О. М. Литвин, д-р фіз.-мат. наук
О. В. Ярмош, канд. фіз.-мат. наук
Т. І. Чорна

Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків,
e-mail: tanya_chorna@ukr.net

Ключові слова: *оператори сплайн-інтерлінації, оператори сплайн-інтерфлетації, сліди функції, система взаємно перпендикулярних прямих.*

УДК 519.6

МЕТОД СПЛАЙН-ІНТЕРФЛЕТАЦІЇ ПРИ ЗНАХОДЖЕННІ НАЙБІЛЬШОГО (НАЙМЕНШОГО) ЗНАЧЕННЯ ФУНКЦІЇ ТРЬОХ ЗМІННИХ В БАГАТОЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧАХ

Для розв'язання задачі знаходження найбільшого та найменшого значень неперервної функції трьох змінних в замкнутій області $D=[0,1]^3$ *пропонується використовувати оператори сплайн-інтерлінації функції трьох змінних на системі взаємно перпендикулярних прямих, побудовані із застосуванням операторів сплайн–інтерфлетації. Розглянуто приклад. Наведено аналіз результатів обчислювального експерименту.*

Вступ

Вирішення багатьох практичних задач машинобудування, економіки, управління тощо вимагає зменшення часу на їх вирішення, що є особливо важливим при великій кількості чинників, від яких вони залежать. Оскільки більшість цих практичних задач має декілька розв'язків, то мета оптимізації – знаходження найбільшого або найменшого значення серед потенційно можливих. Ця мета може бути досягнена різноманітними методами. Серед них – методи дискретної, недиференційовної та стохастичної оптимізації [1]. У сучасних умовах все більш широко використовуються у математичному моделюванні багатьох галузей і сфер діяльності, зокрема і при розв'язанні крайових задач варіаційними методами в машинобудуванні, методи інтерполяції [2–4]. Та слід відзначити, що при побудові відповідних алгоритмів методів оптимізації досліджуваної функції увага зосереджується лише на її значеннях в окремих точках.

В даній роботі, базуючись на роботах [5–7], пропонується і досліджується метод знаходження найбільшого (найменшого) значень функції трьох змінних, який є точним для функції спеціального вигляду, клас якої дозволяє шляхом вибору кроку інтерлінації з потрібною точністю наблизитись до кожної неперервної функції трьох змінних. При цьому як експериментальні дані використовуються лише сліди від $f(x,y,z)$ на системі взаємно перпендикулярних прямих.

Задача полягає в такому: знайти найбільше або найменше значення неперервної функції трьох змінних $f(x,y,z)$ при обмеженнях $0 \le x, y, z \le 1$ за допомогою сплайн-інтерфлетації та сплайн-інтерлінації.

Авторами вже пропонувався та досліджувався метод знаходження найбільшого та найменшого значення функції двох змінних, який ґрунтується на використанні операторів сплайн-інтерлінації функції на системі взаємно перпендикулярних прямих, що перетинають область задання $D=[0,1]^2$ [8].

В даній роботі вказаний метод узагальнюється на випадок знаходження найбільшого або найменшого значення функції трьох змінних $f(x,y,z)$ в одиничному кубі $(x,y,z)\in[0,1]^3$.

1. Сутність методу сплайн-інтерфлетації

Розіб'ємо область $D=[0,1]^3$ на паралелепіпеди

$$\Pi_{i1,j1,k1}=\{X_{i1-1}\le x\le X_{i1},\, Y_{j1-1}\le y\le Y_{j1},\, Z_{k1-1}\le z\le Z_{k1}\},\ i1=\overline{1,m},\ j1=\overline{1,n},\ k1=\overline{1,p}$$

площинами $x=X_i,\ y=Y_j,\ z=Z_k,\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n},\ k=\overline{0,p}$. В результаті отримаємо $(n+p)$ площин, паралельних осі OX $\Gamma^{(1)}_{j,k}=\{(x,y,z):0\le x\le 1,\ y=Y_j,\ z=Z_k\},\ j=\overline{0,n},\ k=\overline{0,p};$ $(m+p)$ площин, паралельних осі OY $\Gamma^{(2)}_{i,k}=\{(x,y,z): x=X_i,\ 0\le y\le 1,\ z=Z_k\},\ i=\overline{0,m},\ k=\overline{0,p}$; $(m+n)$ площин, паралельних осі OZ $\Gamma^{(3)}_{i,j}=\{(x,y,z): x=X_i,\ y=Y_j,\ 0\le z\le 1\},\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n},$ на яких будемо знаходити мінімум або максимум заданої функції.

