

УДК 519.6:533.6

М. Н. Гризун***С. В. Ершов**** , д-р техн. наук

* Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт» (e-mail: masha.grizun@gmail.com)

** Институт проблем машиностроения им. А.Н. Подгорного НАН Украины (г. Харьков, e-mail: yershov@ipmach.kharkov.ua)

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ГАЗА С ПОМОЩЬЮ НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ СХЕМЫ

Для многомерных уравнений Навье-Стокса, описывающих течение вязкого газа, на основе метода Ньютона разработана неявная итерационная разностная схема. Используются явные разностные схемы типа TVD и ENO при аппроксимации пространственных производных потоковых членов и обратная разностная трехточечная формула для приближения производной по времени. Выполнено численное моделирование многомерных течений вязкого газа в решетках турбомашин. Проведен сравнительный анализ вычислительной эффективности неявной итерационной схемы и схемы Бима-Уорминга. Приведено сопоставление полученных результатов с данными других авторов.

Для багатовимірних рівнянь Нав'є-Стокса, що описують течії в'язкого газу, на основі методу Ньютона розроблено неявну ітераційну різницеву схему. Використано явні різницеві схеми типу TVD та ENO при апроксимації просторових похідних потокових членів та оборотна різницева триточкова формула для наближення похідної за часом. Виконано чисельне моделювання багатовимірних течій в'язкого газу в решітках турбомашин. Проведено порівняльний аналіз обчислювальної ефективності неявної ітераційної схеми та схеми Біма-Уормінга. Наведено зіставлення отриманих результатів із даними інших авторів.

Введение

Стремительное развитие вычислительной гидроаэродинамики (CFD – Computational Fluid Dynamics), обусловленное как развитием ее теоретических основ, так и ростом возможностей аппаратных средств и программного обеспечения, позволило наряду с физическими экспериментами проводить вычислительный эксперимент – численное исследование течений жидкости и газа. С каждым годом все большее количество задач гидроаэродинамики как фундаментального, так и прикладного характера оказывается возможным решать CFD методами. Несмотря на интенсивный рост производительности вычислительной техники, существующие численные методы часто характеризуются недостаточной скоростью сходимости: время расчета в зависимости от сложности решаемой задачи может составлять как несколько часов, так и несколько месяцев.

Для повышения вычислительной эффективности численных методов, в первую очередь с точки зрения ускорения сходимости решений, в настоящее время используют неявные схемы аппроксимации уравнений газовой динамики. При этом для приближения пространственных производных исходных уравнений обычно используют разностные формулы построенных на основе метода Годунова [1] явных схем TVD [2], ENO [3], TVD-LSNRAS [4]. К сожалению, скорость сходимости неявных схем для ряда задач также оказывается недостаточной. Схемы переменных направлений, такие, как схема Бима-Уорминга [5] используют приближенные методы линеаризации и факторизации, и это приводит не только к большим погрешностям численных решений, но и к существенному снижению устойчивости при больших шагах по времени, а следовательно, и к замедлению сходимости. Более современные неявные итерационные схемы требуют на каждом шаге по времени проведения большо-

го количества подытераций до полной их сходимости (например, схема Гаусса–Зейделя [6]) или/и трудоемкого процесса обращения многомерной дифференциальной матрицы (например, итерационные схемы на основе метода Ньютона [7]). В связи с вышесказанным разработка быстроходящегося численного метода решения уравнений газовой динамики остается одной из важнейших задач CFD.

Настоящая работа посвящена численному моделированию многомерных течений вязкого газа в решетках турбомашин. В качестве численного метода предложена неявная итерационная разностная схема, построенная на основе метода Ньютона, не требующая, однако, обращения матрицы на каждом шаге. Кроме того, схема лишена погрешностей, вызванных использованием приближенных методов линеаризации или расщепления на каждом временном шаге. Выполнен анализ вычислительной эффективности построенной схемы.

