \left| X^* - X_N \right| \right),$$

где  $X_0, X_N$  – начальная и конечная точки решения.

Удобно использовать еще более простое выражение для оценки эффективности

$$E = N^{-1} \log_2 ((B - A) / |\beta - \alpha|), \quad (8)$$

которое оценивает вычислительные затраты для достижения заданной точности  $|\beta - \alpha| \leq \varepsilon$  и может служить при сравнении качества работы разных трехточечных методов.

### Модификации методов

Особую роль играют *характеристические* точки (ХТ)  $\alpha$  и  $\beta$  (4), которые несут дополнительную информацию о точке  $X^*$  (см. рис. 1) в случае выпуклой (вогнутой) функции  $f(x)$ . Они являются приближениями с недостатком и с избытком корня  $X^*$ . Хотя попадание в интервал  $(\alpha, \beta)$  (или  $(\beta, \alpha)$ ) текущей точки  $X$  того или иного метода обеспечивает сходимость итерационному процессу, это еще не гарантирует достаточной его скорости.

Из рассмотрений типичной выпуклой (вогнутой) функции  $f(x)$  на  $[A, B]$  с корнем  $X^* \in [A, B]$ , которая не содержит в  $[A, B]$  экстремальных точек, можно высказать относительно *образующей* точки  $C$  и неинформативных характеристических точек  $\alpha$  и  $\beta$  ряд легко проверяемых положений (см. рис. 1):

а) характеристические точки  $\alpha$  и  $\beta$  располагаются по разные стороны от корня  $X^*$ , а образующая точка  $C$  не лежит между точками  $\alpha$  и  $\beta$ ;

б) если на  $[A, B]$  функция  $f(x)$  возрастает, то  $\text{sgn}[f_C(C - (\alpha \vee \beta))] = 1$ , а если убывает, то  $\text{sgn}[f_C(C - (\alpha \vee \beta))] = -1$ ;

в) если корень  $X^*$  находится ближе к точке  $A$  (или  $B$ ), нежели к точке  $B$  (или  $A$ ), то он также является ближайшим к  $\alpha$  (или  $\beta$ ), нежели к  $\beta$  (или  $\alpha$ ) [13].

Эти положения иногда могут быть полезными при построении трехточечных методов и особенно для получения соответствующих точек «сближения»  $\alpha', \beta'$  (см. далее ПС) на основе имеющихся  $\alpha, \beta$ .

Для решения задачи (1) по заданной функции  $f(x)$  и имеющимся информативным точкам  $A, B, C$  устанавливается, выпукла или вогнута функция на сегменте  $[A, B]$ .

Скоростные факторы протекания итерационного процесса уточнения зависят от того, насколько близки к корню неинформативные точки  $\alpha, \beta$ . Если каким-то образом может быть получен подынтервал  $(\alpha', X^*, \beta') \subset (\alpha, X^*, \beta)$  с условиями

$$\alpha' \geq \alpha, \beta' \leq \beta \text{ и } \beta' > \alpha' \text{ при } \beta > \alpha, \quad \alpha' \leq \alpha, \beta' \geq \beta \text{ и } \beta' < \alpha' \text{ при } \alpha > \beta, \quad (9)$$

то замена характеристических точек  $\alpha, \beta$  в ИФ на  $\alpha', \beta'$  соответственно не только способствует ускорению процесса поиска корня, но и обеспечивает повышение его эффективности, поскольку для такого «сужения» окрестности корня не нужно прибегать к дополнительному вычислению функции  $f(x)$ . Это особенно важно на начальных этапах поиска, когда следует отдавать предпочтение средствам сближения ХТ  $\alpha$  и  $\beta$ , опирающимся на относительно быстрое получение достаточно малой окрестности  $(\alpha', \beta')$  притяжения корня  $X^*$ , и уже затем переходить к основному методу  $M$ , самостоятельно доводящему решение задачи до конца. Если же не удастся за один раз произвести существенно такое сближение, его можно повторить, т. е. еще *сблизить* уже полученную окрестность  $(\alpha', \beta')$ .

### Способы сближения точек $\alpha$ и $\beta$

В дальнейшем способ получения подынтервала  $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$  будем именовать *процедурой сближения* (ПС).

Сразу же следует подчеркнуть, что в отличие от получения текущего значения  $X$  трехточечным методом  $M$ , когда используются информативные точки  $A, B, C$ , здесь точки  $\alpha$  и  $\beta$  – неинформативны и для получения новых точек  $\alpha'$  и  $\beta'$  приходится использовать внешнюю информацию и предполагаемые сведения о ходе итерационного процесса (6).

