

The offered problem-solving procedure is easily parallelizable and their implementation for a multi-processor computer will allow simultaneous calculation of several local maxima.

References

1. Stoyan Y. G. Optimization problem of packing identical circles into a multiply connected region. Part 1. Mathematical model and its characteristics / Y. G. Stoyan, A. M. Chugay // J. Mech. Eng. – 2011. – Vol. 14, № 1. – P. 44–52.
2. Stoyan Y. Packing cylinders and rectangular parallelepipeds with distances between them into a given region / Y. Stoyan, A. Chugay // European J. Oper. Res. – 2009. – Vol. 197, № 2. – P. 446–455.
3. Stoyan Y. G. Solving of some multiextremal problems by means of the decremental neighborhood method / Y. G. Stoyan, V. Z. Sokolovskiy. – Kiev: Nauk. Dumka, 1980. – 208 p.
4. Zoutendijk G. Nonlinear programming, computational methods / G. Zoutendijk // Integer and Nonlinear Programming. – Amsterdam: North Holland Publishing Co. – 1970. – P. 37–86.
5. Gill P. E. Practical Optimization / P. E. Gill, W. Murray and M. H. Wright // Academic Press. – 1981. – 509 p.
6. Gondzio J. HOPDM (version 2.12) - A Fast LP Solver Based on a Primal-Dual Interior Point Method / J. Gondzio // European J. Oper. Res. – 1995. – Vol. 85, № 1. – P. 221–225.
7. Meszaros C. On numerical issues of interior point methods / C. Meszaros // Siam J. Matrix Anal. Appl. – 2008. – Vol. 30, № 1. – P. 223–235.
8. Birgin E. Optimizing the packing of cylinders into a rectangular container: A nonlinear approach / E. Birgin, J. Martinez, D. Ronconi // European J. Oper. Res. – 2005. – Vol. 160, № 1. – P. 19–33.

Поступила в редакцию
30.11.2010

УДК 538.941, 536.24.01, 536.243

К. Э. Немченко, д-р. физ.-мат. наук

С. Ю. Рогова

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина
(г. Харьков, E-mail: nemchenko@bk.ru)

МОДЕЛИРОВАНИЕ БЕЗДИССИПАТИВНОГО ПЕРЕНОСА ТЕПЛА И МАССЫ В НЕКЛАССИЧЕСКИХ СРЕДАХ

Исследуется система гидродинамических уравнений, которые описывают перенос тепла и массы в сверхтекучих жидкостях. Система решается аналитически с помощью преобразования Фурье и разложения начального вектора (соответствующего начальному возмущению температуры или концентрации) по собственным векторам матрицы системы. Собственные векторы вычисляются во втором приближении по параметру гидродинамичности, благодаря чему система удовлетворяется с требуемой точностью.

Досліджується система гідродинамічних рівнянь, які описують перенос тепла й маси у надплинних рідинах. Система вирішується аналітично за допомогою перетворення Фур'є й розкладання початкового вектора (який відповідає початковому збурюванню температури або концентрації) по власних векторах матриці системи. Власні вектори обчислюються в другому наближенні за параметром гідродинамічності, завдяки чому система задовольняється з необхідною точністю

1. Введение

Квантовые свойства вещества в макроскопических масштабах проявляются не только в виде необычных явлений или свойств, таких, как сверхтекучесть и сверхпроводимость, но также и в виде, казалось бы, менее экзотических явлений, таких, как транспорт электронов в металлах и полупроводниках, тепловые явления в твердых телах, магнитные свойства

веществ. К таким свойствам относится также и явление «второго» звука, которое обуславливает процесс переноса тепла не диссипативным образом, как в газах и классических жидкостях, а звуковым.

Этот бездиссипативный перенос тепла в звуковом волновом процессе, на первый взгляд, кажется уникальным явлением, присущим лишь экзотическим сверхтекучим жидкостям. На самом деле он описывает перенос тепла в кристаллических твердых телах, магнетиках, сверхпроводниках, которые в настоящее время все больше используются в энергетике и теплотехнике.