Постановка задачи

Рассматриваются двумерные и трехмерные течения вязкого газа, которые описываются при помощи систем уравнений Навье–Стокса в криволинейной системе координат в консервативной форме

$$\frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j} = 0, \tag{1}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho u_3 \\ \rho e \end{pmatrix}, \quad \hat{F}_j = \hat{F}_j^I - \hat{F}_j^V = |J| \begin{pmatrix} \rho U^j \\ \rho U^j u_1 + \xi_1^j p \\ \rho U^j u_2 + \xi_2^j p \\ \rho U^j u_3 + \xi_3^j p \\ (\rho e + p)U^j \end{pmatrix} - |J| \begin{pmatrix} 0 \\ \xi_i^j \tau_{i1} \\ \xi_i^j \tau_{i2} \\ \xi_i^j \tau_{i3} \\ \xi_i^j \tau_{ik} u_k - \xi_i^j q_i \end{pmatrix},$$

где t – время; Q – вектор консервативных переменных; $|J|$ – якобиан преобразования координат; ρ – плотность; u_i – декартовы компоненты скорости; e – полная энергия единицы массы; p – давление; \hat{F}_j – векторы потоков; $U^j = \xi_i^j u_i$ – контравариантные компоненты вектора скорости;

$\xi_i^j = \frac{\partial \xi^i}{\partial x_j}$ – метрические коэффициенты; τ_{ij} – тензор вязких напряжений; q_i – потоки тепла; индексы i, j, k принимают значения 1, 2, 3, здесь и далее подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Исходная система уравнений (1) дополняется дифференциальной моделью турбулентности $k-\omega$ SST [8] для расчетов турбулентных течений.

Неявная итерационная разностная схема

Построение схемы осуществляется с помощью метода Ньютона [9], который для системы (1) может быть записан в следующей форме:

$$\frac{\partial R(Q^k)}{\partial Q} (Q^{k+1} - Q^k) = -R(Q^k), \tag{2}$$

где $R(Q) = \frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j}$ – левая часть системы (1); k – номер итерации. Производная в системе (2) вычисляется методом приближенного дифференцирования, после приведения подобной слагаемых формула (2) может быть записана в виде

$$\left(\frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} \right)^{k+1} - \left(\frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} \right)^k + \frac{\partial}{\partial \xi^j} \left((\hat{A}_j)^k \delta Q^{k+1} \right) = - \left(\frac{\partial(|J|Q)}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}_j}{\partial \xi^j} \right)^k, \tag{3}$$

где \hat{A}_j – матрицы Якоби невязких потоковых членов \hat{F}_j^l системы (1); $\delta Q^{k+1} = Q^{k+1} - Q^k$ – приращения газодинамических параметров на одной итерации. Аппроксимация производных по времени осуществляется с помощью обратной разностной формулы [10]. Итерационное равенство (3) интегрируем по объему трехмерной сеточной ячейки, выполним несколько преобразований и получим неявную итерационную разностную схему для системы (1)

$$\left[I + \frac{2}{3} \frac{\Delta t_m}{|J_m|} \frac{\partial}{\partial \xi^j} (\hat{A}_j)_m^{n+1,k} \right] \delta Q_m^{n+1,k+1} = -\Delta Q_m^{n+1,k} + \frac{1}{3} \Delta Q_m^n - \frac{2}{3} \frac{\Delta t_m}{|J_m| \Delta V_m^\xi} \left\{ (\hat{F}^j)_{m+1/2}^{n+1,k} \Delta \xi_{m+1/2}^s \Delta \xi_{m+1/2}^l - (\hat{F}^j)_{m-1/2}^{n+1,k} \Delta \xi_{m-1/2}^s \Delta \xi_{m-1/2}^l \right\} \quad (4)$$

где Δt_m – шаг по времени; ΔV_m^ξ – объем трехмерной ячейки; n – номер временного слоя; $\Delta Q_m^n = Q_m^n - Q_m^{n-1}$ – приращение параметров на одном шаге по времени; $\Delta Q_m^{n+1,k} = Q_m^{n+1,k} - Q_m^n$ – суммарное приращение в итерационном процессе на одном шаге по времени; m – индекс, соответствующий номеру сеточной ячейки; $\Delta \xi_{m\pm 1/2}^j$ – длины сторон сеточной ячейки; $m \pm 1/2$ – номер середины стороны сеточной ячейки по соответствующему сеточному направлению; $s, l \neq j$, по j – суммирование.

