УДК 534.1 :539.3

И. В. Янчевский, канд. техн. наук

Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет
(г. Харьков, e-mail: yanchevsky@khadi.kharkov.ua)

УПРАВЛЕНИЕ КОЛЕБАНИЯМИ ИЗГИБА КРУГЛОГО АСИММЕТРИЧНОГО БИМОРФНОГО ПЬЕЗОПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ С РАЗРЕЗНЫМ ЭЛЕКТРОДОМ

С использованием интегрального преобразования Лапласа решена задача об управлении антисимметричными нестационарными колебаниями изгиба круглой двухслойной пластины типа «металл-пьезокерамика». Управление осуществляется электрическим путем, при этом конфигурация электрического сигнала, обеспечивающая заданное поведение нормали к поверхности пластины в ее центре, подлежит идентификации. Математическая модель записана в рамках теории тонких электроупругих оболочек. Разработанным методом задача сведена к системе интегральных уравнений Вольтерра, решение которой выполнено численно с привлечением регуляризирующего алгоритма Тихонова.

З використанням інтегрального перетворення Лапласа розв'язана задача про керування антисиметричними нестаціонарними коливаннями вигину круглої двошарової пластини типу «метал-п'єзокераміка». Керування здійснюється електричним шляхом, при цьому конфігурація електричного сигналу, яка забезпечує задану поведінку нормалі до поверхні пластини в її центрі, підлягає ідентифікації. Математична модель записана в рамках теорії тонких електропружних оболонок. Розробленим методом задача зведена до системи інтегральних рівнянь Вольтерра, розв'язання якої виконано чисельно із залученням регуляризуючого алгоритму Тихонова.

Введение

Актуальность исследований напряженно-деформированного состояния круглых пластин, содержащих слои из пьезоэлектрически активного материала, обусловлена широкой номенклатурой их практических приложений [1, 2]. Особенно эффективно их использование в устройствах прецизионного позиционирования, системах подавления вибраций, функциональной электронике и других смарт-структурах, в которых за счет подводимого извне электрического сигнала осуществляется целенаправленное управление деформированным состоянием элементов. Поэтому изучение динамического поведения преобразователей упомянутого конструктивного исполнения при различных вариантах закрепления, электродирования и электромеханического нагружения имеет очевидную практическую значимость.

К настоящему времени большая часть результатов теоретических исследований, посвященных проблеме управления колебаниями круглых в плане тонких пьезоэлементов, получена в предположении осесимметрии деформирования. Среди недавних публикаций отметим [3–7]. Вместе с тем большое значение имеют также исследования неосесимметричных деформаций дисковых пьезопреобразователей, возбуждаемые, в частности, за счет неоднородного распределения электрического потенциала, подводимого к сегментированным токопроводящим покрытиям электроупругих слоев. Отметим, что такие пластины находят широкое распространение в адаптивной оптике [8–10].

Целью настоящей работы является разработка метода решения задачи об управлении нестационарными колебаниями изгиба круглой пластины, составленной из электроупругого с разрезным электродом и упругого слоев.

Постановка задачи

Рассматривается преобразователь, состоящий из склеенных между собой упругой (металлической) с толщиной h_m и электроупругой (пьезокерамической) с толщиной h_p круглых пластин радиуса R_0 ($h_m + h_p < R_0$). На поверхностях поляризованного по толщине пьезокерамического слоя нанесены бесконечно тонкие электроды, при этом внутренний электрод является сплошным, а на внешнем имеется один диаметральный разрез. Считается, что начальные условия нулевые, а граничные условия на контуре пластины соответствуют условиям шарнирного закрепления.

Колебания возбуждаются нестационарными электрическими потенциалами $\pm V_0(t)$ (t – время), подводимыми к секциям разрезного токопроводящего покрытия. При этом потенциал на внутреннем электроде равен нулю. Очевидно, что при выбранной геометрии электродирования и схемы распределения электрического потенциала имеют место антисимметричные колебания изгиба.

