УДК 519.6

О. М. Литвин, д-р. фіз.-мат. наук
О. О. Литвин, канд. фіз.-мат. наук
Л. С. Лобанова, канд. фіз.-мат. наук
О. І. Денисова

Українська інженерно-педагогічна академія
(м. Харків, e-mail: academ_mail@ukr.net)

НАБЛИЖЕННЯ ФУНКЦІЙ ДВОХ ЗМІННИХ ДВОВИМІРНИМИ КУБІЧНИМИ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИМИ СПЛАЙНАМИ НА ТРІАНГУЛЬОВАНІЙ СІТЦІ ВУЗЛІВ

Викладені результати теоретичного і чисельного дослідження переваг побудованих явних формул для інтерполяційних кубічних сплайнів двох змінних на тріангульованій сітці вузлів, запропонованих раніше в роботах Зламала і Женішека. Ці явні формули не вимагають розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь десятого порядку для кожного трикутника тріангуляції окремо, що, на думку авторів даної роботи, сприятиме поширенню їх застосувань в різних розділах обчислювальної математики.

Изложены результаты теоретического и численного исследования преимуществ построенных явных формул для интерполяционных кубических сплайнов двух переменных на тріангулированной сетке узлов, предложенных ранее в работах М. Зламала и А. Женишека. Эти явные формулы не требуют решения системы линейных алгебраических уравнений десятого порядка для каждого треугольника тріангуляции отдельно,что, по мнению авторов данной статьи, будет содействовать расширению их применений в различных разделах вычислительной математики.

Вступ

В роботах [1–25] є повна інформація щодо публікацій з розглядуваного питання (див. також [26]), з якої витікає актуальність задачі побудови інтерполяційних кубічних сплайнів, запропонованих раніше в роботах Зламала і Женішека. Такий метод побудови явних формул для інтерполяції функцій $f(x, y) \in C^1(D)$, $D \subset R^2$ і їх частинних похідних першого порядку у вершинах трикутників тріангуляції запропоновано вперше в працях [27–30]. Зауважимо, що термін «клас $C^1(D)$» у працях [27–30] стосується наближуваної функції $f(x, y)$. Автори вдячні академіку НАН України В. С. Дейнеці за це зауваження. Побудова локальних інтерполяційних сплайнів двох змінних $s(x, y)$ для наближення функцій $f(x, y)$, заданих своїми значеннями та значеннями частинних похідних першого порядку на фіксованій сітці вузлів $P_k(x_k, y_k) \in D \subset R^2$, $k = 1, 2, \ldots, M$, є важливою практичною задачею. Якщо сітка вузлів є регулярною, тобто вузли сітки розміщені в точках $P_{i,j}(x_i, y_j) \in D \subset R^2$, $i = 1, 2, \ldots, m, j = 1, 2, \ldots, n$, то побудова 2D інтерполяційних сплайнів класу $C^1(D)$ може бути виконана у вигляді тензорного добутку базисних сплайнів однієї змінної $B_i(x) \in C^1(R)$, $B_j(y) \in C^1(R)$ степеня $r \geq 2$

$$s(x, y) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{i,j} B_i(x) B_j(y) .$$

У випадку довільного розміщення вузлів інтерполяції $P_k(x_k, y_k) \in D \subset R^2$, $k = 1, 2, \ldots, M$ у заданій обмеженій області D, загальновідомими є такі кусково-поліноміальні інтерполяційні формули:

– кусково-лінійна інтерполяція на тріангульованій області (наближуюча функція є неперервною $s(x, y) \in C(D)$, її графік – багатогранник з гранями – площинами над кожним трикутником розбиття; інтерполяційні дані $f(x_k, y_k)$, $k = 1, 2, \ldots, M$ задаються лише у точках – вершинах трикутників);
– кусково-поліноміальні формули інтерполяції у вузлах тріангуляції в математичній літературі відомі під назвою «формули інтерполяції зламаловського типу»;
– кусково-квадратична інтерполяція на тріангульованій області (наближуюча функція $s(x, y)$ на кожному з трикутників розбиття є поліномом другого степеня, коефіцієнти якого знаходяться з умови, щоб $s(x, y)$ була неперервною $s(x, y) \in C(D)$ та інтерполювала $f(x, y)$ у вершинах трикутників і у серединах сторін цих трикутників) .