Разработанная неявная схема (4) на первой итерации совпадает с широкоизвестной классической схемой переменных направлений Бима–Уорминга, обладающей вторым порядком по пространству, что дает возможность не добиваться полной сходимости итерационного процесса, так как на первой итерации схема имеет требуемый порядок точности. Кроме того, аппроксимация исходных уравнений в правой части (4) не использует приближенные методы линеаризации и факторизации, влияющие на точность численного решения.

Аппроксимация пространственных производных в правой части разностной схемы (4) в настоящей работе выполняется с помощью TVD и ENO схем. Потоковые слагаемые определяются на стороне сеточной ячейки по каждому из направлений с помощью решения задачи одномерного распада разрыва [1]

$$(\hat{F}_j^l)_{m\pm 1/2}^{n+1,k} = H(Q_{m\pm 1/2}^-, Q_{m\pm 1/2}^+),$$

где $Q_{m\pm 1/2}^\mp = Q_m \pm \frac{\Delta \xi_m^j}{2} (Q'_m)^\mp$ – начальные условия для задачи одномерного распада разрыва;

$\Delta \xi_m^j$ – величина сеточного шага в соответствующем криволинейном направлении сетки; $(Q'_m)^\mp$ – производные восполнения параметров по пространству внутри сеточной ячейки, способ нахождения которых определяет следующие разностные схемы:

1) TVD схема Годунова–Колгана [2] второго порядка точности

$$(Q'_m)^\mp = \text{mm}(\hat{\Delta} Q_m, \hat{\Delta} Q_{m+1});$$

2) TVD схема с ограничителем ISNAS [4] третьего порядка точности

$$(Q'_m)^\mp = \begin{cases} \hat{\Delta} Q_{(m+1/2)\pm 1/2} \frac{(\hat{\Delta} Q_m)^2 + 3\hat{\Delta} Q_m \hat{\Delta} Q_{m+1}}{(\hat{\Delta} Q_m + \hat{\Delta} Q_{m+1})^2}, & \hat{\Delta} Q_m \hat{\Delta} Q_{m+1} > 0; \\ 0, & \hat{\Delta} Q_m \hat{\Delta} Q_{m+1} \leq 0; \end{cases}$$

3) ENO схема [3] второго порядка точности

$$(Q'_m)^\mp = \text{mm} \left(\hat{\Delta} Q_m + \frac{1}{2} \text{mm}(\nabla Q_{m-1}, \nabla Q_m), \hat{\Delta} Q_{m+1} - \frac{1}{2} \text{mm}(\nabla Q_m, \nabla Q_{m+1}) \right); \quad (5)$$

где $\text{mm}(a, b) = \text{minmod}(a, b) = \begin{cases} \text{sgn}(a) \cdot \min(|a|, |b|), & a \cdot b > 0 \\ 0, & a \cdot b \leq 0 \end{cases}; \quad \hat{\Delta}Q_m = \frac{Q_m - Q_{m-1}}{\frac{1}{2}(\Delta\xi_m^j + \Delta\xi_{m-1}^j)};$

$\nabla Q_m = \frac{\Delta\xi_m^j + \Delta\xi_{m-1}^j}{\frac{1}{2}(\Delta\xi_{m+1}^j + 2\Delta\xi_m^j + \Delta\xi_{m-1}^j)} (\hat{\Delta}Q_{m+1} - \hat{\Delta}Q_m)$ – приращения по пространству.

Потоковые члены \hat{F}_j^V в правой части схемы (4) вычисляются по вязким напряжениям, тепловым потокам и значениям примитивных переменных, определенных с помощью решения задачи одномерного распада разрыва на стороне сеточной ячейки в соответствующем пространственном направлении.

