

О. М. Хлуд

Институт проблем
машиностроения
им. А. Н. Подгорного
НАН Украины, г. Харьков,
e-mail: hlud.olga@mail.ru

УДК 519.85

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОЙ УПАКОВКИ ГОМОТЕТИЧЕСКИХ ЭЛЛИпсоИДОВ В КОНТЕЙНЕРЕ МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

Ключові слова: оптимальна
упаковка, гомотетичні еліпсоїди,
 ϕ -функції, нелінійне програмування,
процедура LOFRT.

Розглядається задача оптимізації упаковки гомотетичних однаково орієнтованих еліпсоїдів. Будується математична модель у вигляді задачі нелінійного програмування. Пропонується алгоритм пошуку локально оптимальних розв'язків з використанням гомотетичних перетворень еліпсоїдів та оптимізаційної процедури, що дозволяє звести задачу з великою кількістю нерівностей до послідовності задач з меншим числом нерівностей. Наводяться результати чисельних експериментів.

Введение

Задачи упаковки и раскроя (Cutting and Packing) относятся к классу NP-сложных и являются предметом исследования вычислительной геометрии, а методы их решения – новым направлением теории исследования операций.

Несмотря на то, что задача упаковки шаров уже давно предмет теоретических и практических исследований, интерес к исследованию задачи упаковки эллипсоидов возрос лишь в последние несколько лет. Этот класс задач имеет широкий спектр научных и практических применений, в частности, при разработке высокопрочных керамических материалов, выращивании кристаллов, моделировании структуры жидкостей, кристаллов и стекла, моделировании движения и прессования сыпучих веществ, в термодинамике при переходе жидкостей в кристаллическую форму, а также в современной биологии при моделировании размещения хромосом в ядрах человеческих клеток.

Многие публикации посвящены решению данного класса задач (см., например, [1–4]).

В данной работе рассматривается задача упаковки заданного набора гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов в контейнере минимального объема. Предлагаются конструктивные средства математического моделирования (с использованием метода ϕ -функций), учитывающих особенности задачи, и эффективные методы поиска допустимых и локально-оптимальных решений.

1. Постановка задачи

Имеется набор гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов E_i , $i \in I_N = \{1, 2, \dots, N\}$, заданных параметрами a_i, b_i, c_i в собственной системе координат $O_i x_i y_i z_i$. Полагая, что начало собственной системы координат находится в центре его симметрии. Положение E_i в пространстве R^3 определяется переменным вектором трансляции $v_i = (x_i, y_i, z_i) \in R^3$, где R^3 – евклидово пространство.

В качестве контейнера Ω , характеризующегося вектором переменных метрических характеристик p , рассматривается либо прямоугольный параллелепипед P переменной длины $2A$, ширины $2B$ и высоты $2C$, т. е. $p = (A, B, C)$, либо эллипсоид E , заданный параметрами A, B, C в фиксированной системе координат $O x y z$ с переменным коэффициентом гомотетии λ , т. е. $p = (\lambda)$.

В зависимости от вида контейнера рассматриваются следующие функции цели: $F = A \cdot B \cdot C$, если $\Omega \equiv P$; $F = \lambda$, если $\Omega \equiv E$.

Задача. Упаковать набор одинаково ориентированных гомотетичных эллипсоидов $\{E_i(u_i), i \in I_N\}$, в контейнер Ω так, чтобы функция цели F достигала своего минимального значения.

2. Математическая модель

Основными ограничениями поставленной задачи являются – непересечение эллипсоидов, т. е.

$$\text{int}E_i(v_i) \cap \text{int}E_j(v_j) = \emptyset, \quad i < j \in I_N, \quad (1)$$

– включение эллипсоида в область размещения, т. е.

$$E_i(v_i) \subset \Omega \Leftrightarrow \text{int}E_i(v_i) \cap \text{int}\Omega^* = \emptyset, \quad i \in I_N, \quad (2)$$

где $\Omega^* = R^3 \setminus \text{int}\Omega$.