Существование этого температурного волнового процесса, который был назван вторым звуком, впервые было теоретически предсказано в работе [1]. Экспериментально второй звук был обнаружен в [2], а в работе [3] было высказано предположение о возможности существования волн второго звука в твердых телах. В работах [4–6] впервые теоретически были рассмотрены волны второго звука в кристаллических твердых телах. Возможность существования звуковых температурных волн в ферромагнетиках впервые рассматривалась в работах [7, 8], изучение их свойств проводилось в работах [9–11], в антиферромагнетиках их существование рассматривалось в [12]. В полупроводниках эти волны были изучены в работах [13, 14], а в металлах – в работе [15]. Экспериментально волны второго звука в твердых телах наблюдались в твердом гелии [16, 17], в чистых монокристаллах NaF [18, 19], в висмуте [20], в сапфире [21] при изучении распространения теплового импульса.

Рассмотрение и сравнение математических моделей описания бездиссипативного переноса тепла в перечисленных средах, а также решение задачи о релаксации теплового всплеска в квантовых жидкостях является целью данной работы.

2. Основные уравнения

В обычных жидкостях и газах процессы переноса массы и энтропии определяются движением вещества и поэтому происходят с одинаковой скоростью – со скоростью движения вещества V

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \rho s}{\partial t} + \operatorname{div} \rho s \mathbf{V} = \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T). \end{cases}$$

Здесь выписаны уравнения сохранения массы (непрерывности) и переноса тепла без учета вязкости. Величина ρ – плотность; s – энтропия единицы массы; κ – коэффициент теплопроводности. В случае неподвижной среды и в пренебрежении коэффициентом теплового расширения из этих уравнений при учете уравнения Эйлера получаем такое уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \chi \Delta T,$$

где $\chi = \kappa / C_V$ – отношение теплопроводности к теплоемкости при постоянном объеме.

Таким образом, температурные волны в классических жидкостях и газах являются чисто диссипативными.

Перенос тепла в кристаллах осуществляется так называемыми фононами (квантами звука) – тепловыми возбуждениями кристаллической решетки. Сама решетка при этом остается неподвижной, то есть перенос массы отсутствует. Уравнения для газа фононов выписываются в газодинамической модели и представляют собой уравнения Эйлера и теплопроводности

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho \mathbf{V}}{\partial t} + S \nabla T = -r \rho \mathbf{V} \\ \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{S}{C} \operatorname{div} \mathbf{V} = \chi \Delta T. \end{cases}$$

Здесь S и C – энтропия и теплоемкость единицы объема; r – коэффициент трения, описывающий взаимодействие фононов с решеткой. В идеальных кристаллах, когда трение практически отсутствует, тепло распространяется по кристаллу чисто звуковым образом [21-26]. В случае большого коэффициента трения перенос тепла приобретает диффузионный характер.

В сверхтекучих растворах перенос энтропии и тепла осуществляется только частью жидкости, так называемой нормальной компонентой. С этой же частью жидкости движутся и все примеси. Другая часть сверхтекучего раствора, так называемая сверхтекучая компонента, движется без диссипации и тепло не переносит.

Здесь выписаны уравнения сохранения массы (непрерывности) для всей жидкости, примесей и переноса тепла без учета вязкости. Величина $\rho = \rho_s + \rho_n$ – плотность; $v = v_s + v_n$ – скорость; S – энтропия; κ – коэффициент теплопроводности.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{V} = 0, \\ \frac{\partial \rho c}{\partial t} + \operatorname{div} \rho c \mathbf{V}_n = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \operatorname{div} S \mathbf{V}_n = \frac{1}{T} \operatorname{div} (\kappa \nabla T). \end{array} \right.$$

