

УДК 531

**С. В. Ольшанский\***, канд. физ.-мат. наук**К. В. Аврамов\*\***, д-р. техн. наук\* Национальный технический университет «ХПИ»  
(г. Харьков, e-mail: stasolsh77@gmail.com)\*\* Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины  
(г. Харьков, e-mail: kvavr@kharkov.ua)**МОДЕЛИРОВАНИЕ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ ГОРЯЩЕГО ТОПЛИВА**

*В функциях Бесселя выражен первый интеграл уравнения вертикального движения сферической частицы. Площадь ее убывает пропорционально времени её полёта, при условии, что сила аэродинамического сопротивления пропорциональна второй, а реактивная сила – первой степеням скорости движения частицы как шара с переменными во времени радиусом и массой.*

*В функціях Бесселя виражено перший інтеграл рівняння вертикального руху сферичної частки. Площа її поверхні якої зменшується пропорційно часу її польоту, за умови, що сила аеродинамічного опору пропорційна другій, а реактивна сила – першій степеням швидкості руху частки як шару зі змінними в часі радіусом і масою.*

**Состояние вопроса и актуальность темы**

Изучение особенностей движения сгорающих частиц в воздухе, типа летящих искр, нужно для расчёта пожаробезопасного расположения объектов, обоснованного выбора размеров разделительных полос и пр. С анализом полёта горящих частиц также связано рассмотрение процессов движения распылённых жидких топлив в двигателях внутреннего сгорания [1], в жидкостных реактивных двигателях [2] и т. д. Поэтому задача баллистики сферических частиц, у которых уменьшаются во время полёта размеры и масса, относятся к актуальным задачам, на что в своё время обращал внимание И. В. Мещерский [3]. Часть из задач этого класса рассмотрена в [4], но без учёта возникновения реактивной силы за счёт убывания массы. Поэтому ниже поставлена цель обобщить решения, полученные в [4], путём учёта реактивной силы.

**Постановка и аналитическое решение задачи Коши**

Считая плотность частицы  $\rho$  постоянной, массу тела  $M$  и величину ускоряющей реактивной силы  $F_p$  определим по формулам:

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho r^3, \quad F_p = \mu \frac{dM}{dt} v = 4\pi \rho \mu r^2 v \frac{dr}{dt},$$

в которых  $r = r(t)$  и  $v = v(t)$  – соответственно радиус и скорость вертикального движения частицы, изменяющиеся во времени  $t$ ;  $0 \leq \mu \leq 1$  – коэффициент реактивности (своеобразный КПД), учитывающий, что только часть сгорающей (отделяющейся) массы образует реактивную силу, направленную в сторону движения.

Согласно предположению, площадь поверхности шара убывает пропорционально времени его полёта (закон Срезневского [4]). Поэтому имеют место соотношения

$$r(t) = r_0 \sqrt{1 - \varepsilon t}, \quad \frac{dr}{dt} = -\frac{\varepsilon r_0^2}{2r},$$

где  $r_0 = r(0)$  – начальное значение радиуса;  $\varepsilon > 0$  – параметр, определяющий скорость сгорания частицы.

Полное сгорание её происходит за время  $t = \varepsilon^{-1}$ . Поэтому процесс движения рассматриваем на конечном промежутке времени  $t \in [0; \varepsilon^{-1}]$ .

Силу сопротивления воздушной среды  $F_c$  представляем произведением[4]

$$F_c = k\pi r^2 v^2,$$

в котором  $k$  – коэффициент аэродинамического сопротивления.

Дополнив рассмотренные силы весом и силой инерции, получаем уравнение вертикального движения шара

$$\frac{dv}{dt} - \frac{3}{2}\mu\varepsilon\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 v + \frac{3k}{4\rho r} v^2 = \pm g. \quad (1)$$

В нём  $g$  – ускорение свободного падения; верхний знак “+” перед  $g$  соответствует движению частицы вниз, а нижний “-” – движению вверх.