Как известно [5], конструктивным средством математического моделирования ограничений (1), (2) является метод ϕ -функций Стояна [6]. В терминах ϕ -функций ограничение (1) имеет вид $\Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0$, где

$$\Phi_{ij}(v_i, v_j) = \frac{(x_j - x_i)^2}{(a_j + a_i)^2} + \frac{(y_j - y_i)^2}{(b_j + b_i)^2} + \frac{(z_j - z_i)^2}{(c_j + c_i)^2} - 1 \quad (3)$$

– ϕ -функция для эллипсоидов $E_i(v_i)$ и $E_j(v_j)$, а ограничение (2) описывается неравенством $\Phi_i(v_i) \geq 0$, где $\Phi_i(v_i)$ – ϕ -функция для эллипсоида $E_i(v_i)$ и объекта Ω^* . При этом

$$\text{если } \Omega \equiv P, \text{ то } \Phi_i(v_i) = \min_{k=1, \dots, 6} \chi_k(v_i), \quad (4)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_1(v_i) &= -x_i + A - a_i, & \chi_2(v_i) &= -y_i + B - b_i, & \chi_3(v_i) &= -z_i + C - c_i, \\ \chi_4(v_i) &= x_i + A - a_i, & \chi_5(v_i) &= y_i + B - b_i, & \chi_6(v_i) &= z_i + C - c_i, \end{aligned}$$

$$\text{если } \Omega \equiv E, \text{ то } \Phi_i(v_i) = 1 - \frac{(x_i)^2}{(\lambda A - a_i)^2} + \frac{(y_i)^2}{(\lambda B - b_i)^2} + \frac{(z_i)^2}{(\lambda C - c_i)^2}, \quad (5)$$

при условии, что E_i и E гомотетичны.

Математическая модель поставленной задачи может быть представлена так:

$$\min F(u), \quad \text{s. t. } u \in W, \quad (6)$$

$$W = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij}(v_i, v_j) \geq 0, \Phi_i(v_i) \geq 0, \zeta \geq 0\}, \quad (7)$$

где $u = (p, v_1, \dots, v_N)$ – вектор переменных, $p = (A, B, C)$, если $\Omega \equiv P$, $p = (\lambda)$, если $\Omega \equiv E$, R^σ – арифметическое евклидово пространство размерности σ , $\zeta \geq 0$ – система дополнительных ограничений на метрические характеристики контейнера Ω .

Задача (6)–(7) является многоэкстремальной задачей нелинейного программирования, где целевая функция линейна или квадратична, а множество допустимых решений задается с использованием квадратичных функций (3), (5) и кусочно-линейных (4).

4. Метод решения

Для поиска локальных минимумов задачи (6)–(7) используется следующий подход. В основе – метод мультистарта и оптимизационная процедура, включающая поиск допустимых стартовых точек и локальную оптимизацию, которая является развитием алгоритмов, предложенных в статьях [7, 8]. В качестве локально-оптимального решения выбирается наилучший из полученных локальных экстремумов.

Полагаем, что стартовые размеры контейнера Ω_0 достаточно большие и гарантируют размещение эллипсоидов E_i в контейнере. Для контейнера $\Omega \equiv P$ в качестве стартовых параметров выбираем A_0, B_0, C_0 , а для $\Omega \equiv E$ – стартовое значение λ . При этом, не теряя общности, полагаем, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{N-1} \geq a_N$.

Пусть коэффициенты гомотетии λ_i эллипсоидов $E_i, i \in I_N$, являются переменными. Тогда $u = (v, \lambda) \in R^\sigma$ – вектор переменных, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in R^N$.

Шаг 1. Выбираем точку $u^{0(1)} = (v^0, \lambda^0)$, где $v_i^0 = (x_i^0, y_i^0, z_i^0) \in \Omega_0$ выбирается случайно, $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_N^0), \lambda_i^0 = 0, i \in I_N$.

В качестве стартовой точки для дальнейшей оптимизации выбираем $u^{0(1)}$ и переходим к шагу 2.

Шаг 2. Решаем задачу

$$\max_{u \in W' \subset R^\sigma} \sum_{i=1}^N a_i \lambda_i, \quad (8)$$

$$W' = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij}(u) \geq 0, \Phi_i(u) \geq 0, 0 \leq \lambda_i \leq 1, j > i, i \in I_N\}, \quad (9)$$

В результате решения задачи (8)–(9) получаем точку глобального максимума $u^{(0(2))} = (v^{(0(2))}, \lambda^{(0(2))})$.