Таким образом, сверхтекучие растворы квантовых жидкостей ^3He - ^4He сочетают особенности переноса тепла и массы, которые присущи как классическим жидкостям и газам, так и твердым телам, сверхпроводникам и магнетикам. Это послужило объяснению тому факту, что целый ряд актуальных задач о переносе тепла и массы в этих растворах остался нерешенным до настоящего времени. Среди них задача об установлении стационарного неравновесного состояния при включении потока тепла на отрезке, задача о фазовом переходе первого рода в пересыщенных сверхтекучих растворах ^3He - ^4He . Данная работа посвящена описанию переноса тепла и массы сверхтекучих растворов в бесконечной одномерной среде и на отрезке с помощью системы уравнений гидродинамики для этих растворов.

3. Создание модели

Для создания модели переноса тепла и массы в сверхтекучих растворах ^3He - ^4He в одномерном случае при произвольных температурах (с учетом диффузии и термодиффузии) за основу берется линеаризованная система уравнений [27]

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial j}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + S_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{q - zg}{T} \right) = 0, \\ \frac{\partial v_s}{\partial t} + \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{c_0}{\rho_0} \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{z_0}{\rho_0} \frac{\partial c}{\partial x} + \frac{z_0 c_0}{\rho_0^2} \frac{\partial c}{\partial x} = 0, \\ \rho_0 \frac{\partial c}{\partial t} + c_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 c_0 \frac{\partial v_n}{\partial x} = D \left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right), \end{array} \right. \quad (1)$$

где введены малые отклонения термодинамических переменных от равновесных значений. Величина ρ описывает отклонение плотности; j – импульса; p – давления; S – энтропии; c – концентрации; μ – химического потенциала раствора; z – химического потенциала растворенного ^3He . Величины S_0 , ρ_0 и c_0 – равновесные значения энтропии, плотности и концен-

трации; v_n, v_s – скорости нормальной и сверхтекучей компонент; D, k_T – коэффициенты диффузии и термодиффузии; \mathbf{q}, \mathbf{g} – тепловой поток и поток примесей.

Равновесные значения плотности и импульса устанавливаются значительно быстрее равновесных значений концентрации, энтропии и нормальной скорости, т.е. можно положить $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$.

После некоторых преобразований оставшихся уравнений можно переписать систему (1), выбрав в качестве независимых переменных скорость относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент $w(x, t) = v_n - v_s$, $c(x, t)$ – отклонение концентрации от равновесного значения, и $T(x, t)$ – отклонение температуры от равновесного значения

$$\begin{cases} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = -\frac{\bar{S}}{\rho_n} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} - \frac{\rho_0 c_0 \zeta}{\rho_n} \frac{\partial c(x, t)}{\partial x}, \\ \frac{\partial c(x, t)}{\partial t} = -\frac{\rho_s c_0}{\rho_0} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} + D \frac{k_T}{T_0} \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -\frac{T_0 \bar{S} \rho_s}{C_V \rho_0} \frac{\partial w(x, t)}{\partial x} + \frac{D k_T \rho_0 \zeta}{C_V} \frac{\partial^2 c(x, t)}{\partial x^2} + \left(\chi + \frac{D k_T^2 \rho_0 \zeta}{T_0 C_V} \right) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2}, \end{cases} \quad (2)$$

с начальным условием

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, \\ C(x, t) = 0, \\ T(x, 0) \sim \delta(x). \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} w(x, 0) = 0, \\ C(x, t) \sim \delta(x), \\ T(x, 0) = 0. \end{cases}$$

4. Решение задачи о релаксации начального возмущения температуры (концентрации) в бесконечной среде

Исследуем решения системы (2) в неограниченной области, предполагая, что отклонения макроскопических переменных от равновесных значений стремятся к нулю на больших расстояниях. Тогда можно определить преобразование Фурье для $w(x, t)$, $C(x, t)$, $T(x, t)$.