Постановка задачи заключается в определении конфигурации электрического сигнала $V_0(t)$, который обеспечивает изменение угла поворота нормали к изогнутой поверхности пластины в ее центре относительно начального положения, по заданному закону $f(t)$.

Математическая модель

Упрощенная модель деформирования рассматриваемой асимметричной биморфной пластины строится в рамках обобщенных гипотез Кирхгофа–Лява, позволяющих заменить задачу о колебаниях пластины как трехмерного тела задачей о колебаниях поверхности приведения [5, 8], в плоскости которой разместим координатную поверхность $z = 0$ цилиндрической системы координат. При этом положение плоскости соединения слоев определяется расстоянием

$$z_0 = \frac{c_1^p h_p^2 - c_1^m h_m^2}{2\left(c_1^p h_p + c_1^m h_m\right)}.$$

Здесь $c_1^j = \left[s_{11}^j\left(1 - \nu^2\right)\right]^{-1}$ $(j = m, p)$; s_{11}^j – упругие податливости материалов; ν – коэффициент Пуассона материалов (предполагается, что $\nu_p \approx \nu_m$).

В результате принятых допущений деформированное состояние пластины описывается дифференциальным уравнением

$$\nabla^2 w + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \nabla V, \qquad (1)$$

где $w(r, \theta, t)$ – нормальное перемещение точек поверхности приведения; $V(r, \theta, t) = V_0(t)\cdot\mathrm{sign}(\sin(\theta))$ – функция, описывающая распределение электрического потенциала на сегментированной поверхности; $\nabla = \dfrac{\partial^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2}{\partial \theta^2}$ – оператор Лапласа; r, θ – радиальная и угловая координаты (плоскость $\theta = 0$ совмещена с разрезом токопроводящего покрытия).

Выражения для механических граничных условий также по форме совпадают с классическими граничными условиями при изгибе упругих пластин и в случае шарнирного закрепления имеют вид [5, 8]

$$w\big|_{r=R_0} = 0; \qquad M_r\big|_{r=R_0} = \left.\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} - \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) + V\right)\right|_{r=R_0} = 0. \qquad (2)$$

Отметим, что уравнения (1), (2) записаны в безразмерном виде. Их обезразмеривание было проведено путем деления w, r, h_j $(j = m, p)$ и R_0 на R_0; t – на $\sqrt{R_0^2 \rho_h / D}$; V – на

$-\overline{D}R_0 / e_1 a_{\text{р}}$; изгибающий момент M_r – на $\overline{D}R_0^2$. При этом постоянные вычисляются по формулам

$$\overline{D} = D + \Delta D; \qquad D = c_1^p \, \frac{z_0^3 - \left(z_0 - h_p\right)^3}{3} + c_1^m \, \frac{\left(z_0 + h_m\right)^3 - z_0^3}{3}; \qquad \Delta D = \frac{e_1^2}{\varepsilon_3} \frac{h_p^3}{3}; \qquad a_p = z_0 - \frac{h_p}{2};$$

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_{33}^T - 2 d_{31} e_1; \qquad e_1 = d_{31} c_1^p (1 + \nu); \qquad \rho_h = \rho_p h_p + \rho_m h_m; \qquad \overline{\nu} = (\nu D + \Delta D) / \overline{D},$$

где ρ_j – плотности материалов; d_{31}, ε_{33}^T – пьезомодуль и диэлектрическая проницаемость пьезокерамики при постоянных механических напряжениях.

Уравнение движения (1) и равенства (2) следует дополнить однородными начальными условиями и условием управления, которое ввиду малости деформаций может быть записано следующим образом:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{\substack{r=0 \\ \theta=\pi/2}} = f(t), \tag{3}$$

где $f(t)$ – заданная функция.