Цей метод у працях В. Г. Корнеєва [26] узагальнено на випадок побудови функцій $s(x, y) \in C(D)$, які є поліномами степеня r, $r \geq 2$ у кожному з трикутників розбиття області D на трикутники, та $s(x, y)$ інтерполює функцію $f(x, y)$ у вершинах трикутника та у m $(m \geq 1)$ точках кожної з трьох сторін трикутника, розміщених між вершинами цих сторін (у цьому випадку степінь r, $r \geq 2$ полінома повинна бути узгоджена з кількістю коефіцієнтів, потрібних для інтерполювання у $3m + 3$ точках; нагадаємо, що поліном степеня r від двох змінних має $\frac{(r+1)(r+2)}{2!}$ коефіцієнтів, тому для деяких r потрібно використовувати додаткові умови (наприклад, для $r = 3$ число коефіцієнтів дорівнює 10, а умов $3m + 3$ при $m = 2$ – дорівнює 9; у цьому випадку для однозначної інтерполяції потрібно (крім інтерполяції у вершинах трикутника та у двох точках на кожній зі сторін трикутника) ще одну інтерполяційну умову, наприклад, вимагати, щоб $s(x, y)$ інтерполював також значення функції $f(x, y)$ у середній точці трикутника $\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) = \left(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}\right)$.

У роботі Ю. Н. Субботіна [16] запропоновано інший метод побудови кубічного інтерполяційного сплайна, згідно з яким сплайн інтерполює функцію і її частинні похідні першого порядку у вершинах трикутників (девять умов) і потрібна додаткова десята умова задається не у центральній точці трикутника, а у середній точці однієї зі сторін трикутника. Ця умова має вигляд рівності нормальної похідної від кубічного інтерполяційного полінома і наближуваної функції $f(x, y)$. Такий сплайн має високу точність. Але варто відмітити, що у зв'язку з тим, що сторони трикутників нерівноправні, при чисельній реалізації необхідний, крім переліку вершин тріангуляції, додатковий список пар вершин тріангуляції, між якими задаються вказані додаткові умови. Критерій такого вибору поки що відсутній.

Нижче (Теорема 1 та формули (1)–(11)) сформульовано проблему в загальному вигляді, а також СЛАР (2)–(11), яку треба розв'язати, щоб побудувати потрібні кубічні поліноми згідно з алгоритмом Зламала–Женішека. Таким чином, в кожному з трикутників тріангуляції потрібно розв'язувати вказану СЛАР. Цей підхід ми назвемо неявним методом побудови кубічних інтерполяційних сплайнів Зламала–Женішека на тріангульованій сітці вузлів.

У роботах [27–28] сформульовано і доведено ряд лем і теорем стосовно побудови явних формул для інтерполяційних кубічних поліномів на трикутнику згідно з працями Зламала і Женішека. В роботах [29–30] запропоновано метод наближеного розв'язання першої крайової задачі для бігармонійного рівняння за допомогою запропонованих інтерполяційних кубічних сплайнів. Але питання про чисельне порівняння ефективності використання сплайнів, заданих явно і неявно (параметри – коефіцієнти яких у кожному трикутнику розбиття знаходяться шляхом розв'язання відповідних СЛАР – див. СЛАР (2)–(11)), при наближенні функцій двох змінних залишається відкритим.

Метою даної роботи є теоретичне і чисельне дослідження переваг побудованих явних формул для інтерполяційних сплайнів двох змінних на тріангульованій сітці вузлів при наближенні функцій $f(x, y)$, які належать до класу $C^1(D)$ і не вимагають розв'язання СЛАР для кожного трикутника тріангуляції окремо, порівняно з цими ж сплайнами Зламала і Женішека [1–5], але без використання явних формул для них.

Основні твердження роботи

Для побудови 2D кубічних інтерполяційних сплайнів для функцій класу $C^1(D)$ на тріангульованій сітці вузлів будемо використовувати твердження такої теореми [5].

Теорема 1. (Женішек). Для кожної функції $f(x, y) \in C^1(D)$, функція $s(x, y)$, яка у кожному трикутнику $T_{ijk} = P_iP_jP_k \subset D$ розбиття області D на трикутники є поліномом третього степеня

$$p_{ijk}(x,y) = a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x + a_{01}^{ijk}y + a_{20}^{ijk}x^2 + a_{11}^{ijk}xy + a_{02}^{ijk}y^2 + a_{30}^{ijk}x^3 + a_{21}^{ijk}x^2y + a_{12}^{ijk}xy^2 + a_{03}^{ijk}y^3 \qquad (1)$$

з властивостями

$$p_{ijk}(x_i,y_i) = f(x_i,y_i) = f_i, \qquad p_{ijk}(x_j,y_j) = f(x_j,y_j) = f_j, \qquad p_{ijk}(x_k,y_k) = f(x_k,y_k) = f_k,$$

$$p_{ijk}^{(1,0)}(x_i,y_i) = f^{(1,0)}(x_i,y_i) = f_i^{(1,0)}, \qquad p_{ijk}^{(1,0)}(x_j,y_j) = f^{(1,0)}(x_j,y_j) = f_j^{(1,0)},$$

$$p_{ijk}^{(1,0)}(x_k,y_k) = f^{(1,0)}(x_k,y_k) = f_k^{(1,0)}, \qquad p_{ijk}^{(0,1)}(x_i,y_i) = f^{(0,1)}(x_i,y_i) = f_i^{(0,1)},$$

$$p_{ijk}^{(0,1)}(x_j,y_j) = f^{(0,1)}(x_j,y_j) = f_j^{(0,1)}, \qquad p_{ijk}^{(0,1)}(x_k,y_k) = f^{(0,1)}(x_k,y_k) = f_k^{(0,1)},$$

$$p_{ijk}(x_{i,j,k},y_{i,j,k}) = p_{ijk}\left(\frac{x_i+x_j+x_k}{3},\frac{y_i+y_j+y_k}{3}\right) = f\left(\frac{x_i+x_j+x_k}{3},\frac{y_i+y_j+y_k}{3}\right) = f_m^{ijk}$$

єдина.