Введем в рассмотрение трехмерное пространство векторов [28–31], координаты которых соответствуют гидродинамическим переменным

$$\mathbf{a}(t) = \begin{pmatrix} w_q(t) \\ c_q(t) \\ T_q(t) \end{pmatrix}.$$

Тогда система (2) может быть записана в виде дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{a}(t) = M_q \mathbf{a}(t)$$

с начальным условием

$$\mathbf{a}(t=0) = \begin{pmatrix} w_q(0) \\ c_q(0) \\ T_q(0) \end{pmatrix} \equiv \mathbf{a}_0.$$

Матрица системы (2) имеет вид

$$M_q = \begin{pmatrix} 0 & -iq \frac{\rho_0 c_0 \zeta}{\rho_n} & -iq \frac{\bar{S}}{\rho_n} \\ -iq \frac{\rho_s c_0}{\rho_0} & -q^2 D & -q^2 D \frac{k_T}{T_0} \\ -iq \frac{T_0 \rho_0 \bar{S}}{C_V \rho_n} & -q^2 \frac{D k_T \rho_0 \zeta}{C_V} & -q^2 \left(\chi + \frac{D k_T^2 \rho_0 \zeta}{T_0 C_V} \right) \end{pmatrix}.$$

Найдём собственные значения λ_i ($i = 1, 2, 3$) этой матрицы. Отметим, что гидродинамическое описание можно использовать только для медленно изменяющихся в пространстве явлений. Это означает, что в преобразовании Фурье существенными являются коэффициенты только с малыми значениями параметра q . Следовательно, можно ограничиться рассмотрением собственных значений в пределе $q \rightarrow 0$. В этом случае величины λ_i можно записать в виде разложений

$$\lambda_i = a_i q + b_i q^2 + O(q^3).$$

Тогда получим три собственных значения в виде

$$\lambda_{1,2} = \pm i u_2 q - \Gamma_s q^2,$$

$$\lambda_3 = -q^2 D_{eff},$$

где

$$\Gamma_s = \frac{1}{2} \left(\chi \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \left(1 + \frac{k_T \bar{S}}{C_V c_0} \right)^2 \right)$$

– коэффициент поглощения второго звука;

$$D_{eff} = \chi \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} + D \frac{u_{2\varepsilon}^2}{u_2^2} \left(1 - k_T \frac{\bar{S}}{c_0 C_V} \frac{u_{2N}^2}{u_{2\varepsilon}^2} \right)^2$$

– коэффициент эффективной диффузии;

$$u_2^2 = \frac{\rho_s c_0^2 \zeta}{\rho_n} + \frac{\rho_s \bar{S}^2 T_0}{\rho_n \rho_0 C_V} \equiv u_{2N}^2 + u_{2\varepsilon}^2$$

– квадрат скорости второго звука.

Так как матрица M_q – неэрмитова, то её левые и правые собственные вектора отличаются. Находятся они из соотношений $M_q X_i = \lambda_i X_i$, $Y_i M_q = \lambda_i Y_i$, ($i = 1, 2, 3$) и при $q \rightarrow 0$ выглядят следующим образом:

$$X_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mp \frac{c_0 \rho_s}{\rho_0 (u_2 \pm iq \Gamma_s)} \\ \mp \frac{T_0 \rho_s \bar{S}}{\rho_0 C_V (u_2 \mp iq (\chi - \Gamma_s))} \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -iq D_{eff} \\ c_0 \bar{S} \rho_s \\ \rho_0 \\ -u_{2N}^2 \rho_n \end{pmatrix},$$

$$Y_{1,2} = \left(1, \mp \frac{c_0 \rho_0 \zeta}{\rho_n (u_2 \pm iq \Gamma_s)}, \mp \frac{\bar{S}}{\rho_n (u_2 \mp iq (\chi - \Gamma_s))} \right), \quad Y_3 = \left(\frac{iq D_{eff} T_0 \bar{S}}{\rho_0}, -\frac{T_0 \bar{S} c_0 \zeta}{\rho_n}, \frac{u_{2N}^2 C_V}{\rho_s} \right).$$

Ранее собственные вектора находились с точностью q^0 , и поэтому полученное решение не удовлетворяло системе с требуемой точностью. Здесь мы вычислили собственные значения и вектора с одинаковой точностью.