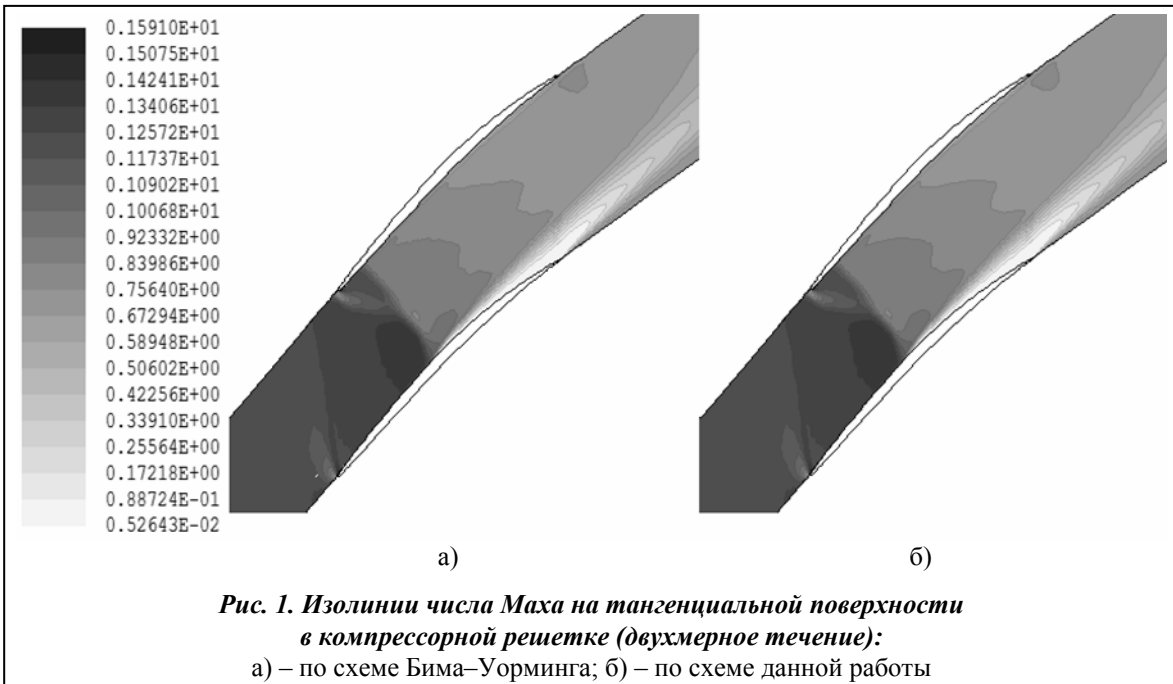
Схемы (4) и известная неявная схема Бима–Уорминга реализованы в CFD-решателе программного комплекса F [11].

Численные результаты

С использованием разработанной неявной итерационной схемы (4) проведены численные эксперименты. Изучались двухмерное и трехмерное течение вязкого газа в компрессорной решетке [12] и трехмерное в турбинной [13]. Данные решетки рассматриваются в проекте TFAST рамочной программы FP7.

На входной границе расчетной области определены параметры торможения: полное давление, полная температура и углы натекания потока, на выходной границе – статическое давление. На границах, которые отделяют между собой межлопаточные каналы, подразумевается выполнение условий периодичности потока. На твердых стенках предполагается справедливость условия прилипания. Расчетная сетка для компрессорной решетки содержала $100 \times 180 = 18000$ и $100 \times 100 \times 180 = 1800000$ ячеек в межлопаточном канале в двухмерном и трехмерном случаях соответственно. Для турбинной решетки использовалась сетка $120 \times 120 \times 220 = 3168000$ ячеек в межлопаточном канале. В рамках данных разбиений рассматривались три уровня вложенности сетки: 1 – грубая, 2 – промежуточная и 3 – мелкая, причем для расчета на 2-м и 3-м уровнях сетки использовались сошедшиеся решения, полученные на 1-м и 2-м уровнях соответственно.

На рис. 1 и 2 приведены изолинии числа Маха на тангенциальной поверхности для двухмерного и трехмерного течения в среднем сечении соответственно в компрессорной





решетке. Расчеты проведены по схеме данной работы (4) и по схеме Бима–Уорминга с явной ENO-аппроксимацией пространственных производных в правой части. С точностью до графиков можно видеть совпадение полученных результатов. Различный характер двухмерного и трехмерного течений в данной решетке, в частности, отличия в структуре скачков на входной кромке и наличие в трехмерном случае замыкающего скачка вблизи выходной кромки связан с интенсивными вторичными течениями, которые не могут быть правильно учтены в двухмерной постановке.