Для розв'язання задачі $f(x,y,z)\to \max\limits_{(x,y,z)\in D}$ будемо використовувати метод редукції загальної задачі до послідовності задач наближеного знаходження найбільшого або найменшого значення функції $f(x,y,z)$ на вказаній системі прямих. Тобто

$$f_{j,k}(x)=f(x,Y_j,Z_k)\to \max_{0\le x\le 1},\ j=\overline{0,n},k=\overline{0,p}\ ;\ f_{i,k}(y)=f(X_i,y,Z_k)\to \max_{0\le y\le 1},i=\overline{0,m},k=\overline{0,p}\ ;$$

$$f_{i,j}(z)=f(X_i,Y_j,z)\to \max_{0\le z\le 1},i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n}\ .$$

При цьому вважається, що для розв'язання всіх одновимірних задач оптимізації використовується вбудований стандартний метод в системі комп'ютерної математики (наприклад, *Minimize* або *Maximize* в системі *Mathcad*).

Таким чином, задачу зі знаходження найбільшого або найменшого значення функції трьох змінних в замкнутій області $[0,1]^3$ пропонується розв'язувати зведенням її до системи послідовних задач на знаходження найбільшого (найменшого) значення для функцій від однієї змінної x, y або z.

Метод полягає в такому. Замінюємо функцію $f(x,y,z)$ сплайн-інтерфлетантом $O_{m,n,p}f(x,y,z)$

$$O_{m,n,p}f(x,y,z)=(O_{1,m}+O_{2,n}+O_{3,p}-O_{1,m}O_{2,n}-O_{1,m}O_{3,p}-O_{2,n}O_{3,p}+O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p})f(x,y,z) \tag{1}$$

де

$$O_{1,m}f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,z)\times h(x,X_{i-1},X_i,X_{i+1})\ ; \tag{2}$$

$$O_{2,m}f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{n} f(x,Y_j,z)\times h(y,Y_{j-1},Y_j,Y_{j+1})\ ; \tag{3}$$

$$O_{3,p}f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p} f(x,y,Z_k)\times h(z,Z_{k-1},Z_k,Z_{k+1})\ . \tag{4}$$

якщо

$$h_{1,i}(x)=h(x,X_{i-1},X_i,X_{i+1})=\begin{cases}0,\ \text{якщо}\ x\le X_{i-1},\\ \dfrac{x-X_{i-1}}{X_i-X_{i-1}},\ \text{якщо}\ X_{i-1}<x\le X_i,\\ \dfrac{x-X_{i+1}}{X_i-X_{i+1}},\ \text{якщо}\ X_i<x<X_{i+1},\\ 0,\ \text{якщо}\ x\ge X_{i+1}.\end{cases}$$

Причому

$$X_{-1}=-X_1, Y_{-1}=-Y_1, Z_{-1}=-Z_1, X_{m+1}=1+(1-X_{m-1})=2-X_{m-1}, Y_{n+1}=2-Y_{n-1}, Z_{k+1}=2-Z_{k-1}\ .$$

Аналогічно визначаються $h_{2,j}(y)$ та $h_{3,k}(z)$.

2. Властивості оператора сплайн-інтерфлетації

Властивості оператора сплайн-інтерфлетації характеризує теорема 1.

Теорема 1. Оператор $O_{m,n,p}f(x,y,z)$ є оператором інтерфлетації функції $f(x,y,z)$ із властивостями

$$O_{m,n,p}f(x,y,z)\Big|_{z=Z_{k'}} = f(x,y,Z_{k'}),\ k'=\overline{0,p}\,, \tag{5}$$

$$O_{m,n,p}f(x,y,z)\Big|_{y=Y_{j'}} = f(x,Y_{j'},z),\ j'=\overline{0,n}\,, \tag{6}$$

$$O_{m,n,p}f(x,y,z)\Big|_{x=X_{i'}} = f(X_{i'},y,z),\ i'=\overline{0,m}\,. \tag{7}$$