Нижче напишемо відповідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) відносно коефіцієнтів $a_{p,q}^{ijk}, 0 \le p+q \le 3$ полінома $p_{ijk}(x, y)$, що витікає з написаних вище інтерполяційних умов

$$a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x_i + a_{01}^{ijk}y_i + a_{20}^{ijk}x_i^2 + a_{11}^{ijk}x_iy_i + a_{02}^{ijk}y_i^2 + a_{30}^{ijk}x_i^3 + a_{21}^{ijk}x_i^2y_i + a_{12}^{ijk}x_iy_i^2 + a_{03}^{ijk}y_i^3 = f_i, \qquad (2)$$

$$a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x_j + a_{01}^{ijk}y_j + a_{20}^{ijk}x_j^2 + a_{11}^{ijk}x_jy_j + a_{02}^{ijk}y_j^2 + a_{30}^{ijk}x_j^3 + a_{21}^{ijk}x_j^2y_j + a_{12}^{ijk}x_jy_j^2 + a_{03}^{ijk}y_j^3 = f_j, \qquad (3)$$

$$a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x_k + a_{01}^{ijk}y_k + a_{20}^{ijk}x_k^2 + a_{11}^{ijk}x_ky_k + a_{02}^{ijk}y_k^2 + a_{30}^{ijk}x_k^3 + a_{21}^{ijk}x_k^2y_k + a_{12}^{ijk}x_ky_k^2 + a_{03}^{ijk}y_k^3 = f_k, \qquad (4)$$

$$a_{10}^{ijk} + a_{20}^{ijk}2x_i + a_{11}^{ijk}y_i + a_{30}^{ijk}3x_i^2 + a_{21}^{ijk}2x_iy_i + a_{12}^{ijk}y_i^2 = f_i^{(1,0)}, \qquad (5)$$

$$a_{10}^{ijk} + a_{20}^{ijk}2x_j + a_{11}^{ijk}y_j + a_{30}^{ijk}3x_j^2 + a_{21}^{ijk}2x_jy_j + a_{12}^{ijk}y_j^2 = f_j^{(1,0)}, \qquad (6)$$

$$a_{10}^{ijk} + a_{20}^{ijk}2x_k + a_{11}^{ijk}y_k + a_{30}^{ijk}3x_k^2 + a_{21}^{ijk}2x_ky_k + a_{12}^{ijk}y_k^2 = f_k^{(1,0)}, \qquad (7)$$

$$a_{01}^{ijk} + a_{11}^{ijk}x_i + a_{02}^{ijk}2y_i + a_{21}^{ijk}x_i^2 + a_{12}^{ijk}2x_iy_i + a_{03}^{ijk}3y_i^2 = f_i^{(0,1)}, \qquad (8)$$

$$a_{01}^{ijk} + a_{11}^{ijk}x_j + a_{02}^{ijk}2y_j + a_{21}^{ijk}x_j^2 + a_{12}^{ijk}2x_jy_j + a_{03}^{ijk}3y_j^2 = f_j^{(0,1)}, \qquad (9)$$

$$a_{01}^{ijk} + a_{11}^{ijk}x_k + a_{02}^{ijk}2y_k + a_{21}^{ijk}x_k^2 + a_{12}^{ijk}2x_ky_k + a_{03}^{ijk}3y_k^2 = f_k^{(0,1)}, \qquad (10)$$

$$\begin{aligned} &a_{00}^{ijk} + a_{10}^{ijk}x_{i,j,k} + a_{01}^{ijk}y_{i,j,k} + a_{20}^{ijk}x_{i,j,k}^2 + a_{11}^{ijk}x_{i,j,k}y_{i,j,k} + a_{02}^{ijk}y_{i,j,k}^2 + \\ &+ a_{30}^{ijk}x_{i,j,k}^3 + a_{21}^{ijk}x_{i,j,k}^2y_{i,j,k} + a_{12}^{ijk}x_{i,j,k}y_{i,j,k}^2 + a_{03}^{ijk}y_{i,j,k}^3 = f_{i,j,k} = f(x_{i,j,k},y_{i,j,k}), \end{aligned} \qquad (11)$$

Таким чином, для знаходження невідомих a_{ij}, $0 \le i+j \le 3$ потрібно розв'язати СЛАР, яка складається з десяти рівнянь (2)–(11) для кожного трикутника T_{ijk}.