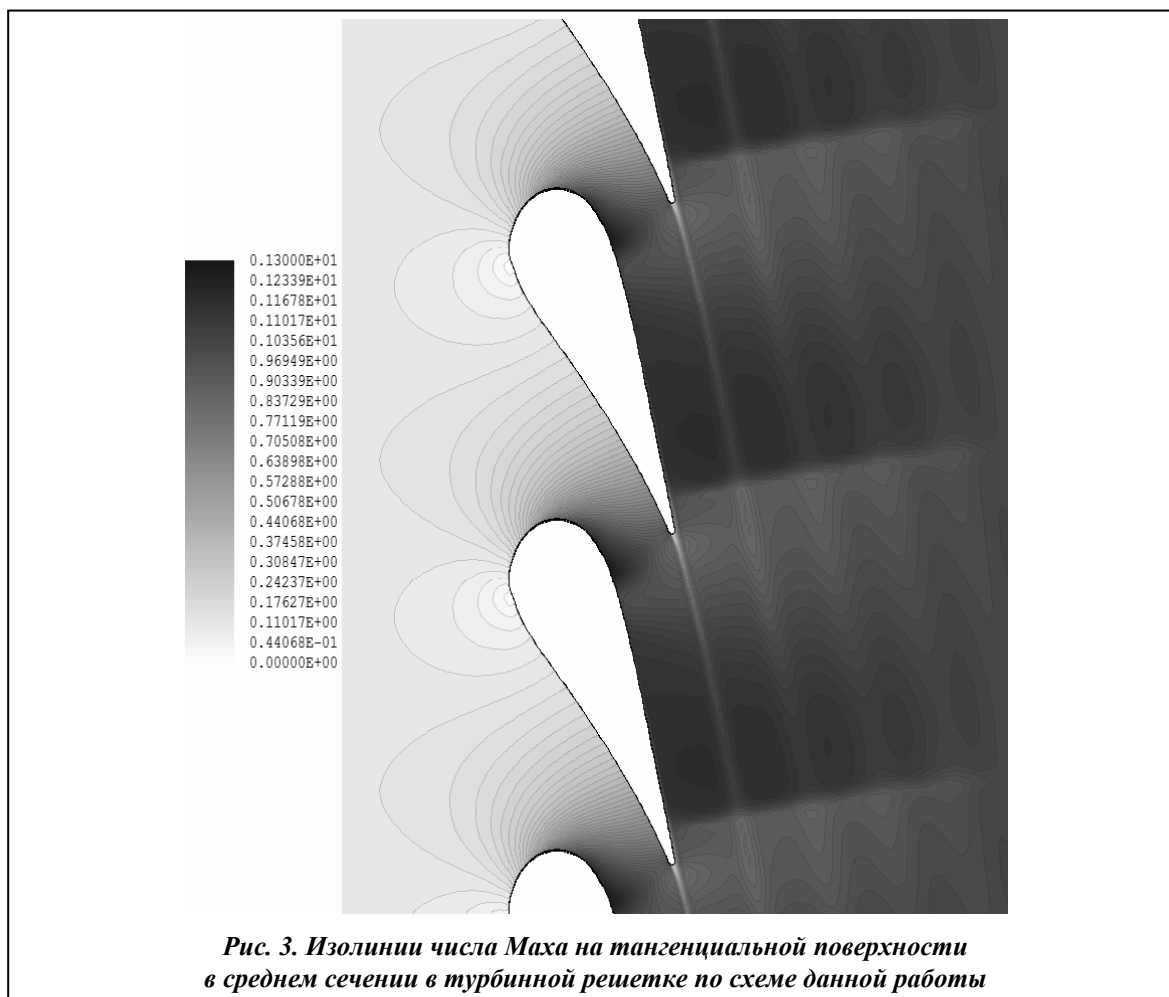
Результаты анализа вычислительной эффективности предложенной схемы для компрессорной решетки даны в табл. 1. Согласно приведенным данным можно утверждать, что для двухмерной задачи предельное число Куранта удалось повысить в 3,5 раза и уменьшить время, необходимое для установления решения на 40% по сравнению с расчетом по схеме Бима–Уорминга. Для трехмерной задачи число Куранта в среднем увеличилось в 3 раза, а время расчета можно снизить на 50% процентов для первого уровня сетки, на 44% – для второго и на 25% – для третьего.