Доведення. Покладемо у формулі (1) $z=Z_{k'}$. В результаті, враховуючи, що $h(Z_{k'},Z_{k-1},Z_k,Z_{k+1})=\delta_{k,k'}, k=\overline{0,p}, k'=\overline{0,p}$, де $\delta pq=1,\ p=q; \delta pq=0.\ p\neq q$, отримаємо

$$O_{m,n,p}f(x,y,z)\Big|_{z=Z_{k'}} = O_{1,m}f\Big|_{z=Z_{k'}} + O_{2,n}f\Big|_{z=Z_{k'}} + O_{3,p}f\Big|_{z=Z_{k'}} - O_{1,m}O_{2,n}f\Big|_{z=Z_{k'}} - O_{1,m}O_{3,p}f\Big|_{z=Z_{k'}} -$$

$$- O_{2,n}O_{3,p}f\Big|_{z=Z_{k'}} + O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p}f\Big|_{z=Z_{k'}} = \sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,Z_{k'})\times h_{1,i}(x) + \sum_{j=0}^{n} f(x,Y_j,Z_{k'})\times h_{2,j}(y) +$$

$$+\sum_{k=0}^{p} f(x,y,Z_k)\times h_{3,k}(Z_{k'}) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,Z_{k'})\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,y,Z_k)\times$$

$$\times h_{1,i}(x)\times h_{3,k}(Z_{k'}) - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(x,Y_j,Z_k)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(Z_{k'}) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,Y_j,Z_k)\times h_{1,i}(x)\times$$

$$\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(Z_{k'}) = \sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,Z_{k'})\times h_{1,i}(x) + \sum_{j=0}^{n} f(x,Y_j,Z_{k'})\times h_{2,j}(y) + \sum_{k=0}^{p} f(x,y,Z_k)\times$$

$$\times\delta_{k,k'} - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,Z_{k'})\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,y,Z_k)\times h_{1,i}(x)\times\delta_{k,k'} -$$

$$-\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(x,Y_j,Z_k)\times h_{2,j}(y)\times\delta_{k,k'} + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,Y_j,Z_k)\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times\delta_{k,k'} =$$

$$=\sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,Z_{k'})\times h_{1,i}(x) + \sum_{j=0}^{n} f(x,Y_j,Z_{k'})\times h_{2,j}(y) + f(x,y,Z_{k'}) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,Z_{k'})\times$$

$$\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y) - \sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,Z_{k'})\times h_{1,i}(x) - \sum_{j=0}^{n} f(x,Y_j,Z_{k'})\times h_{2,j}(y) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,Z_{k'})\times$$

$$\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y) = f(x,y,Z_{k'})$$

Отже, $O_{m,n,p}f(x,y,z)\Big|_{z=Z_{k'}} = f(x,y,Z_{k'}), k'=\overline{0,p}$. Властивість (5) доведена.

Аналогічно доводяться властивості (6) та (7), якщо задати в формулі (1) відповідно $y=Y_{j'}$ або $x=X_{i'}$.

Теорема 1 доведена. Тобто сліди функції $f(x,y,z)$ на вказаних сімействах площин, перпендикулярних координатним осям дорівнюють слідам $O_{m,n,p}f(x,y,z)$ на цих же відповідних площинах.

3. Оператори сплайн-інтерлінації та їх властивості

Для побудови операторів сплайн-інтерлінації функції трьох змінних у всій області $[0,1]^3$ будуємо оператори сплайн-інтерлінації функцій двох змінних на кожній з площин, які розбивають область на паралелепіпеди, у вигляді

$$\tilde{O}_{m,n}f(x,y,Z_k) = \sum_{i=0}^{m} f(X_i,y,Z_k)\times h_{1,i}(x) + \sum_{j=0}^{m} f(x,Y_j,Z_k)\times h_{2,j}(y) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,Z_k)\times h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y).$$

Даний оператор має властивості

$$\tilde{O}_{m,n} f(x,y,Z_k)\Big|_{x=X_{i'}} = f(X_{i'}, y, Z_k),\ i' = \overline{0,m},$$

$$\tilde{O}_{m,n} f(x,y,Z_k)\Big|_{y=Y_{j'}} = f(x, Y_{j'}, Z_k),\ j' = \overline{0,n}.$$