Решение задачи

К уравнению (1) применим преобразование Лапласа по временной переменной t с параметром преобразования s. При нулевых начальных условиях изображение функции прогиба w^L представим в виде суммы

$$w^L = \overline{w}^L + \widetilde{w}^L, \tag{4}$$

в котором первое слагаемое, удовлетворяющее однородному дифференциальному уравнению $\nabla^2 \overline{w}^L + s^2 \overline{w}^L = 0$, выражается через цилиндрические функции k-го порядка

$$\overline{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[A_k^{(1)}(s) J_k(\sqrt{is}r) + A_k^{(2)}(s) I_k(\sqrt{is}r) + A_k^{(3)}(s) Y_k(\sqrt{is}r) + A_k^{(4)}(s) K_k(\sqrt{is}r) \right] \sin(k\theta), \tag{5}$$

где $A_k^{(j)}(s)$ – произвольные функции s (j = 1, 2, 3, 4); $i = \sqrt{-1}$.

Частное решение $\widetilde{w}^L$ трансформированного уравнения (1) будем искать в виде ряда по формам собственных колебаний

$$\widetilde{w}^L(r, \theta, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{k,n}^L(s) J_k(\lambda_{k,n} r) \sin(k\theta), \tag{6}$$

в котором $a_{k,n}^L(s)$ – также неизвестные, зависящие от s, функции; $\lambda_{k,n}$ – корни уравнения $J_k(\lambda_{k,n} R_0) = 0$, выстроенные в порядке возрастания.

Составляющую $\overline{w}^L$ (5) с учетом ограниченности перемещений в центре пластины ($r = 0$) и произвольности функций $A_k^{(j)}(s)$ запишем в удобном для последующего построения оригиналов виде

$$\overline{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{s} A_k^{(1)}(s) e^{-i\sqrt{is}r} F_k^{(1)}(r, s) + \frac{1}{s} A_k^{(2)}(s) e^{-\sqrt{is}(R_0 - r)} F_k^{(2)}(r, s) \right] \sin(k\theta), \tag{7}$$

где $F_k^{(1)}(r, s) = i^{k/2} \dfrac{e^{i\sqrt{is}r}}{s^{(k+1)/2}} J_k(\sqrt{is}r)$; $F_k^{(2)}(r, s) = i^{k/2} \dfrac{e^{-\sqrt{is}r}}{s^{(k+1)/2}} I_k(\sqrt{is}r)$.

С использованием изложенных в публикации [11] подходов получены следующие равенства для функций $F_k^{(j)}(r, s)$ (j = 1, 2):

$$\begin{aligned} F_k^{(1)}(r, s) &= i^k \cdot \left(G_k^{(1)L}(r, s) + i \cdot G_k^{(2)L}(r, s) \right), \\ F_k^{(2)}(r, s) &= i^k \cdot \left(G_k^{(1)L}(r, s) - i \cdot G_k^{(2)L}(r, s) \right), \end{aligned} \tag{8}$$

в которых оригиналы $G_k^{(j)L}(r,s)$ ($j = 1, 2$) являются действительными функциями и могут быть записаны в виде степенных рядов

– при больших t

$$G_k^{(1)}(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(k)\frac{r^{4m+k}}{t^{2m+0,5}},$$
$$G_k^{(2)}(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(4m+k+1,5)(4m+k+0,5)}{2m(4m+2k+2)(4m+2k+1)} h_m(k)\frac{r^{4m+k+2}}{t^{2m+1,5}}, \tag{9a}$$

где $h_{m+1}(k) = \dfrac{-h_m(k)(4m+k+3,5)(4m+k+2,5)(4m+k+1,5)(4m+k+0,5)}{2m(2m+1)(4m+2k+4)(4m+2k+3)(4m+2k+2)(4m+2k+1)}$;

$h_0(k) = \dfrac{2^k}{\pi}\cdot\dfrac{\Gamma(k+0,5)}{\Gamma(2k+1)}$; Γ – гамма-функция;