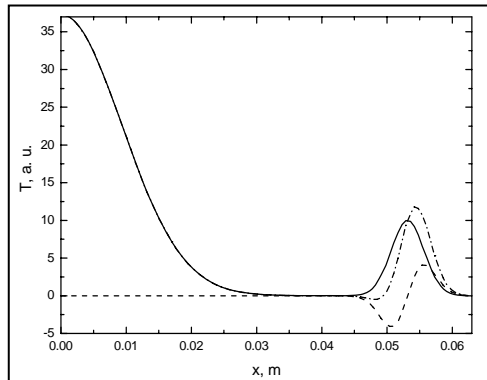


Рис. 1. Распределение температуры в бесконечной одномерной среде от точечного мгновенного источника тепла:
 $T_0 = 0,08 \text{ K}, c_0 = 0,1, t = 0,001 \text{ c}$

Найденные собственные векторы и соответствующие им собственные значения матрицы M_q позволяют решить систему (2).

Разложим \mathbf{a}_0 по собственным векторам $\mathbf{a}_0 = \alpha_1 \mathbf{X}_1 + \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \alpha_3 \mathbf{X}_3$, где $\alpha_i = (\mathbf{Y}_i, \mathbf{a})$, $i = 1, 2, 3$.

Тогда решение системы (2) будет иметь вид

$$w_q(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} x_1^{(1)} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} x_1^{(2)} + \alpha_3 e^{-\lambda_3 t} x_1^{(3)},$$

$$C_q(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} x_2^{(1)} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} x_2^{(2)} + \alpha_3 e^{-\lambda_3 t} x_2^{(3)},$$

$$T_q(t) = \alpha_1 e^{-\lambda_1 t} x_3^{(1)} + \alpha_2 e^{-\lambda_2 t} x_3^{(2)} + \alpha_3 e^{-\lambda_3 t} x_3^{(3)}.$$

Выполнив обратное преобразование Фурье, получим решение системы (2). Решение системы для начального возмущения температуры (начальные условия $w(x, t) = 0, c(x, t) = 0, T(x, t) = \delta(x)$) запишем так:

$$T(x, t) = \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} G^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} (G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} (2\chi - 3\Gamma_s) (G_x^{(+)}(x, t) - G_x^{(-)}(x, t)),$$

$$c(x, t) = c_0 \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} \frac{C_V}{S T_0} \left[\frac{1}{2} (G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t)) - G^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{(\chi - 3\Gamma_s)}{u_2} (G_x^{(+)}(x, t) - G_x^{(-)}(x, t)) \right], \quad (3)$$

$$w(x, t) = \frac{\bar{S}}{\rho_n u_2} \left[\frac{1}{2} (G^{(-)}(x, t) - G^{(+)}(x, t)) + \frac{(\chi - 2\Gamma_s)}{u_2} \left(G_x^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} (G_x^{(-)}(x, t) - G_x^{(+)}(x, t)) \right) \right].$$

На рис. 1 приведен пример расчета по формуле (3) распределения температуры в бесконечной одномерной среде от точечного мгновенного источника тепла. Левый пик соответствует вкладу диссипативной моды, а правый – вкладу звуковой моды. Пунктирная линия – вклад добавочных членов.