Аналогічно оператор

$$\tilde{O}_{m,p} f(x,Y_j,z) = \sum_{i=0}^{m} f(X_i,Y_j,z)\times h_{1,i}(x) + \sum_{k=0}^{p} f(x,Y_j,Z_k)\times h_{3,k}(z) - \sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,Y_j,Z_k)\times h_{1,i}(x)\times h_{3,k}(z)$$

має властивості

$$\tilde{O}_{m,p} f(x,Y_j,z)\Big|_{x=X_{i'}} = f(X_{i'}, Y_j, z),\ i' = \overline{0,m},$$

$$\tilde{O}_{m,p} f(x,Y_j,z)\Big|_{z=Z_{k'}} = f(x, Y_j, Z_{k'}),\ k' = \overline{0,p}.$$

Оператор

$$\tilde{O}_{n,p} f(X_i,y,z) = \sum_{j=0}^{n} f(X_i,Y_j,z)\times h_{2,j}(y) + \sum_{k=0}^{p} f(X_i,y,Z_k)\times h_{3,k}(z) - \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(X_i,Y_j,Z_k)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)$$

має аналогічні властивості

$$\tilde{O}_{n,p} f(X_i,y,z)\Big|_{y=Y_{j'}} = f(X_i, Y_{j'}, z),\ j' = \overline{0,n},$$

$$\tilde{O}_{n,p} f(X_i,y,z)\Big|_{z=Z_{k'}} = f(X_i, y, Z_{k'}),\ k' = \overline{0,p}.$$

Замінимо $f(X_i,y,z)$ на $\tilde{O}_{n,p} f(X_i,y,z)$, $f(x,Y_j,z)$ на $\tilde{O}_{m,p} f(x,Y_j,z)$, $f(x,y,Z_k)$ на $\tilde{O}_{m,n} f(x,y,Z_k)$.

Підставляючи ці заміни у оператор інтерфлетації $O_{m,n,p} f(x,y,z)$, заданий формулами (1)–(4), отримаємо оператор

$$\begin{aligned}
&\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z) = (O_{1,m} + O_{2,n} + O_{3,p} - O_{1,m}O_{2,n} - O_{2,n}O_{3,p} - O_{1,m}O_{3,p} + \\
&+ O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p}) f(x,y,z) = \sum_{i=0}^{m} \tilde{O}_{n,p} f(X_i,y,z)\times h_{1,i}(x) + \sum_{j=0}^{n} \tilde{O}_{m,p} f(x,Y_j,z)\times h_{2,j}(y) + \\
&+ \sum_{k=0}^{p} \tilde{O}_{m,n} f(x,y,Z_k)\times h_{3,k}(z) - O_{1,m}O_{2,n} f(x,y,z) - O_{1,m}O_{3,p} f(x,y,z) - \\
&- O_{2,n}O_{3,p} f(x,y,z) + O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p} f(x,y,z).
\end{aligned} \tag{8}$$

Теорема 2. Оператор $\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)$ має такі властивості:

$$\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=X_i\\ y=Y_j}} = f(X_i,Y_j,z),\ i=\overline{0,m},\ j=\overline{0,n},\ 0\le z\le 1; \tag{9}$$

$$\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=X_i\\ z=Z_k}} = f(X_i,y,Z_k),\ i=\overline{0,m},\ k=\overline{0,p},\ 0\le y\le 1; \tag{10}$$

$$\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)\Big|_{\substack{y=Y_j\\ z=Z_k}} = f(x,Y_j,Z_k),\ j=\overline{0,n},\ k=\overline{0,p},\ 0\le x\le 1. \tag{11}$$

Доведення. Використовуємо доведення теореми 1. Підставимо у формулу $\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)$ $x = X_{i'}$, $y = Y_{j'}$. В результаті отримуємо такі допоміжні рівності, які будуть використані для доведення написаних тверджень:

$$\tilde{O}_{1,m} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=X_{i'}\\ y=Y_{j'}}} = \sum_{i=0}^{m} \tilde{O}_{n,p} f(X_i, y, z) \times h_{1,i}(x)\Big|_{\substack{x=X_{i'}\\ y=Y_{j'}}} = f(X_{i'}, Y_{j'}, z), i' = \overline{0,m};\ j' = \overline{0,n};$$

$$\tilde{O}_{2,n} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=X_{i'}\\ y=Y_{j'}}} = \sum_{j=0}^{n} \tilde{O}_{m,p} f(X_{i'}, Y_j, z) \times h_{2,j}(y)\Big|_{\substack{x=X_{i'}\\ y=Y_{j'}}} = f(X_{i'}, Y_{j'}, z), i' = \overline{0,m};\ j' = \overline{0,n}.$$