В качестве стартовой точки для дальнейшей оптимизации выбираем $u^{(0(2))}$ и переходим к шагу

3.

Шаг 3. Решаем задачу (6)–(7). В результате решения получаем точку локального минимума $u^{(0(3))} = (p^{(0(3))}, v^{(0(3))})$.

Шаг 4. В качестве стартовой точки для дальнейшей оптимизации выбираем точку $u^{(0(3))} = (v^{(0(3))}, \lambda^{(0(3))})$ при фиксированных размерах контейнера. Решаем вспомогательную задачу вида

$$\max_{u \in W'' \subset R^\sigma} \sum_{i=1}^N (a_i \lambda_i)^2, \quad (10)$$

$$W'' = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij}(u) \geq 0, \Phi_i(u) \geq 0, a^- \leq a_i \lambda_i \leq a^+, i > j = 1, \dots, N\}, \quad (11)$$

$$a^- = \{a_i, i \in I_N\}, \quad a^+ = \{a_i, i \in I_N\}.$$

В результате решения задачи (10)–(11) получаем точку локального максимума $u^{(0(4))} = (v^{(0(4))}, \lambda^{(0(4))})$.

Шаг 5. Ранжируем по убыванию $\tilde{a}_i = \lambda_i^{(0(4))} a_i, i \in I_N$. Формируем последовательность $(i_1, i_2, \dots, i_{N-1}, i_N)$, такую, что $\tilde{a}_{i_1} \geq \tilde{a}_{i_2} \geq \dots \geq \tilde{a}_{i_{N-1}} \geq \tilde{a}_{i_N}$.

Осуществляем сравнение a_i и \tilde{a}_{i_j} : если $\lambda_i^{(0(4))} \geq 1$, то полагаем $\lambda_{i_j}^{(0(5))} = 1$, если $\lambda_i^{(0(4))} < 1$, то полагаем $\lambda_{i_j}^{(0(5))} = \lambda_i^{(0(4))}$. Формируем точку $u^{(0(5))} = (v^{(0(5))}, \lambda^{(0(5))})$ и переходим к следующему шагу.

Шаг 6. Стартуя из точки $u^{(0(5))} = (v^{(0(5))}, \lambda^{(0(5))})$, решаем задачу (8)–(9). В результате решения получаем точку глобального максимума $u^{(0(6))} = (v^{(0(6))}, \theta^{(0(6))}, \lambda^{(0(6))})$. В противном случае переходим к шагу 1.

Стартуя из точки $u^{(0(6))}$, решаем задачу (6)–(7) и получаем точку локального минимума $u^{(6)} = (p^{(6)}, v^{(6)})$.

Шаг 7. Генерируем случайно точку q_1 . Если $q_1 \notin E_i, i \in I_N, q_1 \in \Omega$, то в качестве параметров размещения дополнительного эллипсоида с полуосями $a_{q_1} = a_1, b_{q_1} = b_1, c_{q_1} = c_1$, и коэффициентом гомотетии $\lambda_{q_1}^0 = \varepsilon$ выбираем точку q_1 .

Стартуя из точки $u^{(0(7))} = (v^{(6)}, v_{q_1}^0, \lambda_{q_1}^0)$, при фиксированных размерах контейнера решаем следующую вспомогательную задачу:

$$\max_{u \in W \subset R^\sigma} a_{q_1} \lambda_{q_1}, \quad (12)$$

$$W_\lambda = \{u \in R^\sigma : \chi(u) \geq 0, 0 \leq \lambda_{q_1} \leq 1\}, \quad (13)$$

где $u = (v, v_{q_1}, \lambda_{q_1}) \in R^\sigma, v = (v_1, \dots, v_N)$,

$$\chi(u) = \min\{\Phi_\tau(u), \Phi_l(u), \tau = 1, \dots, m, l \in I_N\},$$

$m = 0,5 \cdot N \cdot (N + 1)$.

В результате решения задачи (12)–(13) получаем точку локального максимума $u^{(0(7))} = (v^{(0(7))}, v_{q_1}^{(0(7))}, \lambda_{q_1}^{(0(7))})$.