Само «сближение» характеристических точек  $\alpha$  и  $\beta$  может быть осуществлено многими способами. Естественно, желательно остановиться на таком из них, реализация которого, с одной стороны, требует минимальных вычислительных затрат, а с другой – чтобы такой способ был бы достаточно простым и общим.

Одним из таких приемов получения ХТ  $\alpha'$  и  $\beta'$  могут служить *средние* нескольких чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , приведенные ниже

$$\text{среднеарифметическое} - S_a = \sum_{i=1}^n a_i / n \quad (a_i - \text{действительные}),$$

$$\text{среднегеометрическое} - S_g = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i} \quad (a_i - \text{неотрицательные}),$$

$$\text{среднегармоническое} - S_h = n / \sum_{i=1}^n 1/a_i \quad (a_i - \text{положительные}),$$

$$\text{среднеквадратическое} - S_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 / n} \quad (a_i - \text{действительные}).$$

Действительно, опираясь на известное соотношение

$$S_k \geq S_a \geq S_g \geq S_h, \quad (10)$$

всегда удается использовать среднее для выбора  $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$  или  $(\beta', \alpha') \subset (\beta, \alpha)$ .

Естественно, необходимо учитывать случаи *неподвижных* точек неодноразового процесса усреднения, отрицательность ХТ  $\alpha$  и  $\beta$  и т. п. Однако все это легко учитывается при алгоритмическом разрешении поиска  $X^*$ .

Часть таких способов получения  $\alpha'$  и  $\beta'$  опирается на сугубо геометрические соображения. Так, на рис. 2 очевидны геометрические связи – треугольников  $\Delta\alpha C_1\beta$  или  $\Delta\beta C_1\alpha$ , позволяющие записать *геометрический выбор* (ГВ) новых точек  $\alpha', \beta'$

$$\alpha' = \alpha + (\beta - \alpha) / \left(1 + \frac{\beta - A}{\alpha - A}\right), \quad \beta' = \alpha + (\beta - \alpha) / \left(1 + \frac{\beta - C}{\alpha - C}\right). \quad (11)$$

Должны сразу же оговориться, что хотя возможностей для простого «сужения» интервала  $(\alpha, \beta)$  предостаточно, но в силу того что дуга кривой  $y = f(x)$ , попадая в треугольники  $\Delta\alpha C_1\beta$  или  $\Delta\beta C_1\alpha$ , делит их основания каждый раз по-разному, это может приводить к

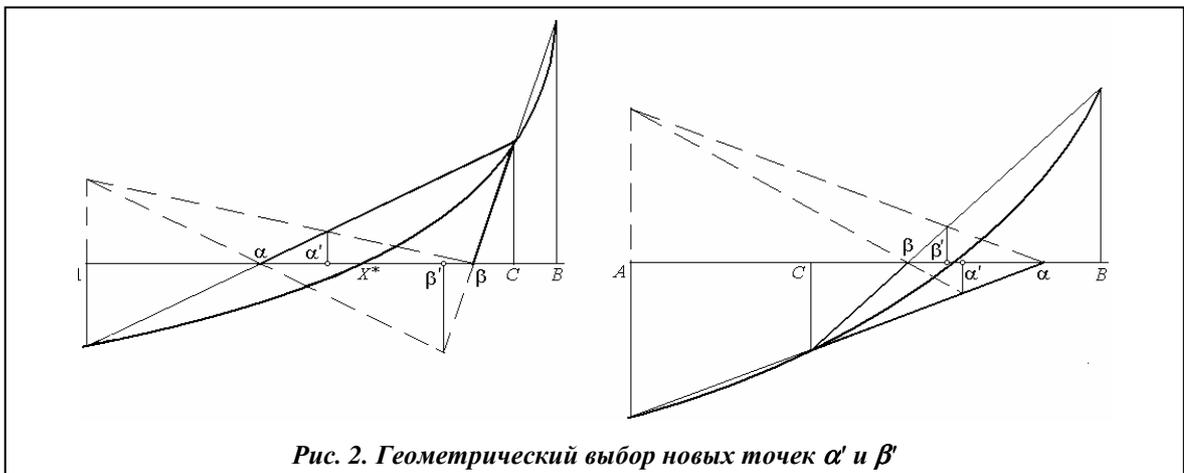


Рис. 2. Геометрический выбор новых точек  $\alpha'$  и  $\beta'$

ряду нарушений условий (9). Отсюда простое сближение  $\alpha$  и  $\beta$ , не учитывающее характера функции  $y = f(x)$ , рано или поздно может оказаться непригодным без специальной корректировки. С этого момента, когда условия (9) нарушены, необходимо менять способ «сужения», если, конечно, поиск уже не завершился, удовлетворив требуемую оценку для остановки процесса, т. е.  $L_n \leq \varepsilon$ .