Оператор $\tilde{O}_{3,p}$ за умови $x = X_{i'}$, $y = Y_{j'}$ має вигляд

$$\tilde{O}_{3,p} f(X_{i'}, Y_{j'}, z) = \sum_{k=0}^{p} \tilde{O}_{m,n} f(X_{i'}, Y_{j'}, z) \times h_{3,k}(z).$$

Окрім того,

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} f(X_i, Y_j, z) \times h_{1,i}(X_{i'}) \times h_{2,j}(Y_{j'}) = f(X_{i'}, Y_{j'}, z);$$

$$\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(X_i, Y_j, Z_k) \times h_{2,j}(Y_{j'}) \times h_{3,k}(z) = \sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z);$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=0}^{p} f(X_i, Y_{j'}, Z_k) \times h_{1,i}(X_{i'}) \times h_{3,k}(z) = \sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z);$$

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p} f(X_i, Y_j, Z_k) \times h_{1,i}(X_{i'}) \times h_{2,j}(Y_{j'}) \times h_{3,k}(z) = \sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z).$$

Враховуючи наведене вище, формула (8) набуває вигляду

$$\tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)\Big|_{\substack{x=X_{i'}\\ y=Y_{j'}}} = f(X_{i'}, Y_{j'}, z) + f(X_{i'}, Y_{j'}, z) + \sum_{k=0}^{p} \tilde{O}_{n,p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z) - f(X_{i'}, Y_{j'}, z) -$$

$$-\sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z) - \sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z) + \sum_{k=0}^{p} f(X_{i'}, Y_{j'}, Z_k) \times h_{3,k}(z) = f(X_{i'}, Y_{j'}, z).$$

Властивість (9) доведена.

Аналогічно, якщо послідовно підставити у формулу (8) спочатку $x = X_{i'}$, $z = Z_{k'}$, доводиться властивість (10), а потім, підставляючи $y = Y_{j'}$, $z = Z_{k'}$, доводиться властивість (11).

Теорема 2 доведена.

4. Похибка наближення функції $f(x, y, z)$ оператором сплайн-інтерлінації

Теорема 3. Похибка наближення

$$R_{m,n,p} f(x,y,z) = f(x,y,z) - \tilde{O}_{m,n,p} f(x,y,z)$$

функції $f(x, y, z)$ оператором $\tilde{O}_{m,n,p} f(x, y, z)$ визначається формулою

$$R_{m,n,p} f(x,y,z) = f(x,y,z) - O_{m,n,p} f(x,y,z) + O_{1,m} f(x,y,z) - \tilde{O}_{1,m} f(x,y,z) +$$

$$+ O_{2,n} f(x,y,z) - \tilde{O}_{2,n} f(x,y,z) + O_{3,p} f(x,y,z) - \tilde{O}_{3,p} f(x,y,z)$$

або в інтегральній формі

$$R_{m,n,p}f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times$$

$$\times\int\limits_{X_i}^{x}\int\limits_{Y_j}^{y}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(u,v,w)}^{(r,r,r)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!}dudvdw+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int\limits_{Y_j}^{y}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(X_i,v,w)}^{(0,r,r)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!}dvdw+$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int\limits_{X_i}^{x}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(u,Y_j,w)}^{(r,0,r)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!}dudw$$

$$+\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int\limits_{Y_j}^{y}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(u,v,Z_k)}^{(r,r,0)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}}{(r-1)!}\frac{(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!}dudv$$

або ж

$$(O_{m,n,p}-\tilde{O}_{m,n,p})f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\left[\int\limits_{Y_j}^{y}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(X_i,v,w)}^{(0,r,r)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dvdw+\right.$$

$$\left.+\int\limits_{X_i}^{x}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(u,Y_j,w)}^{(r,0,r)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudw+\int\limits_{Y_j}^{y}\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(u,v,Z_k)}^{(r,r,0)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudv\right].$$