Решение системы для начального возмущения концентрации (начальные условия $w(x, t) = 0, c(x, t) = \delta(x), T(x, t) = 0$) имеет вид

$$c(x, t) = \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} G^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} (G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t)) + \frac{1}{2} \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} 3\Gamma_s (G_x^{(-)}(x, t) - G_x^{(+)}(x, t)),$$

$$T(x, t) = \frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \frac{T_0}{k_T^*} \left[\frac{1}{2} (G^{(+)}(x, t) + G^{(-)}(x, t)) - G^{D_{eff}}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{(\chi - 3\Gamma_s)}{u_2} (G_x^{(+)}(x, t) - G_x^{(-)}(x, t)) \right],$$

$$w(x, t) = \frac{\rho_0}{\rho_s c_0} \left[\frac{u_{2N}^2}{u_2^2} \left(\frac{1}{2} (G^{(-)}(x, t) - G^{(+)}(x, t)) + \Gamma_s (G_x^{(-)}(x, t) + G_x^{(+)}(x, t)) \right) + D_{eff} \frac{u_{2E}^2}{u_2^2} G_x^{D_{eff}}(x, t) \right].$$

Здесь введены функции

$$G_{D_{eff}}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi D_{eff} t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{eff} t}\right), \quad G_x^{D_{eff}}(x, t) = -\frac{x}{2D_{eff} t \sqrt{4\pi D_{eff} t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4D_{eff} t}\right),$$

которые описывают релаксацию за счет диссипативного механизма теплопроводности, и функции

$$G^{(\pm)}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi \Gamma_s t}} \exp\left(-\frac{(x \pm u_2 t)^2}{4\Gamma_s t}\right), \quad G_x^{(\pm)}(x, t) = -\frac{(x \pm u_2 t)}{2\Gamma_s t \sqrt{4\pi \Gamma_s t}} \exp\left(-\frac{(x \pm u_2 t)^2}{4\Gamma_s t}\right),$$

описывающие релаксацию, обусловленную распространением второго звука.

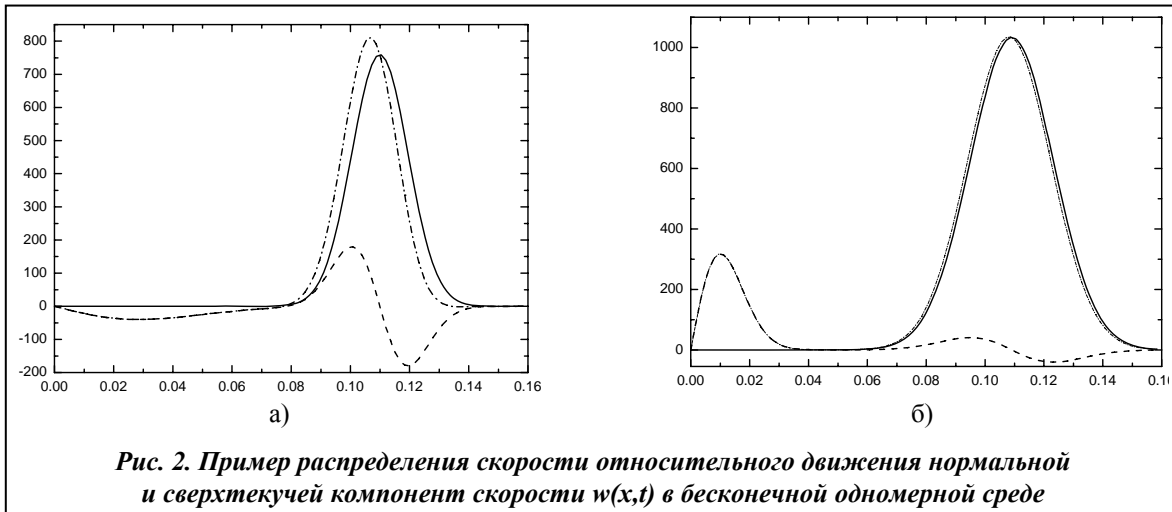


Рис. 2. Пример распределения скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент скорости $w(x,t)$ в бесконечной одномерной среде

5. Диссипативная часть скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент скорости $w(x, t)$

При описании модели получены выражения для диссипативной части скорости относительного движения нормальной и сверхтекучей компонент скорости $w(x, t)$

$$w^{diss}(x, t) = \frac{\bar{S}}{\rho_n u_2} \frac{(\chi - 2\Gamma_s)}{u_2} G_x^{D_{eff}}(x, t)$$