Например, можно непосредственно сужать окрестность  $(\alpha, \beta)$  до  $(\alpha', \beta')$ , используя простой способ – *управляемый выбор* (УВ), т. е. применяя ПС в виде

$$\alpha' = \alpha (1 - (\beta - \alpha)/(B - A)), \quad \beta' = \beta (1 + (\beta - \alpha)/(B - A)). \quad (12)$$

Формально любую точку  $\bar{X} \in (\alpha, \beta)$  можно использовать для получения суженного интервала  $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ , опираясь на свойства средних, примененных к подынтервалам  $(\alpha, \bar{X})$  и  $(\bar{X}, \beta)$ .

При установлении подынтервала  $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$  (или  $(\beta', \alpha') \subset (\beta, \alpha)$ ) неинформативная вспомогательная точка  $\bar{X}$ , полученная каким-либо трехточечным методом из принятого семейства методов  $\{M\}$  (табл. 1), может служить точкой  $\bar{X}$ . Это особенно оправдано при решении задачи (1), когда в семействе  $\{M\}$  имеется вообще только один метод. Поскольку предполагается, что итерационная последовательность  $\{X\}$  конкретного метода из  $\{M\}$  сходится к решению, то точки, например, в виде тех или иных средних  $\alpha' = S(\alpha, \bar{X})$ ,  $\beta' = S(\beta, \bar{X})$ , могут рассматриваться одной из ПС, способствующей попаданию приближения  $X$  в меньшую окрестность корня  $X^*$ . Такой *управляемый методом* (УМ) способ укорачивает длину нового интервала  $(\alpha', \beta')$  в сравнении со старым  $(\alpha, \beta)$ , естественно, при фиксированном наборе  $A, B, C$ .

Поскольку на первых этапах расстояния  $|\bar{X} - \alpha|$  и  $|\bar{X} - \beta|$  относительно велики, как и грубая точность самого значения  $\bar{X}$ , то можно руководствоваться приведенными выше положениями а), б), в).

Отметим, что в силу особенностей части рассматриваемых здесь методов, а именно, **С2**, **ПД** и **ВОН**, а также **КП** и **КГ**, использование УМ в виде  $\alpha' = S_a(\alpha, \bar{X})$ ,  $\beta' = S_a(\beta, \bar{X})$  не может, к сожалению, в принципе изменить итерационный процесс уточнения корня без специальной корректировки. Это связано с тем, что, например, те же методы **КП** и **КГ** в определенном смысле *оптимальны*, т. е. их коэффициенты  $1 + (\beta - \alpha)/(B - A)$  и  $1 + (\beta - \alpha)/(B - A)^{-1}$  учитывают уже влияние второй «производной». Вмешательство же ПС с арифметическим средним нарушает эту оптимальность, переводя коэффициенты к виду  $1 + (\beta - \alpha)/2(B - A)$  и  $(1 + (\beta - \alpha)/2(B - A))^{-1}$ . Следует также помнить, что такое нарушение происходит каждый раз при переходе к новому этапу итерации.

Самый простой выход из такого положения – получать вспомогательную точку  $\bar{X}$  для УМ другими методами, отличными от **С2**, **ПД**, **ВОН**, **КП** и **КГ**, или выбирать иной способ взвешивания точек  $\alpha, \bar{X}$  и  $\beta, \bar{X}$ , например,

$$\alpha' = 2S_a(\bar{X}, \alpha)/(2 + (\beta - \alpha)/(B - A)), \quad \beta' = 2S_a(\bar{X}, \beta)/(2 - (\beta - \alpha)/(B - A)). \quad (13)$$

Учитывая обнаруженные нежелательные проявления использования способа типа  $S_a$ , можно также совместить подходы УМ с ГВ и реализовать *сближение* и таким путем:

$$\alpha' = \left( \beta + \bar{X} - (C - \alpha) \frac{\beta - \bar{X}}{C - \bar{X}} \right) / 2, \quad \beta' = \left( \beta + \bar{X} - (C - \beta) \frac{\beta - \bar{X}}{C - \bar{X}} \right) / 2. \quad (14)$$

Представленные формулы (13)–(14) не зависят от позиции вспомогательной точки  $\bar{X}$ , т. е. находится ли она слева или справа от корня  $X^*$ .