– и при малых t:

$$G_k^{(1)}(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(k)\frac{t^{m/2+k/2-0.25}}{r^{m+0.5}}\cos\left(\frac{\pi}{4}\left(m+k+\frac{1}{2}\right)\right),$$
$$G_k^{(2)}(r,t) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(k)\frac{t^{m/2+k/2-0.25}}{r^{m+0.5}}\sin\left(\frac{\pi}{4}\left(m+k+\frac{1}{2}\right)\right), \tag{9b}$$

где $h_0(k) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\dfrac{1}{\Gamma(k/2+0,75)}$; $h_{m+1}(k) = h_m(k)\cdot\dfrac{m-k+0,5}{m+1}\cdot\dfrac{\Gamma(m/2+k/2+0,75)}{\Gamma(m/2+k/2+0,25)}$.

Принимая во внимание соотношения (8), можно исключить мнимые части в решении (7)

$$\overline{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{s}B_k^{(1)}(r,s)G_k^{(1)L}(r,s) + \frac{1}{s}B_k^{(2)}(r,s)G_k^{(2)L}(r,s)\right]\sin(k\theta), \tag{10}$$

за счет введения новых переменных

$$B_k^{(1)}(r,s) = \left(A_k^{(1)}(s)\cdot e^{-i\sqrt{is}r} + A_k^{(2)}(s)\cdot e^{-\sqrt{is}(R_0-r)}\right)\cdot i^k,$$
$$B_k^{(2)}(r,s) = \left(A_k^{(1)}(s)\cdot e^{-i\sqrt{is}r} - A_k^{(2)}(s)\cdot e^{-\sqrt{is}(R_0-r)}\right)\cdot i^{k+1}. \tag{11}$$

Функции $B_k^{(j)}(r,s)$ ($j = 1, 2$), фигурирующие в (10), с использованием формул Эйлера и Муавра ($e^{\pm i\varphi} = \cos\varphi \pm i\cdot\sin\varphi$; $z^{1/n} = |z|^{1/n}e^{i.\arg(z)/n}$) выразим через граничные значения $B_k^{(j)L}(R_0,s)$

$$\frac{1}{s}B_k^{(1)}(r,s) = B_k^{(1)L}(R_0,s)\Psi_c^L(r,s) + B_k^{(2)L}(R_0,s)\Psi_s^L(r,s),$$
$$\frac{1}{s}B_k^{(2)}(r,s) = B_k^{(2)L}(R_0,s)\Psi_c^L(r,s) - B_k^{(1)L}(R_0,s)\Psi_s^L(r,s),$$

где $\Psi_c^L(r,s) = \dfrac{1}{s}e^{-\alpha\sqrt{s}}\cos(\alpha\sqrt{s})$; $\Psi_s^L(r,s) = \dfrac{1}{s}e^{-\alpha\sqrt{s}}\sin(\alpha\sqrt{s})$; $\alpha(r) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(R_0 - r)$.

В результате последующей перекомпоновки составляющих запись (10) примет вид

$$\overline{w}^L = \sum_{k=1}^{\infty}\left[B_k^{(1)L}(R_0,s)\Psi_k^{(1)L}(r,s) + B_k^{(2)L}(R_0,s)\Psi_k^{(2)L}(r,s)\right]\sin(k\theta), \tag{12}$$

где $\Psi_k^{(1)L}(r,s) = G_k^{(1)L}(r,s)\Psi_c^L(r,s) - G_k^{(2)L}(r,s)\Psi_s^L(r,s)$;

$\Psi_k^{(2)L}(r,s) = G_k^{(1)L}(r,s)\Psi_s^L(r,s) + G_k^{(2)L}(r,s)\Psi_c^L(r,s)$.