Опускаємо розв'язання написаних вище систем і нижче наведемо конструктивне розв'язання поставленої задачі про побудову зазначених вище поліномів 3-го степеня у кожному трикутнику T_{ijk}, яке не вимагає розв'язання СЛАР [27–28].

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2012, Т. 15, № 2

Введемо до розгляду систему функцій двох змінних $h_{p,q,r}(x, y)$, які вважаємо визначеними лише в трикутнику T_{pqr} з вершинами A_p, A_q, A_r, $p,q,r \in \{1, 2, \ldots, M\}$,

$$w_{p,q}(x,y) = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_p & y_p & 1 \\ x_q & y_q & 1 \end{vmatrix} = (y - y_p)(x_q - x_p) - (y_q - y_p)(x - x_p)$$

$$h_{p,q,r}(x,y) = \frac{w_{p,q}(x,y)}{w_{p,q}(x_{p,q,r}, y_{p,q,r})} \frac{w_{q,r}(x,y)}{w_{q,r}(x_{p,q,r}, y_{p,q,r})} \frac{w_{r,p}(x,y)}{w_{r,p}(x_{p,q,r}, y_{p,q,r})}.$$

Лема 1 [27–28]. Функція $h_{p,q,r}(x, y)$ є поліномом третього степеня від двох змінних з властивостями

$$h_{p,q,r}(x_{p,q,r}, y_{p,q,r}) = 1, \qquad D^{\gamma} h_{p,q,r}(x_i, y_i) = 0, \qquad 0 \le |\gamma| \le 1, \qquad i \in \{p,q,r\},$$

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \qquad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2, \qquad D^{\gamma} = \frac{\partial^{|\gamma|}}{\partial x^{\gamma_1} \partial y^{\gamma_2}}, \qquad D^{0,0} h_{p,q,r} = h_{p,q,r}.$$

Введемо також для $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2$ такі функції:

$$h_{r,\beta}^{p,q}(x,y) = \frac{(x - x_r)^{\beta_1} (y - y_r)^{\beta_2}}{\beta!} w_{p,q}^2(x,y) \left\{ \frac{1}{w_{p,q}^2(x,y)} \right\}_{(x_r, y_r)}^{1-|\beta|}$$

де $$\left\{ \frac{1}{u_{p,q}(x,y)} \right\}_{(x_r,y_r)}^{1-|\beta|} = \sum_{0 \le |\gamma| \le 1-|\beta|} \left(D^{\gamma} \frac{1}{u_{p,q}(x,y)} \right)_{(x_r,y_r)} \frac{(x - x_r)^{\gamma_1} (y - y_r)^{\gamma_2}}{\gamma!}, \qquad \gamma! = \gamma_1! \gamma_2!$$

Лема 2 [27–28]. Функції $h_{r,\beta}^{p,q}(x,y)$ є поліномами третього степеня від двох змінних з властивостями

$$h_{r,\beta}^{p,q}(x_k, y_k) = \delta_{r,k} \delta_{0,|\beta|}; \qquad k, r \in \{p,q,r\},$$

$$D^{\gamma} h_{r,\beta}^{p,q}(x_k, y_k) = \delta_{r,k} \delta_{\gamma_1,\beta_1} \delta_{\gamma_2,\beta_2}, \qquad |\gamma| = 1, \qquad \gamma = (\gamma_1, \gamma_2), \qquad |\gamma| = \gamma_1 + \gamma_2.$$

Теорема 1 [27–28]. Оператор

$$O_{p,q,r} f(x,y) = \sum_{\substack{k \in \{p,q,r\} \\ k \ne p \ne q}} \sum_{0 \le |\beta| \le 1} D^{\beta} f(x,y) \Big|_{(x_k, y_k)} h_{k,\beta}^{p,q}(x,y) + \left(f(x_{p,q,r}, y_{p,q,r}) - z_{p,q,r} \right) h_{p,q,r}(x,y)$$

$$z_{p,q,r} = \sum_{\substack{k \in \{p,q,r\} \\ k \ne p \ne q}} \sum_{0 \le |\beta| \le 1} D^{\beta} f(x,y) \Big|_{(x_k, y_k)} h_{k,\beta}^{p,q}(x_{p,q,r}, y_{p,q,r})$$

ставить у відповідність кожній функції $f(x, y) \in C^1(T_{p,q,r})$ поліном третього степеня від двох змінних з властивостями

$$O_{p,q,r} f(x_{p,q,r}, y_{p,q,r}) = f(x_{p,q,r}, y_{p,q,r}),$$

$$D^{\gamma} O_{p,q,r} f(x,y) \Big|_{(x_i, y_i)} = D^{\gamma} f(x,y) \Big|_{(x_i, y_i)}, \qquad 0 \le |\gamma| \le 1, \qquad i \in \{p,q,r\}.$$

Теорема 2 [27–28]. Оператор

$$Of(x,y) = O_{p,q,r} f(x,y), \qquad (x,y) \in T_{p,q,r} \subset D$$

має властивості

$$Of(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}) = f(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}), \qquad T_{i,j,k} \in D, \qquad D^{\gamma} Of(x_i, y_i) = D^{\gamma} f(x_i, y_i),$$

$$i \in \{1, 2, \ldots, M\}, \qquad 0 \le |\gamma| \le 1.$$

Наслідок. $Of(x,y) = f(x,y) \forall f(x,y) = P_3(x,y) = \sum_{0 \le i+j \le 3} a_{i,j} x^i y^j$.