Осуществляем поиск $a_j \leq \lambda_{q_1} a_{q_1}, b_j \leq \lambda_{q_1} b_{q_1}, j \in I_N$. Если такой эллипсоид E_j существует, то принимаем $v_j = v_{q_1}$ по аналогии с алгоритмом, предложенным в работе [7].

Формируем точку $u^{(7)} = (p^{(6)}, v^{(7)})$. Стартуя из точки $u^{(7)} = (p^{(6)}, v^{(7)})$, решаем задачу (6)–(7). Получаем точку локального минимума $u^{(7)} = (p^{(7)}, v^{(7)})$, причем $u^* = u^{(7)} = (p^*, v^*, \theta^*)$.

С целью минимизации числа нелинейных неравенств, формирующих область допустимых решений в задачах нелинейного программирования вида (6)–(7), предлагается алгоритм, который позволяет значительно сократить вычислительные ресурсы (время и память).

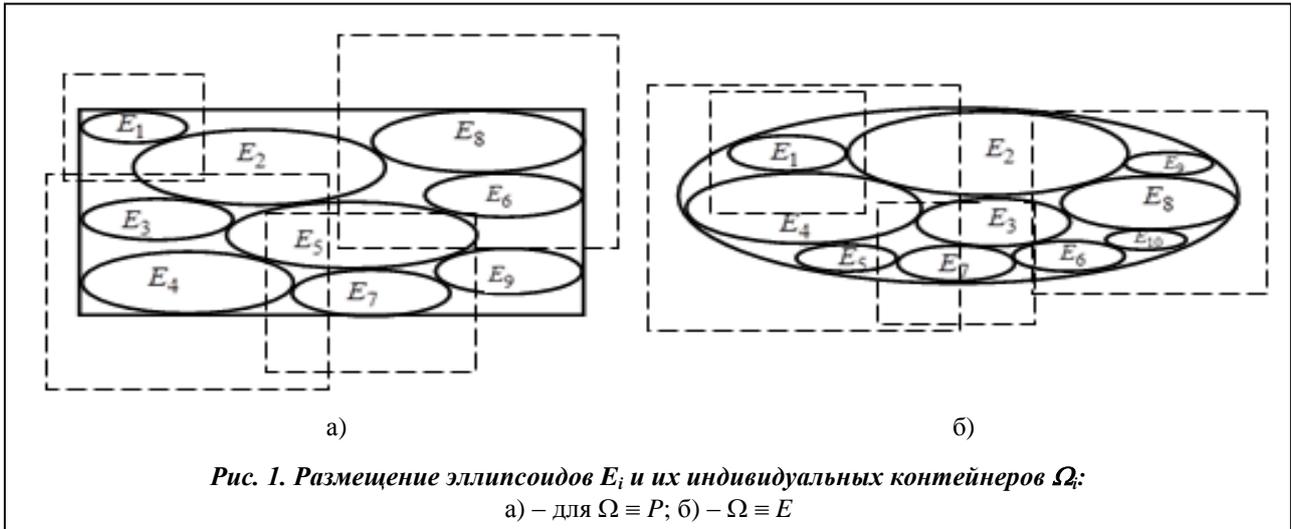


Рис. 1. Размещение эллипсоидов E_i и их индивидуальных контейнеров Ω_i :
 а) – для $\Omega \equiv P$; б) – $\Omega \equiv E$

Алгоритм локальной оптимизации с преобразованием области допустимых решений (LOFRT)

В основе алгоритма лежит оптимизационная процедура LOFRT, предложенная в [9] для задачи оптимального размещения эллипсов и состоит в следующем.

Пусть $u^{(0)} \in W$ – допустимая точка. Около каждого эллипсоида E_i описывается сфера S_i радиуса a_i , $i \in I_N$. Для каждой сферы S_i строится «индивидуальный» кубический контейнер $\Omega_i \supset S_i \supset E_i$, длина стороны которого составляет $2 \cdot (a_i + \varepsilon)$, $i \in I_N$. При этом S_i , E_i и Ω_i имеют один и тот же центр (x_i^0, y_i^0, z_i^0) , а стороны Ω_i параллельны соответствующим сторонам Ω . Выбирается $\varepsilon = \sum_{i=1}^N b_i / N$. Да-

лее фиксируется положение каждого индивидуального контейнера Ω_i . Каждый эллипсоид E_i может размещаться только внутри индивидуального контейнера Ω_i .