В то же время функции $a^L_{k,n}(s)$ решения (6) с использованием свойства ортогональности тригонометрических функций и функции Бесселя несложно выразить через изображение неизвестного электрического напряжения $V_0(t)$

$$a^L_{k,n}(s) = -\lambda^2_{k,n} v_{k,n} \frac{V_0^L(s)}{s^2 + \lambda^4_{k,n}}, \tag{13}$$

в котором $v_{k,n}$ являются коэффициентами разложения электрического потенциала V^L в ряд, аналогичный (6)

$$V^L(r,\theta,s) = V_0^L(s) \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{k,n} J_k(\lambda_{k,n} r) \sin(k\theta); \tag{14}$$

$$v_{k,n} = \frac{2(1-\cos(k\pi))}{k\pi} \frac{2\Psi_{k,n}(R_0)}{J^2_{k+1}(\lambda_{k,n} R_0)}; \qquad \Psi_{k,n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} h_m(k,n) \cdot x^{2m+k+2};$$

$$h_0(k,n) = \frac{\lambda^k_{k,n}}{2^k \cdot (k+2) \cdot \Gamma(k+1)}; \qquad h_{m+1}(k,n) = \frac{-h_m(k,n) \cdot \lambda^2_{k,n} \cdot (2m+k+2)}{2^2 \cdot (m+1)(m+k+1)(2m+k+4)}.$$

Далее на основании обычных правил операционного исчисления осуществляется инверсия по Лапласу равенств (4), (6), (12) и (13)

$$w(r,\theta,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^{2} \int_0^t B_k^{(j)}(R_0,\tau) \Psi_k^{(j)}(r,t-\tau) d\tau + \int_0^t V_0(\tau) \Psi_k^{(3)}(r,t-\tau) d\tau \right] \sin(k\theta). \tag{15}$$

Равенство (15) определяет форму изогнутой поверхности приведения исследуемой биморфной пластины, причем

$$\Psi_k^{(1)}(r,t) = \int_0^t G_k^{(1)}(r,\tau) \Psi_c(r,t-\tau) d\tau - \int_0^t G_k^{(2)}(r,\tau) \Psi_s(r,t-\tau) d\tau;$$

$$\Psi_k^{(2)}(r,t) = \int_0^t G_k^{(1)}(r,\tau) \Psi_s(r,t-\tau) d\tau + \int_0^t G_k^{(2)}(r,\tau) \Psi_c(r,t-\tau) d\tau;$$

$$\Psi_k^{(3)}(r,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} v_{k,n} J_k(\lambda_{k,n} r) \sin(\lambda^2_{k,n} t).$$

Функции $G_k^{(j)}$ ($j = 1, 2$), входящие в ядра $\Psi_k^{(j)}(r,t)$ (15), были описаны ранее (9). Оригиналы Ψ_c^L и Ψ_s^L являются табличными [12]

$$\Psi_c(r,t) = 1 - C\left(\frac{(R_0 - r)^2}{4t}\right) - S\left(\frac{(R_0 - r)^2}{4t}\right); \qquad \Psi_s(r,t) = C\left(\frac{(R_0 - r)^2}{4t}\right) - S\left(\frac{(R_0 - r)^2}{4t}\right);$$

C и S – интегралы Френеля: $C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi$ и $S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi$.

Неизвестные коэффициенты $B_k^{(j)}(R_0,t)$ ($j = 1, 2$) и искомая конфигурация управляющего воздействия $V_0(t)$ определяются из граничных условий (2) и условия управления (3). В результате подстановки формулы для w^L

$$w^L = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{A_k^{(1)L}}{s} \cdot \frac{i^{k/2}}{s^{(k+1)/2}} J_k(\sqrt{is}r) + \frac{A_k^{(2)L}}{s} \cdot \frac{i^{k/2} e^{-\sqrt{is}R_0}}{s^{(k+1)/2}} I_k(\sqrt{is}r) + \sum_{n=1}^{\infty} a^L_{k,n} J_k(\lambda_{k,n} r) \right] \sin(k\theta),$$