Перейдём от переменной  $t$  к переменной  $\xi = \sqrt{1 - \varepsilon t}$ . Поскольку

$$r = r_0\xi, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{d\xi} \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2\xi} \frac{dv}{d\xi},$$

уравнение движения (1) принимает вид

$$\frac{dv}{d\xi} + \frac{3\mu}{\xi} v - \alpha_2 v^2 = -q\xi, \quad (2)$$

где  $\alpha_2 = \frac{3k}{2\rho r_0\varepsilon}$ ,  $q = \pm \frac{2g}{\varepsilon}$ ;

Уравнение (2) решаем при начальном условии

$$v(0) = v_0, \quad (3)$$

обозначив через  $v_0$  значение стартовой скорости.

С помощью представления

$$v(\xi) = v_1(\xi) + \frac{3\mu}{2\alpha_2\xi} \quad (4)$$

из (2) получаем уравнение для определения  $v_1(\xi)$

$$\frac{dv_1}{d\xi} - \alpha_2 v_1^2 = -q\xi + \frac{3\mu}{2\alpha_2\xi^2} \left(1 - \frac{3\mu}{2}\right). \quad (5)$$

Выразим неизвестную функцию  $v_1(\xi)$  через вспомогательную функцию  $w(\xi)$  по формуле

$$v_1(\xi) = -\frac{1}{\alpha_2} w^{-1} \frac{dw}{d\xi}. \quad (6)$$

Подставив (6) в (5), приходим к линейному уравнению второго порядка

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \left[ q\alpha_2\xi - \frac{3\mu}{2} \left(1 - \frac{3\mu}{2}\right) \frac{1}{\xi^2} \right] w = 0. \quad (7)$$

Общее решение его зависит от знака  $q$ . Поэтому отдельно рассмотрим случаи движения частицы вниз и вверх.

1. При движении шара вниз  $q > 0$ . В этом случае общим решением (7) является

$$w(\xi) = \eta^{1/3} [c_1 I_\nu(\eta) + c_2 K_\nu(\eta)]. \quad (8)$$

Здесь  $\eta = \beta\xi^{3/2}$ ;  $\beta = \frac{2}{3}\sqrt{q|\alpha_2|}$ ;  $\nu = \frac{1}{3}|3\mu - 1|$ ;  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные;  $I_\nu(\eta), K_\nu(\eta)$  – модифицированная функция Бесселя и Макдональда индекса  $\nu$ .

Продифференцировав решение (8) в соответствии с (6), при учёте (4), получаем формулу скорости падения шара

$$v(\eta) = \frac{3\beta^{2/3}\eta^{1/3}}{2\alpha_2} \left[ \frac{K_{v+1}(\eta) - cI_{v+1}(\eta)}{K_v(\eta) + cI_v(\eta)} - \frac{3(v-\mu)+1}{3\eta} \right]. \quad (9)$$

В ней  $c = c_1c_2^{-1}$  – произвольная постоянная; индекс цилиндрических функций в числителе на единицу больше, чем в знаменателе.

Используя (9) и (3), находим значение постоянной  $c$

$$c = \frac{K_{v+1}(\beta) - v^*K_v(\beta)}{I_{v+1}(\beta) + v^*I_v(\beta)}. \quad (10)$$

Здесь  $v^* = \frac{2\alpha_2v_0}{3\beta} + \frac{3(v-\mu)+1}{3\beta}$ .

Без учёта реактивной силы  $\mu = 0$ ,  $v = 1/3$ . Цилиндрические функции такого индекса можно выразить через функции Эйри, протабулированные в [5]. Именно с помощью функций Эйри представлены решения задач баллистики в работах [4, 6–8], когда радиус частицы уменьшается по закону Срезневского.

Рассмотрим асимптотику решения (9) при  $\eta \rightarrow 0$ . Используя асимптотику цилиндрических функций малого аргумента [5],

$$I_v(\eta) \sim \left(\frac{\eta}{2}\right)^v \frac{1}{\Gamma(v+1)}, \quad K_v\eta \sim \frac{\Gamma(v)}{2} \left(\frac{2}{\eta}\right)^v;$$

где  $v > 0$ ,  $\Gamma(v)$  – функция Эйлера, находим, что

$$v(\eta) \underset{\eta \rightarrow 0}{\sim} \frac{\beta^{2/3}}{2\alpha_2\eta^{2/3}} (3\mu - 1 + 3\mu - 1). \quad (11)$$

Из (11) следует, что при  $\mu < 1/3$   $v(0) = 0$ . Если же  $\mu > 1/3$ , то  $v(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \infty$ . Таким образом, асимптотическое поведение скорости падения частицы при  $t \rightarrow \varepsilon^{-1}$  принципиально зависит от значения  $\mu$ .