Доведення. Скористаємося теоремами і твердженнями з робіт [5, 6].
Запишемо такий ланцюжок рівностей:

$$f(x,y,z)-O_{m,n,p}f(x,y,z)=R_{1,m}R_{2,n}R_{3,p}f(x,y,z)\text{, де}$$

$$R_{1,m}f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}h_{1,i}(x)\int\limits_{X_i}^{x}f_{(u,y,z)}^{(r,0,0)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}}{(r-1)!}du;$$

$$R_{2,n}f(x,y,z)=\sum_{j=0}^{n}h_{2,j}(y)\int\limits_{Y_j}^{y}f_{(x,v,z)}^{(0,r,0)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!}dv;$$

$$R_{3,p}f(x,y,z)=\sum_{k=0}^{p}h_{3,k}(z)\int\limits_{Z_k}^{z}f_{(x,y,w)}^{(0,0,r)}\times\frac{(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!}dw.$$

Це випливає з того, що

$$f(x,y,z)-O_{m,n,p}f(x,y,z)=\big[I-O_{1,m}-O_{2,n}-O_{3,p}+O_{1,m}O_{2,n}+O_{1,m}O_{3,p}+O_{2,n}O_{3,p}-$$
$$-O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p}\big]f(x,y,z)=(I-O_{1,m})(I-O_{2,n})(I-O_{3,p})f(x,y,z).$$

Далі

$$(O_{m,n,p}-\tilde{O}_{m,n,p})f(x,y,z)=(O_{1,m}+O_{2,n}+O_{3,p}-O_{1,m}O_{2,n}-O_{1,m}O_{3,p}-O_{2,n}O_{3,p}+$$
$$+O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p})f(x,y,z)-(\tilde{O}_{1,m}+\tilde{O}_{2,n}+\tilde{O}_{3,p}-O_{1,m}O_{2,n}-O_{1,m}O_{3,p}-O_{2,n}O_{3,p}+$$
$$+O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p})f(x,y,z)=(O_{1,m}-\tilde{O}_{1,m})f(x,y,z)+(O_{2,n}-\tilde{O}_{2,n})f(x,y,z)+$$
$$+(O_{3,p}-\tilde{O}_{3,p})f(x,y,z);$$

$$(O_{1,m}-\tilde{O}_{1,m})f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\left[f(X_i,y,z)-O_{2,n}f(X_i,y,z)-O_{3,p}f(X_i,y,z)+O_{2,n}O_{3,p}f(X_i,y,z)\right]=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}h_{1,i}(x)\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{2,j}(y)h_{3,k}(z)\times\int_{Y_j}^{y}\int_{Z_k}^{z}f_{(X_i,v,w)}^{(0,r,r)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dvdw=$$

$$=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int_{Y_j}^{y}\int_{Z_k}^{z}f_{(X_i,v,w)}^{(0,r,r)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dvdw.$$

Ця формула випливає з того, що

$$\left[f(X_i,y,z)-O_{2,n}f(X_i,y,z)-O_{3,p}f(X_i,y,z)+O_{2,n}O_{3,p}f(X_i,y,z)\right]=$$

$$=\left[I-O_{2,n}-O_{3,p}+O_{2,n}O_{3,p}\right]f(X_i,y,z)=(I-O_{2,n})(I-O_{3,p})f(X_i,y,z)=R_{2,n}R_{3,p}f(X_i,y,z).$$

Аналогічно

$$(O_{2,n}-\tilde{O}_{2,n})f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int_{X_i}^{x}\int_{Z_k}^{z}f_{(u,Y_j,w)}^{(r,0,r)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudw$$

та

$$(O_{3,p}-\tilde{O}_{3,p})f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\int_{Y_j}^{y}\int_{Z_k}^{z}f_{(u,v,Z_k)}^{(r,r,0)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudv.$$

Тобто

$$(O_{m,n,p}-\tilde{O}_{m,n,p})f(x,y,z)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p}h_{1,i}(x)\times h_{2,j}(y)\times h_{3,k}(z)\times\left[\int_{Y_j}^{y}\int_{Z_k}^{z}f_{(X_i,v,w)}^{(0,r,r)}\times\frac{(Y_j-v)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dvdw+\right.$$

$$\left.+\int_{X_i}^{x}\int_{Z_k}^{z}f_{(u,Y_j,w)}^{(r,0,r)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Z_k-w)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudw+\int_{Y_j}^{y}\int_{Z_k}^{z}f_{(u,v,Z_k)}^{(r,r,0)}\times\frac{(X_i-u)^{r-1}(Y_j-v)^{r-1}}{(r-1)!(r-1)!}dudv\right].$$

Теорема 3 доведена.