Теорема 3. Якщо область наближення розбита на N трикутників $A_iA_jA_k$ тріангуляції, то для обчислення функції $S(x, y)$ – кубічного інтерполяційного сплайна, побудованого за методом Зламала–Женішека, потрібно на $Q = \frac{2}{3} 10^3 N$ більше арифметичних операцій, ніж в методі, запропонованому в [27–28] і в даній роботі, який використовує явні формули для інтерполяційних поліномів.

Доведення витікає з того, що для розв'язання системи n лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса потрібно $\frac{2}{3} n^3$ арифметичних операцій. В умовах теореми $n = 10$. Враховуючи, що таку систему треба розв'язувати для кожного трикутника тріангуляції, отримуємо доведення теореми 3.

Авторами створена програма побудови кубічних сплайнів, що інтерполюють функцію та її частинні похідні першого порядку на системі точок, розміщених в точках перетину прямих, паралельних осям координат, та інтерполюють функцію $f(x, y)$ в середніх точках трикутників, катети яких знаходяться на вказаній системі взаємно перпендикулярних прямих, а гіпотенузи з'єднують ці точки.

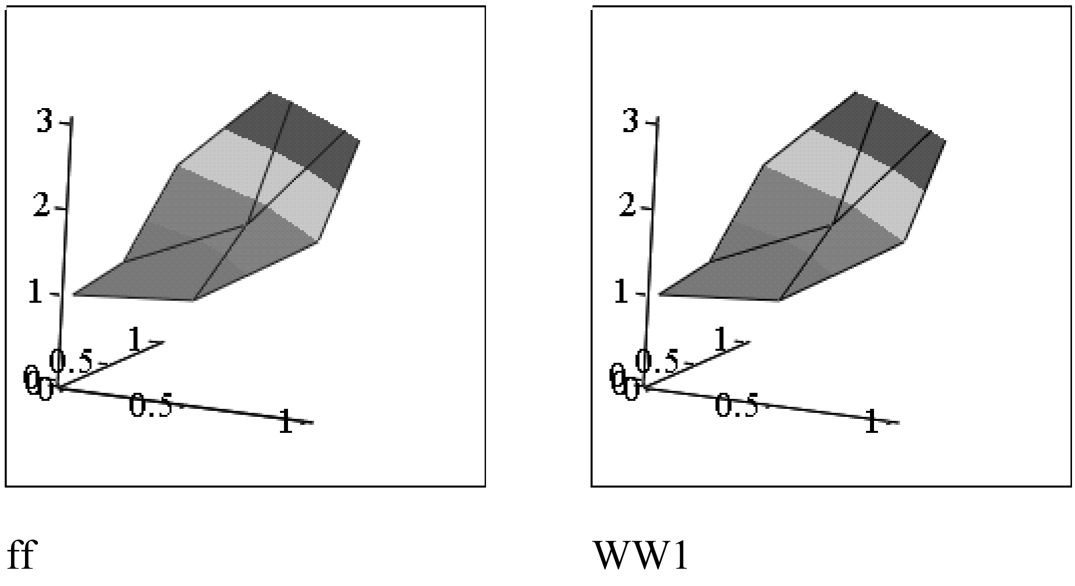
Обчислювальний експеримент

Приклад 1. Для тестування створеної програми і побудованих сплайнів використана функція $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + xy + 1$. Ця функція є поліномом третього степеня і згідно з теорією повинна точно відновлюватися вказаними кубічними сплайнами. Тестування в цьому і в усіх інших прикладах здійснювалося за таким алгоритмом:

– знаходилися різниці $f^{(\beta_1,\beta_2)}(x_k, y_k) - S^{(\beta_1,\beta_2)}(x_k, y_k),\ k = 1,2,\ldots n;\ 0 \le \beta_1 + \beta_2 \le 1;$

– знаходилися різниці $f\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right) - Of\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right)$

– для кожного трикутника розбиття з вершинами $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$; $i, j, k \in \{1,2,...,n\}$;



а) б)

Рис. 1. Графічне зображення:
а) – функції $f(x, y) = x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + xy + 1$
б) – 2D кубічного інтерполяційного сплайна $S(x, y)$