2. При движении шара вверх  $q < 0$ . В этом случае общим решением уравнения (7) является

$$w(\xi) = \eta^{1/3} [c_1J_v(\eta) + c_2Y_v(\eta)]. \quad (12)$$

Здесь  $J_v(\eta)$ ,  $Y_v(\eta)$  – функции Бесселя и Неймана индекса  $v$ . Остальные обозначения остаются прежними.

Продифференцировав (12), с учётом (4) и (6), получаем формулу скорости движения частицы вверх

$$v(\eta) = \frac{3\beta^{2/3}\eta^{1/3}}{2\alpha_2} \left[ \frac{Y_{v+1}(\eta) + cJ_{v+1}(\eta)}{Y_v(\eta) + cJ_v(\eta)} - \frac{3(v-\mu)+1}{3\eta} \right]. \quad (13)$$

В ней постоянная  $c$  имеет значение

$$c = \frac{Y_{v+1}(\beta) - v^*Y_v(\beta)}{v^*J_v(\beta) - J_{v+1}(\beta)}, \quad (14)$$

что обеспечивает выполнение начального условия (3).

Решения (13), (14) имеют физический смысл лишь на промежутке  $\eta \in [0; \eta_0]$ , где  $\eta_0$  – корень уравнения  $v(\eta_0) = 0$ . После остановки частицы она начинает двигаться вниз, а скорость падения описывается выражениями (9) и (10), причём  $v_0 = 0$ .

Аппроксимация скорости полёта частицы при малых  $M$  и больших  $v_0$ . В случае большой стартовой скорости частицы малой массы решения (9), (10), (13), (14), по крайней мере, на начальном этапе движения можно аппроксимировать более простыми формулами. В указанных условиях сила гравитации частицы оказывается малой по сравнению с другими силами. Поэтому для получения аппроксимации  $v(\eta)$ , следуя [9], положим в уравнении (2)

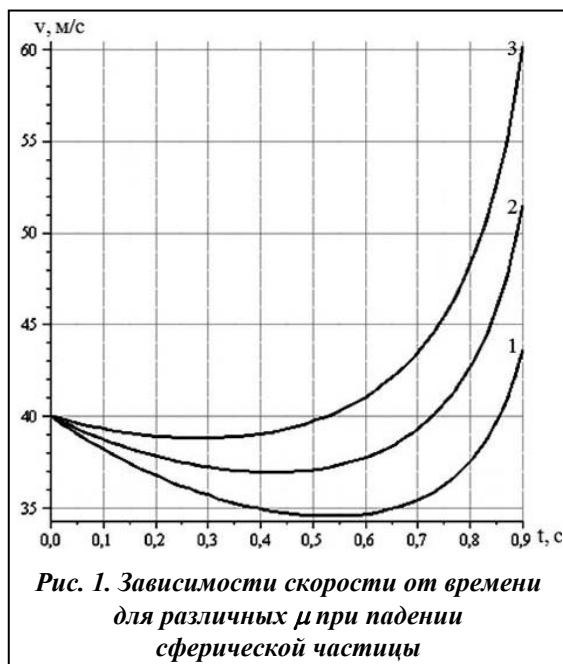


Рис. 1. Зависимости скорости от времени для различных  $\mu$  при падении сферической частицы

Движение шара вниз. Проведём расчёт при  $r_0 = 10^{-2}$  м;  $v_0 = 40$  м/с;  $k = 5 \cdot 10^{-1}$  кг/м<sup>2</sup>/с;  $\varepsilon = 1$  с<sup>-1</sup>;  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup> и различных значениях  $\mu$ .