Далее определяется система дополнительных ограничений на вектор трансляции v_i для каждого эллипсоида E_i в виде $\Phi^{S_i \Omega_i^*} \geq 0$, $i \in I_N$, где

$$\Phi^{S_i \Omega_i^*} = \min \{-x_i + x_i^0 + \varepsilon, -y_i + y_i^0 + \varepsilon, -z_i + z_i^0 + \varepsilon, x_i - x_i^0 + \varepsilon, y_i - y_i^0 + \varepsilon, z_i - z_i^0 + \varepsilon\}$$

– phi-функция для S_i и $\Omega_i^* = R^3 \setminus \text{int} \Omega_i$.

Заметим, что неравенство $\Phi^{S_i \Omega_i^*} \geq 0$ эквивалентно системе линейных неравенств $-x_i + x_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $-y_i + y_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $-z_i + z_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $x_i - x_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $y_i - y_i^0 + \varepsilon \geq 0$, $z_i - z_i^0 + \varepsilon \geq 0$.

Очевидно, что если контейнеры Ω_i и Ω_j не имеют общих внутренних точек, т. е. $\Phi^{\Omega_i \Omega_j} \geq 0$, тогда не следует накладывать ограничение на непересечение эллипсоидов E_i и E_j . Например, для эллипсоидов E_1 и E_7 , E_4 и E_8 , E_1 и E_8 (см. рис. 1).

Далее формируется область допустимых решений

$$W_1 = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij} \geq 0, (i, j) \in \Xi_1, \Phi_i \geq 0, i \in \Xi_2, \Phi^{S_i \Omega_i^*} \geq 0, i \in I_N, l \geq l^0 - \varepsilon, w \geq w^0 - \varepsilon, h \geq h^0 - \varepsilon\},$$

$$\Xi_1 = \{(i, j) : \Phi^{\Omega_i \Omega_j} < 0\}, \quad \Xi_2 = \{i : \Phi^{\Omega_i \Omega_i} < 0\}.$$

Другими словами, из системы, которая описывает область W , исключаем phi-неравенства для тех пар эллипсоидов, у которых индивидуальные контейнеры не пересекаются. При этом добавляем вспомогательные неравенства $\Phi^{S_i \Omega_i^*} \geq 0$, описывающие условие включения S_i в соответствующий индивидуальный контейнер Ω_i , $i \in I_N$.

Затем осуществляем поиск точки локального минимума для подзадачи вида

$$\min_{u_{w_1} \in W_1 \subset R^\sigma} F(u_{w_1}).$$

Точка $u_{w_1}^*$ является стартовой точкой $u^{(1)}$ на второй итерации оптимизационной процедуры. На данном этапе вновь определяются все пары эллипсоидов с непересекающимися индивидуальными контейнерами, формируется соответствующая подобласть W_2 (аналогично W_1) и вычисляется точка локального минимума $u_{w_2}^* \in W_2$, которая используется в качестве стартовой точки $u^{(2)}$ на третьей итерации и т. д.

В общем случае, на k -м шаге, стартуя из точки $u^{(k-1)}$, решается подзадача вида

$$\min_{u_{w_k} \in W_k \subset R^\sigma} F(u_{w_k}), \quad (14)$$

$$W_k = \{u \in R^\sigma : \Phi_{ij}^k \geq 0, (i, j) \in \Xi_{k1}, \Phi_i^k \geq 0, i \in \Xi_{k2}, \Phi^{S_i \Omega_{ki}^*} \geq 0, i \in I_N, l \geq l_{w_k}^* - \varepsilon, w \geq w_{w_k}^* - \varepsilon, h \geq h_{w_k}^* - \varepsilon\}, \quad (15)$$

$$\Xi_{k1} = \{(i, j) : \Phi^{\Omega_{ki} \Omega_{kj}} < 0, i > j \in I_N\}, \quad \Xi_{k2} = \{i : \Phi^{\Omega_{ki} \Omega^*} < 0, i \in I_N\}.$$

Итерационная процедура заканчивается, когда $F(u_{w_k}^*) = F(u_{w_{k+1}}^*)$.