записанной на основании (4), (6) и (7), и формулы для V^L (14) в преобразованные по Лапласу равенства (2) и (3) получим следующую систему уравнений в пространстве изображений:

$$
\begin{gathered}
B_k^{(1)L}(R_0,s)G_k^{(1)L}(R_0,s)+B_k^{(2)L}(R_0,s)G_k^{(2)L}(R_0,s)=0;\\
B_k^{(1)L}(R_0,s)\left[G_k^{(2)L}(R_0,s)+\frac{\bar{\nu}-1}{R_0}G_{k+1}^{(2)L}(R_0,s)\right]-B_k^{(2)L}(R_0,s)\left[G_k^{(1)L}(R_0,s)+\frac{\bar{\nu}-1}{R_0}G_{k+1}^{(1)L}(R_0,s)\right]+\\
+\frac{\bar{\nu}-1}{R_0}V_0^L(s)\sum_{n=1}^{\infty}J_{k+1}(\lambda_{k,n}R_0)\frac{\lambda_{k,n}^3\nu_{k,n}}{s^2+\lambda_{k,n}^4}=0;\\
B_1^{(1)L}(R_0,s)\frac{1}{\sqrt{s}}\Psi_c^L(0,s)+B_1^{(2)L}(R_0,s)\frac{1}{\sqrt{s}}\Psi_s^L(0,s)-V_0^L(s)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{1,n}^3\nu_{1,n}}{s^2+\lambda_{1,n}^4}=2f^L(s).
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Отметим, что при составлении системы (16) были учтены соотношения (8), (11), (13) и равенство $\left.\frac{dZ_k(\lambda r)}{dr}\right|_{r=0}=\delta_{1k}\frac{\lambda}{2}$ (Z_k – цилиндрические функции 1-го рода; δ_{1k} – символ Кронекера).

При решении системы (16) в явном виде формулы, определяющие неизвестные трансформанты $B_k^{(j)L}(R_0,s)$ (j = 1, 2) и $V_0^L(s)$, принимают достаточно громоздкий вид, что затрудняет последующий переход в пространство оригиналов. Поэтому здесь производится строгая инверсия этих уравнений и удовлетворение граничным условиям и условию управления осуществляется в пространстве оригиналов. В результате задача сводится к решению системы интегральных уравнений Вольтерра 1-го рода

$$
\begin{gathered}
\sum_{j=1}^{2}\int_0^t B_k^{(j)}(R_0,\tau)G_k^{(j)}(R_0,t-\tau)d\tau=0;\\
\sum_{j=1}^{2}\int_0^t B_k^{(j)}(R_0,\tau)H_k^{(j)}(R_0,t-\tau)d\tau+\int_0^t V_0(\tau)H_k^{(3)}(R_0,t-\tau)d\tau=0;;\\
\sum_{j=1}^{2}\int_0^t B_1^{(j)}(R_0,\tau)S^{(j)}(t-\tau)d\tau+\int_0^t V_0(\tau)S^{(3)}(t-\tau)d\tau=2f(t),
\end{gathered}
\tag{17}
$$

где

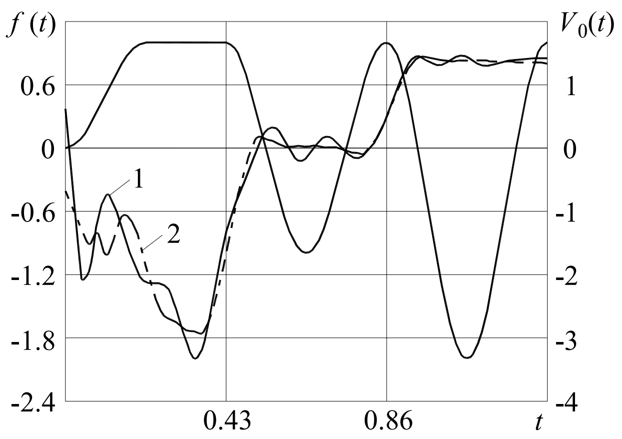
$$
H_k^{(1)}(r,t)=G_k^{(2)}(r,t)+(\bar{\nu}-1)G_{k+1}^{(2)}(r,t)/r;\qquad S^{(1)}(t)=\int_0^t\frac{\Psi_c(0,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau;
$$