при начальном возмущении температуры;

$$w^{diss}(x, t) = \frac{\rho_0}{\rho_s c_0} D_{eff} \frac{u_{2g}^2}{u_2^2} G_x^{D_{eff}}(x, t)$$

при начальном возмущении концентрации. Ранее диссипативная часть $w(x, t)$ считалась равной нулю. Примеры расчетов по этим формулам приведены на рис. 2. Распределение скорости при точечном мгновенном источнике тепла ($T_0 = 0,01$ К, $c_0 = 0,1$, $t = 0,01$ с) дано на рис. 2, а, при точечном мгновенном источнике концентрации ($T_0 = 1,7$ К, $c_0 = 0,1$, $t = 0,005$ с) – на рис. 2, б. Левый пик соответствует диссипативной моде, а правый – вкладу звуковой моды. Пунктирная линия – вклад добавочных членов.

6. Выводы

Рассмотрены математические модели описания бездиссипативного переноса тепла в таких различных средах, как твердые кристаллические тела, обычные (классические) жидкости и газы, квантовые жидкости, а также впервые решена задача о релаксации теплового всплеска в квантовых жидкостях во втором приближении по параметру гидродинамичности.

С помощью полученной модели описан перенос тепла и массы в сверхтекучих растворах $^3\text{He}-^4\text{He}$ в бесконечной одномерной среде при начальном возмущении температуры и концентрации.

Литература

1. Ландау Л. Д. Теория сверхтекучести гелия II / Л. Д. Ландау // Журн. эксперимент. и теорет. физики – 1941. – Т. 11, № 5. – С. 592–614.
2. Пешков В. П. Второй звук в гелии II / В. П. Пешков // Докл. АН СССР. – 1944. – № 45. – С. 385–389.
3. Peshkov V. P. Report of the Cambridge low temperature conference / V. P. Peshkov. – London, 1947. – 19 p.
4. Ward J. C. The velocity of second sound in liquid helium near the absolute zero / J. C. Ward, J. Wilks // Philos. Mag. – 1951. – Vol. 42. – P. 314–316.
5. Ward J. C. Second Sound and thermomechanical effect at very low temperatures / J. C. Ward, J. Wilks // Philos. Mag. – 1952. – Vol. 43. – P. 48–50.