Таблица 1. Анализ вычислительной эффективности схемы (4) и схемы Бима–Уорминга в компрессорной решетке

Расчет	Уровень сетки	Схема Бима–Уорминга		Схема данной работы (4)		Приведенное время расчета*
		CFL	шагов по времени	CFL	шагов по времени	
двухмерный	I	2,0	42000	7,0	14000	0,6
	II	8,0	1000	40,0	250	0,5
трехмерный	II	8,0	2500	25,0	700	0,56
	III	5,0	7000	12,0	3000	0,85

* отношение времени расчета по схеме данной работы ко времени расчета по схеме Бима–Уорминга

Проведено также численное моделирование трехмерного течения вязкого газа в турбинной решетке. На рис. 3 показаны изолинии числа Маха на тангенциальной поверхности в среднем сечении по предложенной схеме (4). На рис. 4 приведено распределение адиабатического числа Маха вдоль осевой хорды лопатки в среднем ее сечении в сопоставлении с расчетными данными других авторов [13]. Наблюдается типичный для высоконагруженных направляющих лопаток интенсивный разгон потока на входной кромке стороны разрежения. На этом участке потери небольшие в связи с ламинарным характером течения. В косом срезе



решетки торможение осуществляется в двух скачках уплотнения, первый из которых расположен вблизи горла и приводит к небольшому отрыву потока, а второй – у выходной кромки, течение между скачками происходит с небольшим ускорением. Анализ сходимости решений по схеме данной работы (4) и по классической схеме Бима–Уорминга показал, что для всех уровней сетки предельное число Куранта может быть увеличено в три раза, при этом время, необходимое для установления решения, в среднем уменьшается на 40%.

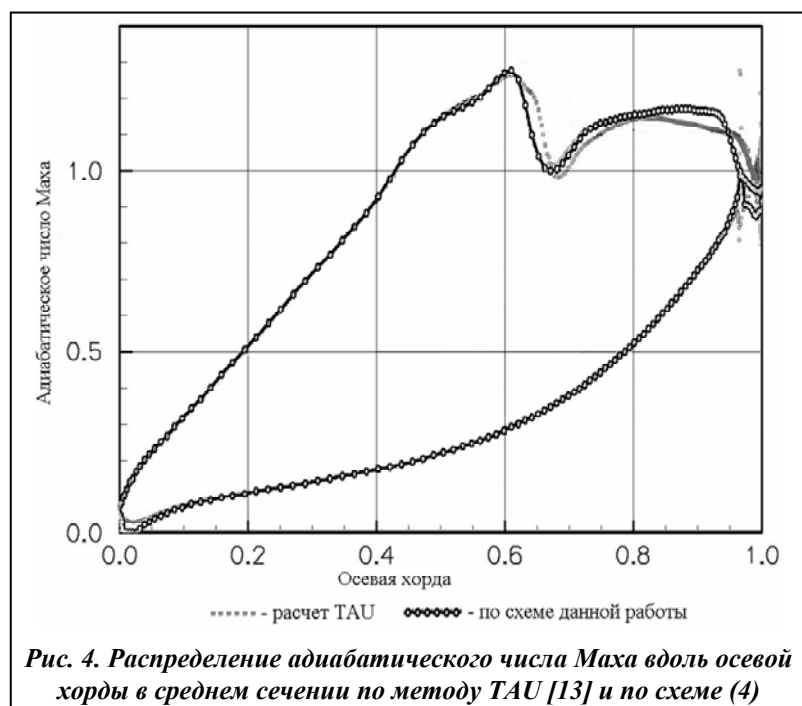
Таблица 2. Анализ вычислительной эффективности схемы (4) и схемы Бима-Уорминга в турбинной решетке