Відмітимо, для порівняння, що загальна формула для залишкового члена наближення функції $f(x,y,z)$

$$r_{m,n,p}f(x,y,z)=f(x,y,z)-O_{1,m}\times O_{2,n}\times O_{3,p}f(x,y,z)$$

може бути подана в такому вигляді:

$$f(x,y,z)-O_{m,n,p}f(x,y,z)=R_{1,m}R_{2,n}R_{3,p}f(x,y,z)-R_{1,m}R_{2,n}f(x,y,z)-R_{1,m}R_{3,p}f(x,y,z)-R_{2,n}R_{3,p}f(x,y,z),$$

що випливає з рівності

$$O_{1,m}\times O_{2,n}\times O_{3,p}f(x,y,z)=(I-O_{1,m}O_{2,n}O_{3,p})f(x,y,z)=\left[(I-O_{1,m})+(I-O_{2,n})+(I-O_{3,p})-\right.$$

$$-(I-O_{1,m})(I-O_{2,n})-(I-O_{1,m})(I-O_{3,p})-(I-O_{2,n})(I-O_{3,p})+\left.(I-O_{1,m})(I-O_{2,n})(I-O_{3,p})\right]\times$$

$$\times f(x,y,z)=\left(R_{1,m}+R_{2,n}+R_{3,p}-R_{1,m}R_{2,n}-R_{1,m}R_{3,p}-R_{2,n}R_{3,p}+R_{1,m}R_{2,n}R_{3,p}\right)f(x,y,z).$$

Тобто похибка наближення операторами сплайн-інтерфлетації може прямувати до нуля, якщо хоча б один із залишкових членів прямує до нуля. А похибка наближення операторами сплайн-інтерполяції $O_{1,m}\times O_{2,n}\times O_{3,p}f(x,y,z)$ прямує до нуля тільки тоді, коли всі залишки $R_{1,m};R_{2,n};R_{3,p}$ прямують до нуля.

Зауваження 1. Для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції однієї змінної використовуються стандартні процедури *Maximize* або *Minimize* в системі комп'ютерної математики *Mathcad*.

Зауваження 2. Запропонований метод, очевидно, буде точним для функцій, які мають вигляд $\tilde{O}_{m,n,p} f(x, y, z)$.

5. Обчислювальний експеримент

Приклад. Знайти найменше значення функції

$$f(x, y, z) = \sum_{s=1}^{S} \left[D_s \times e^{\left[\frac{-(x-XX_s)^2}{(a_s)^2} + \frac{(y-YY_s)^2}{(b_s)^2} + \frac{(z-ZZ_s)^2}{(c_s)^2} \right]} - 1 \right],$$

якщо $S = 2$; $XX_1 = 0{,}3$; $XX_2 = 0{,}55$; $YY_1 = 0{,}45$; $YY_2 = 0{,}7$; $ZZ_1 = 0{,}3$; $ZZ_2 = 0{,}55$; $a_1 = 5$; $a_2 = 10$; $b_1 = 7{,}5$; $b_2 = 15$; $c_1 = 0{,}5$; $c_2 = 0{,}9$; $D_1 = 1$; $D_2 = 2$.

Розв'язання. Область D задання функції розбиваємо на паралелепіпеди площинами, перпендикулярними осям OX, OY та OZ з кроком 0,5. В результаті при перетині цих площин отримаємо 9 прямих, паралельних осі OX $\Gamma^{(1)}_{j,k} = \{(x, y, z) : 0 \le x \le 1, y = Y_j, z = Z_k\}, j = \overline{0,n}, k = \overline{0,p}, n = p = 2;$ 9 прямих, паралельних осі OY $\Gamma^{(2)}_{i,k} = \{(x, y, z) : x = X_i, 0 \le y \le 1, z = Z_k\}, i = \overline{0,m}, k = \overline{0,p}, m = p = 2;$ 9 прямих, паралельних осі OZ $\Gamma^{(3)}_{i,j} = \{(x, y, z) : x = X_i, y = Y_j, 0 \le z \le 1\}, i = \overline{0,m}, j = \overline{0,n}, m = n = 2,$ на яких будемо знаходити мінімум заданої функції.