Точка $u^* = u^{(k)*} = u_{w_k}^* \in R^\sigma$ является точкой локального минимума задачи (6)-(7), где точка $u_{w_k}^* \in R^\sigma$ является точкой локального минимума на последней итерации.

Таким образом, для $O(n^2)$ пар эллипсоидов в контейнере LOFRT процедура позволяет осуществлять проверку phi-функций, в общем случае только для $O(n)$ пар эллипсоидов (это зависит от размеров эллипсоидов и величины ε).

Параметр ε обеспечивает баланс между количеством неравенств в каждой подзадаче нелинейного программирования (14)-(15) и числом подзадач, с помощью которых можно найти локально-оптимального решения задачи (6)-(7).

Таким образом, предложенный алгоритм позволяет свести задачу (6)-(7) с количеством неравенств $O(n^2)$ к последовательности задач с количеством неравенств $O(n)$. Это приводит к значительному сокращению вычислительных ресурсов при решении задач нелинейного программирования.

5. Численные эксперименты

Чтобы продемонстрировать эффективность предлагаемых методов, приведем результаты численных экспериментов. Эксперименты проводились на компьютере Intel(R) Core(TM) i7-3630QM. Для поиска локальных минимумов использовался solver FindArgMin пакета Wolfram Mathematica 9. Во всех примерах осуществляется поиск 10 локальных минимумов.

В первых двух примерах рассматривается $N=20$ эллипсоидов, имеющих следующие размеры: $(a_1, b_1, c_1) = (30, 10, 10)$, $(a_2, b_2, c_2) = (9, 3, 3)$, $(a_3, b_3, c_3) = (7, 5, 2, 5, 2, 5)$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 4, \dots, 11\}$, $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 12, \dots, 20\}$.

Пример 1. Размещение эллипсоидов в контейнере-параллелепипеде, соответствующее точке локального минимума u^* . Контейнер имеет объем $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 3213,92$ при $A^* = 30$, $B^* = 10,713$, $C^* = 10$.

Пример 2. Размещение эллипсоидов в контейнере-эллипсоиде, соответствующее точке локального минимума u^* . Контейнер имеет коэффициент гомотетии $\lambda^* = F(u^*) = 0,32099$ при стартовых размерах контейнера (эллипсоида) $A = 121,5$, $B = 40,5$, $C = 40,5$.

Далее рассматривается упаковка $N = 50$ эллипсоидов, имеющих следующие размеры:

$$(a_1, b_1, c_1) = (60, 20, 20), (a_2, b_2, c_2) = (30, 10, 10), (a_3, b_3, c_3) = (18, 6, 6),$$

$$\{(a_i, b_i, c_i) = (10, 5, 3, 5, 3, 5), i = 4, \dots, 8\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 8, \dots, 13\},$$

$$\{(a_i, b_i, c_i) = (8, 2, 5, 2, 7, 5), i = 14, \dots, 17\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (7, 5, 2, 5, 2, 5), i = 18, \dots, 24\},$$

$$\{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 25, \dots, 40\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 41, \dots, 50\}.$$

Пример 3. Размещение эллипсоидов в контейнере $\Omega \equiv P$, соответствующее точке локального минимума u^* . Контейнер имеет объем $V^* = 8 \cdot F(u^*)$, $F(u^*) = 33874,5$ при $A^* = 84,686$, $B^* = 20$, $C^* = 20$.

Использование LOFRT процедуры позволило значительно сократить время решения задачи. В частности, для примера 3 время решения без использования алгоритма – 13 часов, с его применением – 5 часов).

Пример 4. Размещение эллипсоидов в контейнере-эллипсоиде, соответствующее точке локального минимума u^* . Контейнер имеет коэффициент гомотетии $\lambda^* = F(u^*) = 0,45775$ при стартовых размерах контейнера (эллипсоида) $A = 160, B = 55, C = 55$.