Уровень сетки	Схема Бима–Уорминга		Схема данной работы (4)		Приведенное время расчета*
	CFL	шагов по времени	CFL	шагов по времени	
I	3,0	3500	9,0	1000	0,57
II	3,0	7000	9,0	3000	0,85
III	3,0	15000	9,0	5000	0,66

* отношение времени расчета по схеме данной работы ко времени расчета по схеме Бима–Уорминга

Выводы

В настоящей работе предложена неявная итерационная схема на основе метода Ньютона для решения двухмерных и трехмерных задач газовой динамики, описываемых системой уравнений Навье–Стокса. Разработанная схема на первой итерации совпадает с классической схемой переменных направлений, однако лишена погрешностей, которые возникают вследствие применения на каждом шаге по времени приближенных методов линеаризации



или факторизации и пр. Предложенная схема может аппроксимировать исходные уравнения со вторым порядком по времени и со вторым и выше – по пространству. В ходе численного исследования установлено, что схема данной работы ведет себя устойчиво при больших шагах по времени по сравнению со схемой Бима-Уорминга, а также имеет более высокое быстродействие, в то время как численные решения по обеим схемам практически одинаковые. Наблюдается согласование результатов, полученных по схеме данной работы, с результатами

других авторов.

Литература

1. Годунов С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений гидродинамики / С. К. Годунов // Мат. сб. – 1959. – Т. 47, вып. 3. – С. 276–306.
2. Тилляева Н. И. Исследование возможностей модификации В. П. Колгана численной схемы С. К. Годунова, сохраняющей аппроксимацию на произвольных расчетных сетках / Н. И. Тилляева // Техн. отчет. Центр. ин-т авиационного моторостроения. – 1983. – № 9860, 46 с.
3. Harten A. Uniformly high-order accurate non-oscillatory schemes / A. Harten, S. Osher // SIAM J. Num. Analysis. – 1987. – Vol. 24, № 2. – P. 279–309.
4. Zijlema M. On the construction of a third-order accurate TVD scheme using Leonard's normalized variable diagram with application to turbulent flows in general domains / M. Zijlema // Delft University of Technology: Technical Report DUT-TWI-94-104, 1994. – 25 p.
5. Beam R. M. An implicit factored scheme for the compressible Navier-Stokes equations / R. M. Beam, R. F. Warming // Proc. AIAA 3rd Comput. Fluid Dyn. Conf. – Albuquerque, 1977. – P. 645–649.
6. Jameson A. Transonic flow calculations for air-craft / A. Jameson // Lecture Notes in Mathematics, Numerical Methods in Fluid Dynamics. – Springer Verlag, 1985. – P. 156–242.
7. Mavriplis D. J. An Assessment of Linear Versus Non-linear Multigrid Methods for Unstructured Mesh Solvers / D. J. Mavriplis // NASA CR-2001-210870. ICASE Report. – 2001. – № 2001-12. – 22 p.
8. Menter F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications / F. R. Menter // AIAA J. – 1994. – Vol. 32, № 8. – P. 1598–1605.
9. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов. – М.: Наука, 1973. – 632 с.
10. Yao J. Development and validation of a massively parallel flow solver for turbomachinery flows / J. Yao, A. Jameson, J. J. Alonso, F. Liu // 38th Aerospace Sc. Meeting and Exhibit, January 10–13, 2000. – Reno, NV. – AIAA Paper. – 2000. – № 00-0882. – 23 p.
11. Развитие комплекса программ расчета трехмерных течений вязкого сжимаемого газа в лопаточных аппаратах турбомашин / С. В. Ершов, В. А. Яковлев, А. И. Деревянко и др. // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестн. НТУ «ХПИ»: Сб. науч. тр. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2011. – № 5. – С. 25–32.
12. Opoka M. D 3.2.1 Design of the compressor test cascade / M. Opoka // TFAST FP7 – 2011. – 15 p.
13. Torsten W. D 4.2.1 – Design of the turbine test aerofoil / W. Torsten // TFAST FP7 – 2011. – 14 p.

Поступила в редакцию
01.02.13