6. *Dingle R. V.* The velocity of second sound in various media / R. V. Dingle // Proc. Phys. Soc. London – 1952. – Vol. 65, № 396. – P. 1044–1050.
7. *Гуржи Р. Н.* О втором звуке в твердых телах / Р. Н. Гуржи // Физика твердого тела. – 1965. – Т. 7, вып. 12. – С. 3516–3521.
8. *Гуляев Ю. В.* О возможности “вторых” спиновых волн в ферромагнетиках / Ю. В. Гуляев // Письма в Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1965. – Т. 2, вып. 1. – С. 3–6.
9. *Гуржи Р. Н.* Гидродинамические эффекты в твердых телах при низких температурах / Р. Н. Гуржи // Усп. физ. наук. – 1968. – Т. 94. – С. 689–718.
10. *Ахиезер А. И.* Спиновые волны / А. И. Ахиезер, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский. – М.: Наука, 1967. – 364 с.
11. *Зырянов П. С.* Влияние второго звука в ферромагнетиках на затухание упругих волн / П. С. Зырянов, Г. Г. Талуц, В. Г. Шавров // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1968. – Т. 55, вып. 12. – С. 2230–2236.
12. *Тарасенко В. В.* Второй звук в антиферромагнетиках / В. В. Тарасенко, В. Г. Шавров // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1970. – Т. 59, вып. 7. – С. 266–275.
13. *Гуревич Л. Э.* К теории второго звука в полупроводниках / Л. Э. Гуревич, Б.И. Шкловский // Физика твердого тела. – 1966. – Т. 8, № 10. – С. 3050–3061.
14. *Гуржи Р. Н.* Теплопроводность металлов с равным числом электронов и дырок / Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович // Физика твердого тела. – 1969. – Т. 11, № 11. – С. 3109–3118.
15. *Гуржи Р. Н.* Электронный звук в металлах. / Р. Н. Гуржи, В. М. Конторович // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1969. – Т. 55, № 9. – С. 1105–1116.
16. *Second Sound in solid Helium* / C. C. Ackermann, B. Bertman, H. A. Fairbank, R. A. Guyer // Phys. Rev. Letters. – 1966. – Vol. 16. – P. 789–801.
17. *Ackerman C. C.* Second Sound in solid Helium-3 / C. C. Ackermann, W. C. Overton // Phys. Rev. Letters. – 1969. – Vol. 22. – P. 764–778.
18. *McNelly T. F.* Heat pulses in NaF: Onset of second sound / T. F. McNelly, S. J. Rogers, D. J. Chanin, R. J. Rollefson, W. M. Goubau, G. E. Schmidt, J. A. Krumhansl, R. O. Pohl // Phys. Rev. Letters. – 1970. – Vol. 24. – P. 100–116.
19. *Jackson H. E.* Thermal Conductivity, Second Sound and Phonon-Phonon Interaction in NaF / H. E. Jackson, C. T. Walker // Phys. Rev. B. – 1971. – Vol. 3, № 4. – P. 1428–1439.
20. *Narayanamurti V.* Observation of second sound in Bismuth / V. Narayanamurti, R. C. Dunes // Phys. Rev. Lett. – 1972. – Vol. 28, № 22. – P. 1461–1465.
21. *Пешков В. П.* Определение скорости распространения второго звука в гелии II / В. П. Пешков // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1946. – Т. 16, вып. 8. – С. 1001–1010.
22. *Питаевский Л. П.* Второй звук в твердом теле / Л. П. Питаевский // Усп. физ. наук. – 1968. – Т. 95, вып. 1. – С. 139–144.
23. *Ахиезер А. И.* К теории вторичных волн / А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов // Укр. фіз. журн. – 1985. – Т. 30. – С. 1248–1262.
24. *Ахиезер А. И.* О поглощении звука в твердых телах / А. И. Ахиезер // Журн. эксперимент. и теорет. физики. – 1938. – Т. 8, № 12. – С. 1318–1329.
25. *Ахиезер А. И.* Газодинамика квазичастиц. I. Общая теория / А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов // Физика низких температур. – 1994. – Т. 20, № 12. – С. 1199–1238.
26. *Ахиезер А. И.* Газодинамика квазичастиц. II. Кинетические коэффициенты в уравнениях переноса квазичастиц / А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов // Физика низких температур. – 1995. – Т. 21, № 1. – С. 3–23.
27. *Халатников И. М.* Теория сверхтекучести / И. М. Халатников. – М.: Наука, 1970. – 160 с.
28. *Nemchenko K.* Sound and dissipative relaxation in superfluid ^3He - ^4He mixtures / K. Nemchenko, S. Rogova // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. Фізика. – 2007. – Вип. 21. – С. 57–62.
29. *Nemchenko K.* Second Sound Contribution to Temperature Gradient Evolution in Superfluid Mixtures / K. Nemchenko, S. Rogova // J. Low Temp. Phys. – 2008. – Vol. 150, № 3–4. – P. 187–193.
30. *Nemchenko K.* Heat and ^3He Transfer by Second Sound in Superfluid Helium at Low Temperatures / K. Nemchenko, S. Rogova // J. Molecular Liquids. – 2010. – Vol. 151. – P. 9–11.
31. *Немченко К. Э.* Математическое моделирование переноса тепла в жидком гелии при конечных размерах нагревателя / К. Э. Немченко, Ю. В. Рогов, С. Ю. Рогова // Вісн. Харків. нац. ун-ту ім. В. Н. Каразіна. – 2010. – № 925, вип. 14. – С. 155–161.

Поступила в редакцию
24.03.11