На рис. 3 как раз показан один из способов, корректирующий возможное нарушение условий (9) и способствующий устранению нежелательных проявлений в упомянутых выше методах при использовании формул вида  $S_a(\alpha, \bar{X})$ ,  $S_a(\beta, \bar{X})$ . Точки  $\alpha'$  и  $\beta'$  не только оказы-

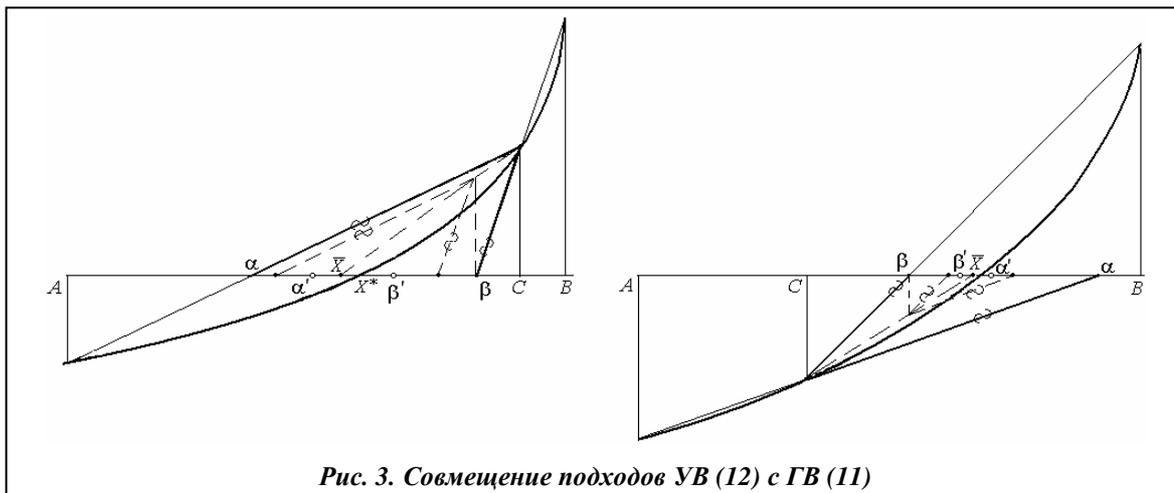


Рис. 3. Совмещение подходов УВ (12) с ГВ (11)

ваются внутри отрезка  $(\alpha, \beta)$  (или  $(\beta, \alpha)$ ), но и по мере сходимости процесса к решению  $X^*$  быстро сужают его окрестность. Устранению подобных нарушений всегда может способствовать учет закономерности (10).

Мы умышленно привели на рис. 1 варианты расположения точки  $C$  относительно корня  $X^*$  и характеристических точек  $\alpha$  и  $\beta$  таким образом, чтобы всегда имело место условие  $(\alpha, \beta) \subset [A, B]$ .

Однако не исключено, что в силу ряда обстоятельств и характера функции  $f(x)$  (например, в зависимости от степени ее выпуклости), одна из точек  $\alpha$  или  $\beta$  может оказаться вне сегмента  $[A, B]$ , тогда для определенности производим необходимую замену, например,  $\alpha' = S_a(\alpha, C)$  или  $\beta' = S_a(\beta, C)$  до попадания ХТ в сегмент  $[A, B]$ . То же относится и к новому суженному интервалу неопределенности с соответствующим выполнением условия  $(\alpha', \beta') \subset (\alpha, \beta)$ .

Учитывая рассматриваемый класс функций  $f(x)$ , критерием завершения процесса поиска  $X^*$  может служить не традиционное выполнение неравенства  $|B - A| \leq \varepsilon$ , а более четкое условие  $|\beta - \alpha| \leq \varepsilon$ . При этом любая неинформативная точка интервала  $(\alpha, \beta)$  (или  $(\beta, \alpha)$ ) может быть объявлена приближенным решением уравнения (1). В связи с этим в показателе эффективности (8) можно считать значение конечной точки решения  $X_N$  равным значению  $(\alpha + \beta)/2$ , полученному в конце поиска.

### Численный эксперимент

Отметим, что оценка предлагаемого подхода может быть произведена не только аналитическими средствами, но и по конечным результатам решения различных задач, с привлечением для этого тестовых примеров с нехарактерными особенностями.

Для выявления возможностей принятой методики и установления ее основных характеристик достаточно просчитать относительно небольшое количество различных тестов.