$$
H_k^{(2)}(r,t)=-G_k^{(1)}(r,t)-(\bar{\nu}-1)G_{k+1}^{(1)}(r,t)/r;\qquad S^{(2)}(t)=\int_0^t\frac{\Psi_s(0,\tau)}{\sqrt{\pi(t-\tau)}}d\tau;\qquad ;\quad ;
$$

$$
H_k^{(2)}(r,t-\tau)=(\bar{\nu}-1)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{k,n}\nu_{k,n}J_{k+1}(\lambda_{k,n}r)\sin(\lambda_{k,n}^2t)/r;\qquad S^{(3)}(t)=-\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_{1,n}\nu_{1,n}\sin(\lambda_{1,n}^2t).
$$

Система уравнений (17) решалась численно для каждого k = 1, 2, … с привлечением регуляризирующего алгоритма Тихонова с целью построения устойчивых к вычислительным погрешностям и возможной некорректности в задании функции $f(t)$ результатов. Методику реализации алгоритма можно найти, например, в монографии [13]. Отличительной особенностью системы (17) является то, что управляющий сигнал $V_0(t)$ восстанавливается уже на первом этапе (k = 1). Найденные значения $V_0(t)$ используются в дальнейшем для отыскания коэффициентов $B_k^{(j)}(R_0,t)$ (j = 1, 2; $k \geq 2$) из первых двух уравнений системы.

Располагая значениями $B_k^{(j)}(R_0,t)$ $(j=1,2)$ и $V_0(t)$, несложно рассчитать деформации пластины w (15). При численном интегрировании соотношения (15) и входящих в него ядер применялся метод квадратурных формул.



Закон управления f(t) и управляющий электрический сигнал $V_0(t)$

Числовые результаты

Расчеты проводились для биморфной пластины с геометрическими размерами $h_p = 0{,}04$ и $h_m = 0{,}02$ ($R_0 = 1{,}0$) при следующих материальных характеристиках: $\rho_p = 7600$ кг/м^3, $s_{11}^p = 15{,}4\cdot10^{-12}$ м^2/Н, $\nu = 0{,}33$, $d_{31} = -178\cdot10^{-12}$ Кл/Н, $\varepsilon_{33}^T = 15{,}5\cdot10^{-9}$ Ф/м; $\rho_m = 4450$ кг/м^3, $s_{11}^m = 8{,}85\cdot10^{-12}$ м^2/Н (эти значения соответствуют пьезокерамике марки PZT-5 и титановому сплаву ВТ-6).

Изменение во времени функции f (3) задавалось в соответствии с изображенной на рисунке ненумерованной кривой. Кривая 1 на этом рисунке иллюстрирует вычисленную из системы интегральных уравнений (17) конфигурацию электрического нагружения $V_0(t)$, которое обеспечивает выполнение условия управления (3).

Точность расчетов контролировалась варьированием количества удерживаемых членов в рядах и шагом дискретизации временного интервала при использовании квадратурных формул. Параметр регуляризации, входящий в метод Тихонова, находился на основании принципа невязки, при этом относительный уровень невязки принят равным 0,02.

В процессе численных экспериментов установлено, что при выбранной схеме нагружения пластины и варианте ее закрепления слагаемым $\overline{w}$ в решении (4), а следовательно, и определяющими его коэффициентами $B_k^{(j)}(R_0,t)$, в первом приближении, можно пренебречь. И тогда система интегральных уравнений (17) для расчета функции $V_0(t)$ с достаточной степенью точности может быть заменена одним уравнением

$$\int_0^t V_0(\tau)S^{(3)}(t-\tau)d\tau = 2f(t), \qquad (18)$$

ядро и правая часть которого известны.

Приближенное, по методу Тихонова, решение интегрального уравнения (18) изображено на рисунке штриховой кривой 2. Хорошее согласование кривых 1 и 2 позволяет сделать вывод о правомерности такого упрощения.