Точки, в яких задана функція досягає мінімального значення на всіх 9 прямих, паралельних осі OX, в матричній формі мають вигляд

$$(X_{\min}, y, z) = \begin{pmatrix} (1;0;0) & (1;0;0{,}5) & (1;0;1) \\ (1;0{,}5;0) & (1;0{,}5;0{,}5) & (1;0{,}5;1) \\ (1;1;0) & (1;1;0{,}5) & (1;1;1) \end{pmatrix}.$$

Найменше значення досліджуваної функції досягається в точці з координатами $(1;1;0{,}5)$ і становить 5,471.

На кожній з 9 прямих, паралельних осі OY, задана функція досягає мінімального значення в точках, які в матричній формі мають вигляд

$$(x, Y_{\min}, z) = \begin{pmatrix} (0;0{,}545;0) & (0;0{,}533;0{,}5) & (0;0{,}473;1) \\ (0{,}5;0{,}545;0) & (0{,}5;0{,}533;0{,}5) & (0{,}5;0{,}473;1) \\ (1;0{,}546;0) & (1;0{,}534;0{,}5) & (1;0{,}473;1) \end{pmatrix}.$$

Мінімальне значення функції досягається за умови $y = 0{,}534$ в точці з координатами $(1;0{,}534;0{,}5)$ і дорівнює 1,238.

Аналогічно на кожній з 9 ліній, паралельних осі OZ, знаходимо мінімальні значення функції. Отримуємо матрицю значень цих точок

$$(x, y, Z_{\min}) = \begin{pmatrix} (0;0;0{,}501) & (0;0{,}5;0{,}501) & (0;1;0{,}501) \\ (0{,}5;0;0{,}501) & (0{,}5;0{,}5;0{,}501) & (0{,}5;1;0{,}501) \\ (1;0;0{,}503) & (1;0{,}5;0{,}503) & (1;1;0{,}502) \end{pmatrix}.$$

Мінімальне значення функції досягається за умови $z = 0{,}503$ в точці з координатами $(1;0{,}5;0{,}503)$ і дорівнює 1,229.

Порівнюючи отримані дані, маємо оптимальні значення $x, y, z,$ за яких дана функція досягає найменшого значення в області $[0{,}1]^3$: $f(1;0{,}5;0{,}503) = 1{,}229$.

Точне мінімальне значення заданої функції досягається в точці $ww = (1;0{,}533;0{,}503)$ отримане за допомогою процедури *Minimize* в системі комп'ютерної математики *Mathcad* і становить $f(1;0{,}533;0{,}503) = 1{,}229$.

Висновки

Аналіз результатів обчислюваного експерименту свідчить про ефективність запропонованого і досліджуваного методу використання операторів сплайн-інтерлінації функції трьох змінних на системі взаємно перпендикулярних прямих, побудованих за допомогою операторів сплайн-інтерфлетації. Автори вважають, що даний метод може бути найбільш ефективним при розпаралелюваннії обчислень для знаходження найбільшого (найменшого) значення функції n змінних.

Література

1. *Михалевич, М. В.* Моделирование переходной экономики: модели, методы, информационные технологии / М. В. Михалевич, И. В. Сергиенко. – Киев: Наук. думка, 2005. – 669 с.
2. *Гаврилюк, І. П.* Методи обчислень : Підручник: У 2ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.
3. *Гаврилюк, І. П.* Методи обчислень: Підручник: У 2ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров. – К.: Вища шк., 1995. – Ч. 2. – 431 с.
4. *Макаров, В. Л.* Интерполирование операторов / В. Л. Макаров, В. В. Хлобыстов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 406 с.
5. *Литвин, О. Н.* Интерполирование функций: Учеб.пособие / О. Н. Литвин. – Киев: УМК ВО, 1988. – 32 с.
6. *Литвин, О. М.* Інтерлінація функції та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
7. *Литвин, О. М.* Інтерфлетація функцій при розв'язуванні тривимірної задачі теплопровідності / О. М. Литвин, Л. І. Гулік. – К.: Наук. думка, 2011. – 210 с.
8. *Литвин, О. М.* Метод сплайн-інтерлінації при знаходженні найбільших (найменших) значень функції двох змінних в замкнутій області / О. М. Литвин, О. В. Ярмош, Т. І. Чорна // Бионика интеллекта. – 2016. – № 2(87). – С. 77–82.

Надійшла до редакції 11.04.17