Однако следует отметить, что приводимые тестовые примеры с исходной, достаточно близкой к решению  $X^*$ , точкой  $X_0$  в качестве начала процесса поиска решения совершенно игнорируют факт получения самой точки  $X_0$  и информацию о вычислительных затратах при этом. Отсюда используемое нами лишь указание области  $D = [A, B]$ , в которой находится решение, считаем более предпочтительным. При таком подходе полнее учитываются затраты для оценки эффективности метода.

Для иллюстрации результатов решения уравнения (1) трехточечными методами (см. табл. 1) и предложенными модификациями с ПС  $\alpha$  и  $\beta$  сначала были рассмотрены простые примеры с модельными функциями из разных классов: *равнонаклоненные*  $f(x) = x^2 - 1$  [4] и *разнонаклоненные*  $f(x) = e^x - 1$  [13]. При этом намеренно приняты достаточно протяженные области  $[0; 10]$  и  $[-1; 9]$ , чтобы показать воздействие *сближения* на итерационный процесс с образующей точкой  $C \in D$ , далекой от решения (см. табл. 2). В качестве ПС принята простая

схема  $\bar{X} = S_a(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha' = 0,5 \cdot S_k(\bar{X}, \alpha)$ ,  $\beta' = 0,5 \cdot S_k(\bar{X}, \beta)$  для всех методов из табл. 1, функционирующая всего один раз. Оказывается этого уже достаточно, чтобы приближение попало в довольно малую окрестность корня  $X^*$ , что позволяет быстро провести итерационный процесс. Здесь критерием останова является  $|\alpha' - \beta'| < 10^{-12}$ .

В табл. 2 приведены результаты решения модельных примеров традиционными методами и их модификациями: показаны количество вычислений  $N$  функции, конечные значения приближения корня  $\tilde{X}$  и критерии эффективности  $E$  (8). Из таблицы видно, что эффективность методов с ПС, как правило, выше, чем у классических методов.

Таблица 2. Сравнение решений уравнения (1) без и с одним сближением ХТ  $\alpha$  и  $\beta$

Метод	RF1	RF1M	C1	C1M	C2	C2M	ПД	ПДМ
Равнонаклоненная функция $f(x) = e^x - 1$ [0; 5; 10] [4]								
$N$	11	9	11	8	10	7	10	7
$\tilde{X}$	1,0 <sub>157</sub>	1,0 <sub>191</sub>	1,0 <sub>154</sub>	0,9 <sub>150</sub>	1,0 <sub>174</sub>	0,9 <sub>146</sub>	1,0 <sub>172</sub>	1,0 <sub>271</sub>
$E$	<b>4,873</b>	<b>7,681</b>	<b>4,864</b>	<b>6,397</b>	<b>6,018</b>	<b>6,919</b>	<b>4,463</b>	<b>9,931</b>
Разнонаклоненная функция $f(x) = e^x - 1$ [-1; 5; 9] [13]								
$N$	649	11	14	10	11	10	9	9
$\tilde{X}$	-0,0 <sub>111</sub>	-0,0 <sub>122</sub>	0,0 <sub>122</sub>	0,0 <sub>143</sub>	0,0 <sub>151</sub>	0,0 <sub>137</sub>	-0,0 <sub>181</sub>	0,0 <sub>298</sub>
$E$	<b>0,067</b>	<b>4,097</b>	<b>3,194</b>	<b>5,046</b>	<b>5,048</b>	<b>4,594</b>	<b>5,137</b>	<b>7,803</b>
Метод	ВН	ВНМ	ВОН	ВОНМ	КП	КПМ	КГ	КГМ
Равнонаклоненная функция $f(x) = x^2 - 1$ [0; 5; 10]								
$N$	10	6	9	7	8	6	8	6
$\tilde{X}$	1,0	1,0 <sub>316</sub>	0,9 <sub>244</sub>	0,9 <sub>272</sub>	1,0 <sub>314</sub>	0,9 <sub>32</sub>	1,0 <sub>32</sub>	0,9 <sub>32</sub>
$E$	<b>7,720</b>	<b>9,112</b>	<b>6,628</b>	<b>9,697</b>	<b>7,174</b>	<b>9,641</b>	<b>8,928</b>	<b>9,641</b>
Разнонаклоненная функция $f(x) = e^x - 1$ [-1; 5; 9]								
$N$	16	11	10	8	13	10	10	10
$\tilde{X}$	0,0 <sub>279</sub>	0,0 <sub>301</sub>	0,0 <sub>251</sub>	-0,0 <sub>181</sub>	0,0 <sub>214</sub>	0,0 <sub>261</sub>	-0,0 <sub>263</sub>	-0,0 <sub>304</sub>
$E$	<b>3,658</b>	<b>6,041</b>	<b>6,391</b>	<b>5,602</b>	<b>3,603</b>	<b>5,823</b>	<b>5,886</b>	<b>6,686</b>