В заключение отметим, что изложенные подходы могут быть обобщены на случай управления динамическим поведением всей поверхности пластины рассмотренного конструктивного исполнения за счет более сложного секционирования токопроводящего покрытия и определенным образом распределения электрического потенциала для оказания целенаправленного воздействия. Решение аналогичной задачи в статической постановке представлено в работе [8]. Определенный интерес для практических приложений представляют задачи подавления колебаний электроупругой пластины при импульсном неосесимметричном механическом ее нагружении, при решении которых также могут быть использованы полученные в настоящей работе результаты.

Литература

1. *Дідковський В. С.* Електроакустичні п'єзоелектричні перетворювачі (розрахунок, проектування, конструювання) / В. С. Дідковський, О. Г. Лейко, В. Г. Савін. – Кіровоград: Імекс-ЛТД, 2006. – 448 с.

2. *Шарапов В. М.* Пьезокерамические преобразователи физических величин / В. М. Шарапов, М. П. Мусиенко, Е. В. Шарапова. – Черкассы: Черкас. техн. ун-т, 2005. – 631 с.
3. *Карнаухов В. Г.* Демпфирование резонансных изгибных колебаний гибкой шарнирно опертой вязкоупругой круглой пластины при совместном использовании сенсоров и актуаторов / В. Г. Карнаухов, Т. В. Карнаухова // Теорет. и прикл. механика. – 2009. – Вып. 46. – С. 125–131.
4. *Киричок І.* Контроль вимушених коливань круглих в'язкопружних пластинок за допомогою п'єзоелектричних сенсорів та актуаторів з урахуванням вібророзігріву / І. Киричок, Т. Карнаухова // Фіз.-мат. моделювання та інформаційні технології. – 2009. – Вип. 9.– С. 67–78.
5. *Янчевский И. В.* Минимизация прогибов круглой электроупругой биморфной пластины при импульсном нагружении / И. В. Янчевский // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2011. – Вип. 16. – С. 303–313.
6. *Johari J.* Analysis of a bilaminar circular piezoelectric actuator for micropumps / J. Johari, B. Y. Majlis // IEEE Int. Conf. on Semiconductor Electronics, "ICSE '06". – Oct. 29 – Dec. 1, 2006. – P. 106–111.
7. *Sahebnasagh M.* Vibration suppression of circular thin plates with piezoactuators using a wave-absorbing controller / M. Sahebnasagh, M. J. Mahjoob // IEEE Int. Conf. on Mechatronics "ICM '11". – 13–15 Apr. 2011. – P. 690–695.
8. *Ватульян А. О.* Управление поверхностью секционированной биморфной пластины / А. О. Ватульян, Н. Б. Лапицкая // Прикл. механика и техн. физика. – 1995. – Т. 36, № 4. – С. 131–136.
9. *Bergander A.* Development of miniature manipulators for applications in biology and nanotechnologies / A. Bergander, W. Driesen et al. // IEEE/RSJ Int. Conf. on Intelligent Robots and Systems "IROS '03".– Oct. 27–31, 2003. – P. 11–35.
10. *A compact* and quick-response dynamic focusing lens / T. Kaneko, T. Ohmi, N. Ohya, et al. // Sensors and Actuators A. – 1998. – Vol. 70. – P. 92–97.
11. *Янчевский И. В.* Обратное преобразование по Лапласу функций Бесселя вида $e^{-\alpha\sqrt{is}} I_n(\alpha\sqrt{is})$ и $e^{\alpha i\sqrt{is}} J_n(\alpha\sqrt{is})$ / И. В. Янчевский // Вестник Харьк. нац. ун-та. Сер. Математика, прикладная математика и механика. – 2011. – № 967. – С. 42–50.
12. *Диткин В. А.* Справочник по операционному исчислению / В. А. Диткин, А. П. Прудников. – М.: Высш. шк, 1965. – 466 с.
13. *Янютин Е. Г.* Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский. – Харьков: Изд-во Харьк. автомоб.-дор. ин-та, 2001. – 184 с.

Поступила в редакцию
02.02.12