На рис. 1 цифрами 1, 2, 3 отмечены, рассчитанные по формуле (9) кривые, соответствующие значениям  $\mu = 0,5; 0,6; 0,7$ . Как видно из рис. 1, при увеличении  $\mu$  возрастает влияние реактивной силы, и тело приобретает большую скорость.

Проверим точность асимптотической формулы (11) путём сравнения с точным решением. Для этого примем предыдущие исходные данные и  $\mu = 0,7$ . Результаты такого сравнения представлены на рис. 2. Цифрой 1 обозначена кривая, полученная по приближённой формуле (11), цифрой 2 – решение (9).

Результаты расчётов подтверждают то, что с ростом времени  $v(t)$  стремится к асимптотике (11).

Движение шара вверх. Для расчёта примем прежние исходные данные. На рис. 3 цифрами 1, 2, 3, 4 отмечены рассчитанные по формуле (13) кривые, соответствующие значениям  $\mu = 0; 0,5; 0,6; 0,7$ . Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод, что при  $\mu > 1/3$  скорость движения шара вверх имеет экстремум, как и при падении его вниз.

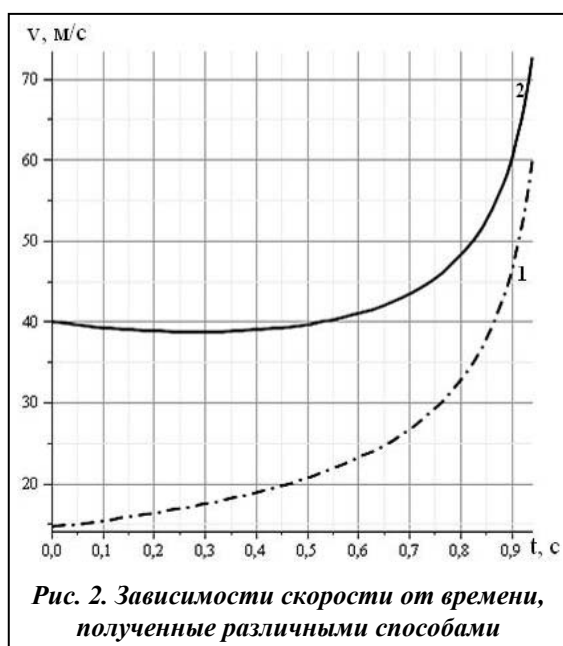


Рис. 2. Зависимости скорости от времени, полученные различными способами

$g = 0$ . Это приводит к уравнению Бернулли

$$\frac{dv}{d\xi} + \frac{3\mu}{\xi}v - \alpha_2 v^2 = 0.$$

Его решение, удовлетворяющее начальному условию (3), имеет вид

$$v_{II}(\eta) = \left[ \frac{\alpha_2(\xi^{3\mu} - \xi)}{1 - 3\mu} + \frac{\xi^{3\mu}}{v_0} \right]^{-1}, \quad (15)$$

когда  $\mu \neq 1/3$ . При  $\mu = 1/3$  появляется неопределённость типа 0/0. Раскрыв её, находим

$$v_{II}(\eta) = \left( \frac{\xi}{v_0} - \alpha_2 \xi \ln \xi \right)^{-1}. \quad (16)$$

Формулы (15) и (16) дают заниженное значение скорости при падении частицы вниз и завышенное значение – при движении частицы вверх.

### Результаты расчётов и их анализ.

Проверим точность асимптотической формулы (15) путём сравнения с точным решением для тела, движущегося вверх. Сохраним предыдущие исходные данные и значение  $\mu = 0,5$ . Результаты такого сравнения представлены на рис. 4. Цифрой 1 обозначена кривая, полученная по приближённой формуле (15), цифрой 2 – решение (13). Расчёты подтверждают, что аппроксимация (15) применима для нахождения скорости лишь на начальном этапе движения.