Далее в табл. 3 приведена апробация разработанного подхода на семействе специально подобранных тестовых уравнений, заимствованных из разных источников [1, 3, 4, 8, 9, 11, 12, 14–16]. Поскольку исходные данные для этих примеров задавались в одной стартовой точке  $X_0$ , то для начала предлагаемого решения вводились еще две информативные точки  $A$  и  $B$  таким образом, чтобы на сегменте  $[A, B]$  имела место перемена знака  $f_A f_B < 0$ . Здесь результаты решения примеров из табл. 3 специально основаны на самом простом методе **RF1** (см. табл. 1), тем не менее даже в этом случае проявляется заметное повышение эффективности  $E$  против обычного решения с единственным привлечением ПС на итерации. В качестве ПС для простоты каждый раз использовалась только одна схема:  $\bar{X} = S_a(\alpha, \beta)$ ,  $\alpha' = S_g(\alpha, \bar{X})$ ,  $\beta' = S_g(\beta, \bar{X})$ . Критерием останова принято  $|\beta - \alpha| < 10^{-15}$ .

Для назначения точек  $A, B, C$  к началу поиска корня  $X^*$  применялась стартовая точка  $X_0$  конкретного тестового примера, а две другие выбирались так, чтобы обеспечить одну из конфигураций, представленных на рис. 1. По возможности точка  $C$  принималась равной старту  $X_0$ , а приведение к информативным точкам  $A, B$  осуществлялось несколькими приемами. В частности, задавая точку  $B = C + \delta$ , открывалась возможность получить третью точку  $A$  по двум известным информативным точкам  $C, B$ , например, методом **RF**. Величина  $\delta$  назначалась из расчета, чтобы полученный сегмент  $[A, B]$  удовлетворял условию (2).

Таблица 3. Решение тестовых примеров

$f(x)$	$x^3 - 2x - 5$ [1]		$\sqrt{x^2 + 2x + 5} - 2 \sin x - x^2 + 3$ [9]		$2 - x^2 - \cos(x - 1/3)$ [8]	
$X_0$	2,5		3,9		–	
$[A, B]$	–		–		[0; 2]	
$X^*$	2,094551481542326		2,3319676576558830		1,145437525313947	
$A, C, B$	1; 2,5; 4		0,5; 3,9; 4,5		0; 0,5; 2	
Метод	RF1	RF1M	RF1	RF1M	RF1	RF1M
$N$	10	9	30	8	30	9
$E$	<b>5,983</b>	<b>6,332</b>	<b>1,753</b>	<b>6,534</b>	<b>1,738</b>	<b>5,986</b>
$f(x)$	$(1 + \cos x)(e^x - 2)$ [9]		$\ln x + 1/x - 2$ [9]		$\ln(x^2 + x + 2) - x + 1$ [16]	
$X_0$	0,5		0,25		3	
$[A, B]$	–		–		–	
$X^*$	0,693147180559945		0,317844432899372		4,152590736757158	
$A, C, B$	0; 0,5; 1,5		0,1; 0,25; 0,45		1; 3; 5	
Метод	RF1	RF1M	RF1	RF1M	RF1	RF1M
$N$	9	9	11	10	9	9
$E$	<b>8,293</b>	<b>8,387</b>	<b>5,526</b>	<b>6,312</b>	<b>7,115</b>	<b>7,284</b>
$f(x)$	$x - e^{\sin x} + 1$ [14]		$10xe^{-x^2} - 1$ [15]		$11x^{11} - 1$ [14]	
$X_0$	–		3		–	
$[A, B]$	[1; 4]		–		[0,1; 1]	
$X^*$	1,696812386809751		1,679630610428450		0,804133097503663	
$A, C, B$	1; 2,5; 4		1; 3; 4		0,1; 0,6; 1	
Метод	RF1	RF1M	RF1	RF1M	RF1	RF1M
$N$	35	11	30	10	108	11
$E$	<b>1,476</b>	<b>5,469</b>	<b>1,744</b>	<b>6,720</b>	<b>0,461</b>	<b>5,331</b>

Если исходные данные предлагались в виде области  $[A, B]$ , то третью точку  $C \in [A, B]$  можно задавать, руководствуясь значениями  $f_A$  и  $f_B$ , например, как в случае использования метода **RF**, или, еще проще, опираясь на метод Больцано.