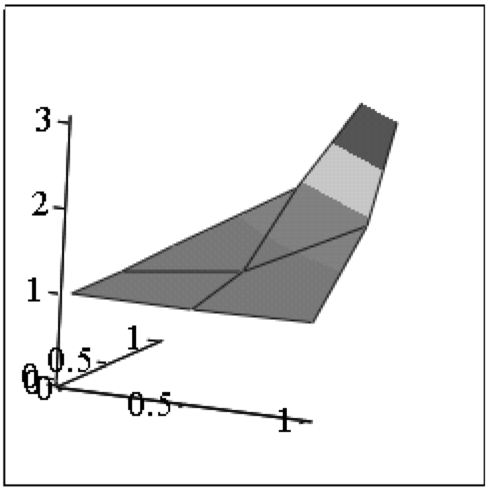
– для заданого Q обчислювалась матриця $B_{i,j} = f\left(\frac{i}{Q}, \frac{j}{Q}\right) - Of\left(\frac{i}{Q}, \frac{j}{Q}\right)$, $i, j = 0,1,\ldots Q$ і потім знаходились max$B$, min$B$. Найбільше з абсолютних величин цих двох чисел є похибкою наближення на вказаній сітці вузлів. Для знаходження похибки у всій області далі обчислювалась ця похибка на сітці вузлів, яка отримується із вказаної при $Q_1 = CQ$. В роботі приймалося $C = 10$. Якщо різниця між цими похибками є достатньо малою, то умовно вважаємо знайдену похибку похибкою у всій області, інакше знову збільшуємо Q і повторюємо описані операції зі знаходження похибки. Результати тестування в прикладі 1 підтвердили теоретичне твердження теорії Зламала і Женішека про те, що вказані сплайни точно відновлюють всі поліноми третього степеня.

Приклад 2. Функція $f(x, y) = \frac{1}{24}(x^4 + y^4) + x^2y^2 + x^3y + xy^3 + 1$ має частинні похідні четвертого порядку по x та по y (не мішані), що дорівнюють одиниці. Для неї при розбитті квадрата [0, 1]×[0, 1] на 12 трикутників точками $x = x_i, y = y_j, x_i = \frac{i}{n}, y_j = \frac{j}{m}, i = 0,1,\ldots n,$ отримана похибка 0,002, а при розбитті при $n = 4$, $m = 6$ похибка наближення склала 0,0001.

Ці похибки мають вигляд $\varepsilon = Q(\Delta^4)$, Δ дорівнює максимальному значенню довжини гіпотенуз трикутників розбиття.

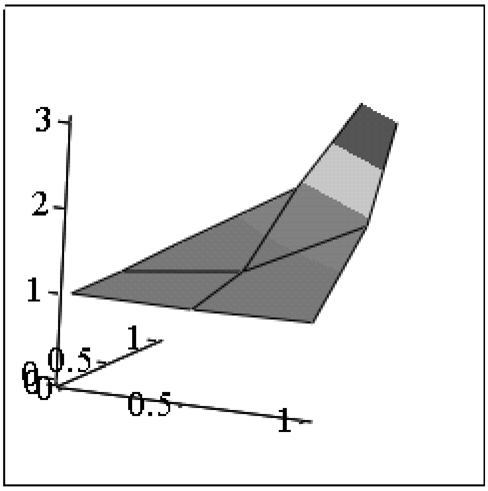
Приклад 3. Розглянуто наближення функції $f(x, y) = 10(x + y)(x + y - 0{,}2)(x + y - 0{,}5)\times$ $\times(x + y - 0{,}8)$, яка має в області розбиття точки перегину, підобласті опуклості та вгнутості. Для неї похибка наближення складає 0,04 при розбитті $x = x_i, y = y_j, x_i = \frac{i}{n}, y_j = \frac{j}{m}$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $j = 0, 1, \ldots, m$, $n = 2$, $m = 3$ та 0,002 при $n = 4$, $m = 6$.

Відмітимо, що отримані за допомогою обчислювального експерименту результати для другого та третього прикладів дали оцінки похибки, наведені в таблиці.



ff

а)