### Выводы

Введением новой переменной в дифференциальное уравнение движения шара, радиус которого убывает по закону Срезневского, его

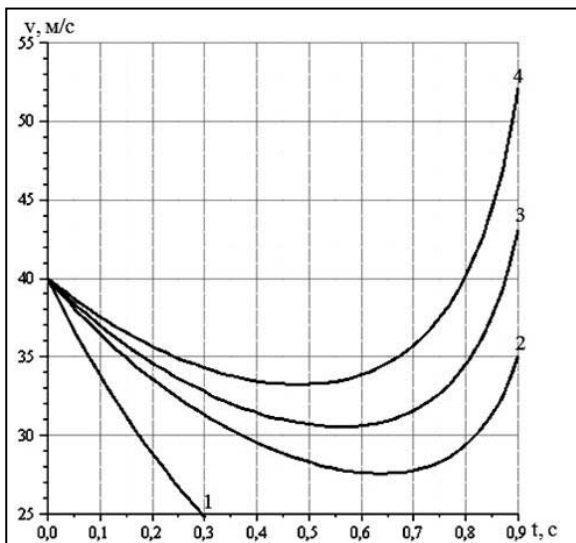


Рис. 3. Зависимости скорости от времени для различных  $\mu$  при движении сферической частицы вверх

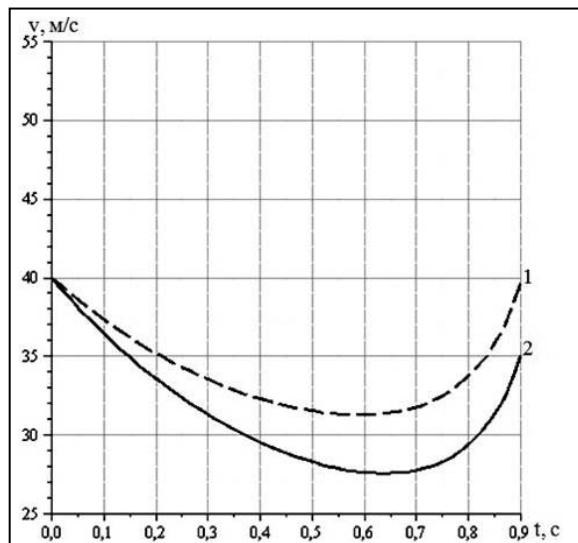


Рис. 4. Зависимости скорости от времени, полученные различными способами

удалось преобразовать в специальное уравнение Риккати, решение которого выражается в функциях Бесселя. Скорость движущегося вверх шара, для принятых значений параметров имеет минимум, обусловленный действием реактивной силы. Без учёта реактивной силы скорость движущейся частицы вверх является монотонно убывающей функцией.

#### Литература

1. *Лышевский А. С.* Распыливание топлива в судовых дизелях / А. С. Лышевский. – Л.: Судостроение, 1971. – 248 с.
2. *Стернин Л. Е.* Основы газодинамики двухфазных потоков в соплах / Л. Е. Стернин. – М.: Машиностроение, 1974. – 211 с.
3. *Мещерский И. В.* Работы по механике тел переменной массы / И. В. Мещерский. – М.: Гос изд-во техн. лит., 1952. – 276 с.
4. *Балістика* крапель, які випаровуються при польоті / С. І. Кучеренко, В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський, Л. М. Тіщенко. – Харків: Харк. нац. техн. ун-т сілськ. госп., 2007. – 304 с.
5. *Абрамовиц А.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) / А. Абрамовиц, И. Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
6. *Ольшанский В. П.* О динамике испаряющейся капли, как материальной точки переменной массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // *Механика и машиностроение*. – 2005. – № 1. – С. 6–12.
7. *Ol'shanskii V. P.* Lower estimate of the flight range of a fire-extinguishing liquid drop / V. P. Ol'shanskii, S. V. Ol'shanskii // *J. Eng. Phys. and Thermophys.* – 2007. – Vol. 80, № 4. – P. 697–701.
8. *Ольшанский В. П.* О максимуме скорости падения сферического тела убывающей массы / В. П. Ольшанский, С. В. Ольшанский // *Механика и машиностроение*. – 2007. – № 1. – С. 25–29.
9. *Севриков В. В.* Автоматические быстродействующие системы пожарной защиты / В. В. Севриков, В. А. Карпенко, И. В. Севриков. – Севастополь: Севастоп. техн. ун-т, 1996. – 260 с.

Поступила в редакцию  
10.10.12