В отличие от предыдущей таблицы, в этой даны: функция  $f(x)$ , стартовая точка  $X_0$  и соответствующая ей тройка информативных точек  $A, C, B$ , полученное приближение к корню  $X^*$  и требуемое для этого количество  $N$  вычислений функции, а также значение критерия эффективности (8) исходного и модифицированного методов.

### Заключение

Численный эксперимент подтвердил ожидание от применения ПС характеристических точек. При этом мы стремились испробовать как можно больше разных способов ПС. Главной особенностью этих экспериментов является иллюстрация повышения критерия эффективности модернизации в сравнении с эффективностью исходных методов.

Выяснилось, что уже первые шаги по реализации сближения ХТ  $\alpha$  и  $\beta$  открывают широкие возможности для построения различных механизмов повышения эффективности рассматриваемых методов. Простой анализ показывает, что, хотя далеко не все возможности при этом исчерпаны, во всех случаях наблюдается устойчивый успех при опробовании тестовых примеров различной природы, заимствованных из различных источников. Обращаем внимание, что в приведенной схеме не требуется получения каких-либо параметров для той или иной аппроксимации функции  $f(x)$ , тем более ее производной. Поэтому предлагаемый подход для проведения одной итерации содержит всего одно вычисление функции, что по-

ложительно сказывается на индексе эффективности (8), а сами приемы «сближения»  $\alpha$  и  $\beta$  просты в реализации.

На самом деле приведенная модификация успешно работает не только с функциями, строго выпуклыми (вогнутыми)  $[A, B]$  в целом, а достаточно, чтобы лишь в окрестности решения  $[\alpha, \beta] \subset [A, B]$  функция  $f(x)$  оказалась выпуклой (см., в частности, тестовый пример  $f(x) = x - e^{\sin x} + 1$ ). Отметим, что принятая схема предлагает такую организацию поиска  $X^*$ , когда алгоритмически легко устраняются какие-либо случаи расходимости решения.

Как мы уже ранее отмечали, проявить свои возможности тот или иной метод  $\{M\}$  сможет лишь при наличии благоприятных обстоятельств, в которых он находится. И наиболее характерным таким обстоятельством является *зона притяжения* к решению, когда ничто не может остановить итерационный процесс получения результата. И чем ближе расположен старт к этой зоне, тем значительней достигаемый эффект. Но одни методы демонстрируют этот эффект, когда их старт уже помещен в достаточно малую окрестность решения, а другие – сами создают условия, обеспечивающие получение такой удобной ситуации.

По нашему мнению, прием сближения, описанный здесь, как раз и позволяет в общем относительно простым методам приобретать способность попадания текущей точки в необходимую окрестность для успешного решения задачи (1). Даже если исходный сегмент содержит не абсолютно идеальный участок поведения функции  $f(x)$ , т.е. не является выпуклым (вогнутым) на всем протяжении области  $[A, B]$ , а только непрерывен (и даже кусочно-непрерывен) в ней, предлагаемый итерационный дискретный процесс рано или поздно обеспечивает необходимые условия для достижения поставленной цели. Введенные операции сближения сказываются на ускорении итерационного процесса и в конечном счете положительно влияют на эффективность поиска корня. Этот подход особенно оправдан в случае серийных трудоемких решений, например, при определении направления осей *оврагов* в задачах нелинейного программирования [2, 7]. По предварительным расчетам установлено, что благодаря предложенной процедуре удается сравнительно просто поднимать эффективность до 5–15% у обычных поисковых средств для получения характерных точек функции.