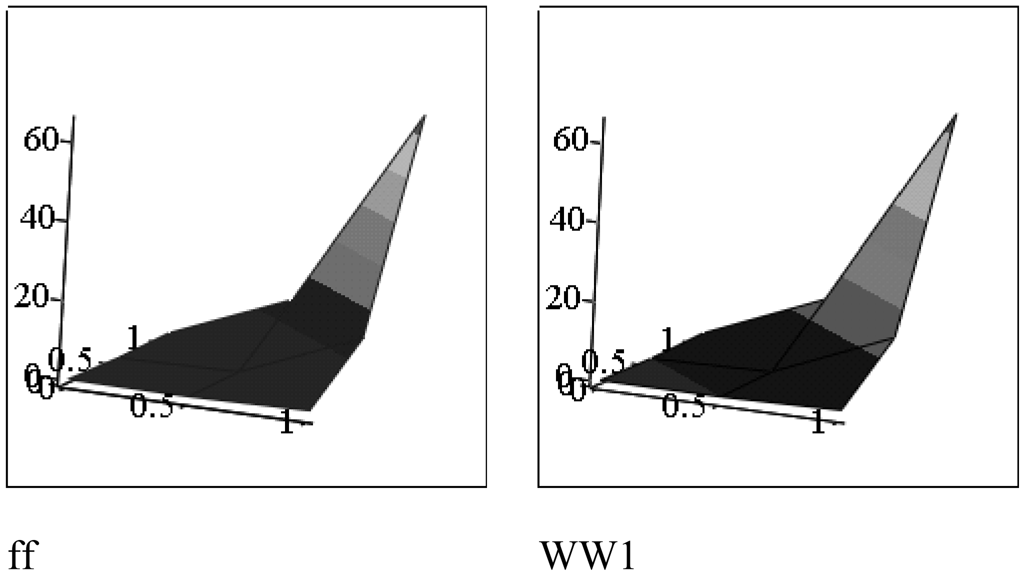
WW1

б)

Рис. 2. Графічне зображення:

а) – функції $f(x, y) = \frac{1}{24}(x^4 + y^4) + x^2y^2 + x^3y + xy^3 + 1$

б) – 2D кубічного інтерполяційного сплайна $S(x, y)$



а) б)

Рис. 3. Графічне зображення:
а) – функції $f(x, y) = 10(x + y)(x + y - 0{,}2)(x + y - 0{,}5)\ (x + y - 0{,}8)$
б) – 2D кубічного інтерполяційного сплайна $S(x, y)$

Похибки наближення поверхонь $z = f(x, y)$ 2D кубічними інтерполяційними сплайнами $S(x, y)$.

$f(x, y)$	m	n	$\varepsilon = \max\limits_{0 \le x, y \le 1} \lvert f(x, y) - S(x, y) \rvert$
$f_2(x, y)$	2	3	0,0018305
$f_2(x, y)$	4	6	0,0001054
$f_2(x, y)$	8	12	0,0000066
$f_3(x, y)$	2	3	0,0390625
$f_3(x, y)$	4	6	0,0022500
$f_3(x, y)$	8	12	0,0001406

Висновки

Таким чином, використання для наближення функцій двох змінних кубічних сплайнів на тріангульованій сітці вузлів, побудованих за методом, що не вимагає розв'язання допоміжних СЛАР, підтвердило високу точність наближення, яка доведена в працях Женішека і Зламала. Крім того, їх використання значно зменшує кількість арифметичних операцій, необхідних для обчислення побудованого кубічного сплайна в заданій системі точок, що не збігається з вузлами сплайна. Це твердження є важливим при розв'язанні крайових задач, зокрема для бігармонійного рівняння. В подальшому автори планують узагальнити запропонований метод на випадок інтерполяції на трикутниках за допомогою поліномів більш високих степенів та дослідити його обчислювальні переваги.

Література

1. *Zlamal M.* On the finite element method / M. Zlamal // Numer. Math. – 1968. – Vol. 12. – P. 394–409.
2. *Zlamal M.* On some finite element procedures for solving second order boundary value problems / M. Zlamal // Numer. Math. – 1969. – Vol. 14. – P. 42–48.
3. *Zlamal M.* A finite element procedure of the second order accuracy / M. Zlamal // Numer. Math. – 1970. – Vol. 14. – P. 394–402.
4. *Zenisek A.* Interpolation polynomials on the triangle / M. Zlamal // Numer. Math. – 1970. – Vol. 15. – P. 283–296.