Пример 5. Рассматривается упаковка $N = 50$ эллипсоидов, имеющих следующие размеры:
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (30, 10, 10), i = 1, 2\}, \{(a_3, b_3, c_3) = (18, 6, 6), \{(a_i, b_i, c_i) = (10,5, 3,5, 3,5), i = 4, \dots, 8\},$
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 8, \dots, 13\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (8,25, 2,75, 2,75), i = 14, \dots, 17\},$
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (7,5, 2,5, 2,5), i = 18, \dots, 24\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 25, \dots, 40\},$
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 41, \dots, 50\}.$

Размещение эллипсоидов в $\Omega \equiv P$, соответствующее точке локального минимума u^* . Контейнер имеет объем $V^* = 8 \cdot F(u^*), F(u^*) = 8030,25$ при $A^* = 80,3025, B^* = 10, C^* = 10$.

Использование алгоритма LOFRT позволило уменьшить время решения задачи для примера 5 на 10 часов (время решения без использования алгоритма – 18 часов, с его применением – 8 часов).

Пример 6. Рассматривается упаковка $N = 75$ гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов, имеющих следующие размеры:

$\{(a_i, b_i, c_i) = (10,5, 3,5, 3,5), i = 1, \dots, 15\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (9, 3, 3), i = 16, \dots, 30\},$
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (7,5, 2,5, 2,5), i = 31, \dots, 45\}, \{(a_i, b_i, c_i) = (6, 2, 2), i = 46, \dots, 60\},$
 $\{(a_i, b_i, c_i) = (3, 1, 1), i = 61, \dots, 75\}.$

Контейнер имеет объем $V^* = 8 \cdot F(u^*), F(u^*) = 4825,16$ при $A^* = 219,917, B^* = 3,5, C^* = 6,29$.

6. Выводы

Построена математическая модель задачи оптимальной упаковки гомотетичных одинаково ориентированных эллипсоидов в виде задачи нелинейного программирования. Предложен метод поиска локально-оптимальных упаковок в прямоугольном параллелепипеде минимального объема и контейнере, имеющем форму эллипсоида, с минимальным коэффициентом гомотетии. Предлагаемый подход использует метод мултистарта, гомотетические преобразования эллипсоидов и специальную оптимизационную процедуру, позволяющую значительно сократить вычислительные ресурсы. Эффективность используемых алгоритмов подтверждается результатами численных экспериментов.

Предложенный в работе подход может быть использован для построения допустимых стартовых точек в задаче поиска оптимальных упаковок гомотетичных эллипсоидов, допускающих непрерывные вращения.

Литература

1. Wright, S. J. Packing Ellipsoids with Overlap / S. J. Wright // SIAM Review. – 2013. Vol. 55 (4). – P. 671–706.
2. Kallrath, J. Packing ellipsoids into volume-minimizing rectangular boxes / J. Kallrath // Global Optimization. – 2015. – P. 1–32.
3. Pankratov, A. Quasi-phi-functions in packing of ellipsoids / A. Pankratov, T. Romanova, O. Khud // Radioelectronics & Informatics. – 2015. – Vol. 68. – P. 37–42.
4. Lubachevsky, B. D. Geometric properties of random disk packings / B. D. Lubachevsky, F. H Stillinger // Statistical Physics. – 1990. – Vol. 60. – P. 561–583.
5. Bennell, J. A. A tutorial in irregular shape packing problem / J. A. Bennell, J. F. Oliveira // Oper. Research Soc. 2009. – Vol. 60. – P. 93–105.
6. Chernov, N. Mathematical model and efficient algorithms for object packing problem / N. Chernov, Yu. Stoyan, T. Romanova // Computational Geometry: Theory and Appl. – 2010. – Vol. 43, № 5. – P. 533–553.
7. Стецюк, П. І. NLP-задача упаковки гомотетичних еліпсів у прямокутний контейнер / П. І. Стецюк, Т. Є. Романова, І. О. Субота // Теорія оптимальних рішень: зб. наук. пр. – Київ: Ін-т кібернетики ім. В. М. Глушкова НАН України. – 2014. – С. 139–146.
8. Stoyan, Yu. G. A mathematical model and a solution method for the problem of placing various-sized circles into a strip / Yu. G. Stoyan, G. N. Yaskov // European Operational Research. – 2004. – Vol. 156. – P. 590–600.
9. Stoyan, Y. Quasi-phi-functions and optimal packing of ellipses / Y. Stoyan, A. Pankratov, T. Romanova // Global Optimization. – 2015. – Vol. 65. – P. 283–307.

Поступила в редакцию 03.04.16