### Литература

1. *Островский Н. М.* Решение уравнений и систем уравнений / Н. М. Островский. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 220 с.
2. *Беллман Р.* Динамическое программирование / Р. Беллман. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 400 с.
3. *Березин Н. С.* Методы вычислений: В 2-х т. / Н. С. Березин, Н. П. Жидков. – Т. 1. – М.: Наука, 1966. – 632 с.
4. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений / Дж. Трауб. – М.: Мир, 1988. – 440 с.
5. *Салехов Г. С.* О сходимости метода касательных гипербол / Г. С. Салехов // Докл. АН СССР. – 1952. – Т. 84, № 4. – С. 525–528.
6. *Шеннон К.* Работы по теории информации и кибернетике: В 2-х т. / К. Шеннон. – Т. 2. – М.: Изд-во иностр. лит., 1965. – 142 с.
7. *Хемминг Р. Б.* Численные методы для научных работников и инженеров / Р. Б. Хемминг. – М.: Наука, 1968. – 400 с.
8. *Ганшин Г. С.* К теории итерационных процессов / Г. С. Ганшин // Вычисл. и прикл. математика. – Киев: Изд-во Киев. ун-та. – 1973. – № 19. – С. 143–147.
9. *Soleymani F.* New third- and sixth-order derivative-free techniques for nonlinear equations / F. Soleymani, V. Hosseinabadi // J. Math. Research. – 2011. – Vol. 3, № 2. – P. 107–112.
10. *Форсайт Дж.* Машинные методы математических вычислений / Дж. Форсайт, М. Малькольм, К. Моулер. – М.: Мир, 1980. – 280 с.
11. *Загускин В. Л.* Справочник по численным методам решения уравнений / В. Л. Загускин. – М.: Физматгиз, 1960. – 216 с.
12. *Ортега Дж.* Введение в численные методы решения дифференциальных уравнений / Дж. Ортега, У. Пул. – М.: Наука, 1986. – 288 с.
13. *Шелудько Г. А.* Гибридный адаптивный поиск характерных точек кусочно-гладкой функции / Г. А. Шелудько, С. В. Угримов // Пробл. машиностроения. – 1998. – Т. 1. – № 3–4. – С. 166–175.
14. *Chen J.* An exponential regula falsi method for solving nonlinear equations / J. Chen, W. Li // Numerical algorithms. – 2006. – Vol. 41 (4). – P. 327–338.

15. Soleymani F. New derivative-free quasi-secant algorithm for solving non-linear equations / F. Soleymani, M. Shari // World academy of Sci., Eng. and Technology. – 2009. – Vol. 31. – P. 719–721.
16. Thukral R. New family of higher order Steffensen-type methods for solving nonlinear equations / R. Thukral // J. Modern Methods in Numerical Mathematics. – 2012. – Vol. 3, № 1. – P. 1–10.

Поступила в редакцию  
23.04.13

УДК 504.06

**В. В. Соловей**, д-р техн. наук

**Л. И. Зевин**, канд. техн. наук

**В. В. Инкулис**

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail:solovey@ipmach.kharkov.ua)

## **ОЦЕНКИ РИСКОВ ПРИ ЭКСПЛУАТАЦИИ ОБЪЕКТОВ ГАЗОТРАНСПОРТНОЙ ИНФРАСТРУКТУРЫ**

*Рассматривается методика оценки рисков, возникающих при эксплуатации опасных сложных технических объектов, к которым относится газотранспортная система Украины. Для решения проблемы расчета вероятностей аварий в системах, содержащих большое число единиц взаимодействующих элементов, предлагается специализированный объектно-ориентированный подход. Применение этого подхода на практике позволяет ускорить разработку предметного инструментария для определения и анализа рисков с целью повышения техногенно-экологической безопасности газотранспортной системы.*

*Розглядається методика оцінки ризиків, що виникають при експлуатації небезпечних складних технічних об'єктів, до яких належить газотранспортна система України. Для розв'язання проблеми розрахунку імовірностей аварій у системах, що містять велику кількість одиниць взаємодіючих елементів, пропонується спеціалізований об'єктно-орієнтований підхід. Застосування цього підходу на практиці дозволяє прискорити розробку предметного інструментарію для визначення й аналізу ризиків з метою підвищення техногенно-екологічної безпеки газотранспортної системи.*

### **Введение**

В настоящее время важной составляющей общей проблемы управления техногенно-экологической безопасностью больших систем является проблема управления безопасностью особых видов систем, сложных как по разнообразию возможных видов функционирования, так и по разнообразию системообразующих факторов. Они включают определенную территориально ограниченную часть техносферы, в которой природные, социальные и производственные структуры и процессы связаны между собой взаимоподдерживаемыми потоками вещества, энергии и информации. К таким большим системам, в частности, относятся газотранспортные системы (ГТС).

Развитие газотранспортной отрасли привело к формированию специфической производственно-социально-экологической инфраструктуры территориально-промышленных комплексов, для которых характерна концентрация значительных материальных потоков и энергетических ресурсов, обладающих повышенной опасностью для человека и окружающей среды.

Безопасность систем в значительной степени определяется их надежностью, а экономически оправданное обеспечение уровня надежности составляет основную цель функционирования систем управления техническим состоянием и целостностью ГТС. На совре-