5. *Zlamal M.* Mathematical aspect of the finite element method / M. Zlamal, Zenisek A. // Technical, physical and mathematical principles of the finite element method (V. Kolar et. al. eds.) Praha: Acad. VED. 1971. – P. 15–39.
6. *Варга Р.* Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе / Р. Варга. – М.: Мир, 1974. – 126 с.
7. *Babushka I.* On the engle condition in the finite element method / I. Babushka, A. K. Aziz // SIAM J. Numer. Anal. – 1976. – Vol. 13, № 2. – P. 214–226.
8. *Bramble J. H.* Triangular elements in the finite element method / J. H. Bramble, M. Zlamal // Math. Comp. – 1970. – Vol. 24. – P. 809–820.
9. *Субботин Ю. Н.* Зависимость оценок аппроксимации интерполяционными полиномами пятой степени от геометрических характеристик треугольника / Ю. Н. Субботин // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 1992. – Т. 2. – С. 110–119.
10. *Субботин Ю. Н.* Многомерная кусочно полиномиальная интерполяция / Ю. Н. Субботин // Методы аппроксимации и интерполяции. – Новосибирск: ВЦН, 1981. – С. 148–153.
11. *Субботин Ю. Н.* Зависимость оценок многомерной кусочно полиномиальной аппроксимации от геометрических характеристик тріангуляции / Ю. Н. Субботин // Тр. МИАН СССР. – 1989. – Т. 189. – С. 117–137.
12. *Baidakova N. V.* On some interpolation process by polynomials of degree 4m+1 on the triangle / N. V. Baidakova // Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling. – 1999. –Vol. 14, № 2. – P. 87–107.
13. *Latypova N. V.* Error estimates fox approximation by polynomials of dagree 4m+1 on the triangle / N. V. Latypova // Proc. Steclov Institute of Math., Suppl. 1. – 2002. – P. 190.
14. *Латыпова Н. В.* Погрешность кусочно-кубической интерполяции на треугольнике / Н. В. Латыпова // Вестн. Удмурт. ун-та. Сер. Математика. – 2003. – С. 3–10.
15. *Zenisek A.* Maximum-angle condition and triangular finite elements of hermite type / A. Zenisek // Math. Comp. – 1995. – Vol. 64, № 211. – P. 929–941.
16. *Субботин Ю. Н.* Новый кубический элемент в МКЭ / Ю. Н. Субботин // Тр. Ин-та математики и механики. Теория функций: Сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – Т. 11, № 2. – С. 120–130.
17. *Байдакова Н. В.* Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике / Н. В Байдакова .// Тр. Ин-та математики и механики. Теории функций: Сб. науч. тр. – Екатеринбург: УрО РАН, 2005. – Т. 11, № 2. – Р. 47–52.
18. *Zenisek A.* Semiregular hermite tetrahedral finite elements / A. Zenisek, J. Hoderova-Zlamalova // Appl. Math. – 2001. – № 4. – P. 295–315.
19. *Субботин Ю. Н.* Исследование свойств монотоности и выпуклости при локальной аппроксимации / Ю. Н. Субботин // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 1993. – Т. 33, № 7. – С. 996–1003.
20. *Куприянова Ю. В.* Об оценке производной по направлению Эрмитова сплайна на треугольнике / Ю. В. Куприянова // Математика. Механика: Сб. науч. тр. – Саратов. – 2006. – Вып. 8. – С. 59–61.
21. *Куприянова Ю. В.* Об оценке производной Эрмитова сплайна на трехмерном симплексе / Ю. В. Куприянова // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратов. зимней шк. – Саратов: Науч. книга, 2006. – 102 с.
22. *Куприянова Ю. В.* Об аппроксимации производных интерполяционного многочлена по направлениям на треугольнике / Ю. В. Куприянова // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Материалы конф. - Воронеж, 2007. – С. 120–121.
23. *Матвеева Ю. В.* Об интерполяции кубическими многочленами третей степени на треугольнике с использванием смешанных производных / Ю. В. Матвеева // Изв. Саратов. ун-та. Новая сер. Сер. математика. Механика. Информатика. – 2007. – Т. 7, Вып. 1. – С. 28–32.
24. *Куприянова Ю. В.* Об одной теореме из теории сплайнов / Ю. В. Куприянова // Журн. вычисл. математики и мат. физики. – 2008. – Т. 48, № 2. – С. 206–211.
25. *Матвеева Ю. В.* Приближение функций многочленами на треугольной сетке: Дис. канд. физ.-мат. наук, Саратов, 2008. – 100 с.
26. *Корнеев В. Г.* Схемы метода конечных элементов высоких порядков точности / В. Г. Корнеев. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1977. – 206 с.
27. *Литвин О. М.* Явні формули для 2D кубічних інтерполяційних сплайнів класу $C^1(D)$ на тріангульованій сітці вузлів / О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. І. Денисова: Зб. тез та доп. XLIV наук.-практ. конф. наук.-педагог. працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії. Ч.4 Харків. – 2011. – С. 9–11.

28. *Литвин О. М.* Побудова 2D кубічних інтерполяційних сплайнів класу $C^1(D)$/ О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. І. Денисова // Вісн. Запоріз. нац. ун-ту. – 2011. – № 1. – С. 66–74.
29. *Литвин О. М.* Про явні схеми МСЕ розв'язання крайових задач з використанням кубічних сплайнів класу $C^1(D)$ на нерегулярній сітці вузлів тріангуляції / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова // Зб. тез доп. XLIV наук.-практ. конф. наук.-пед. працівників, науковців, аспірантів та співробітників академії. – Ч. 4. – Харків, 2011. – С. 13–14.
30. *Литвин О. М.* Про явні схеми МСЕ розв'язання задачі про згин жорстко защемленої пластини з використанням кубічних сплайнів класу $C^1(G)$ на нерегулярній сітці / О. М. Литвин, Л. С. Лобанова // Інформатика та системні науки (ІСН-2011): Матеріали ІІ Всеукр. наук.-практ. конф. 17–19 бер. 2011 р. – Полтава: РВВ ПУЕТ, 2011. – С. 343–346.

Надійшла до редакції
4.07.11