

Таблица 2. Наближене обчислення 3D коефіцієнтів Фур'є при $r = 2$

Номер коефіцієнта			Число відрізків	Точне значення коефіцієнта	Наближене значення коефіцієнта	Похибка наближення
m	n	p	ℓ	$I_1^3(m, n, p)$	$\Phi_1^3(m, n, p)$	$\rho(I_1^3, \Phi_1^3)$
2	2	3	10	-0,00004199418546	-0,00004199418546	0
			20		-0,00004199418546	0
			30		-0,00004199418546	0
6	7	8	10	-0,00000149979233	-0,00000149979233	0
			50		-0,00000149979233	0
			70		-0,00000149979233	0
10	7	8	10	-0,000000899875398	-0,000000899875403	$5,1 \cdot 10^{-15}$
			40		-0,000000899875404	$6,5 \cdot 10^{-15}$
			70		-0,000000899875403	$5,5 \cdot 10^{-15}$

Література

1. Литвин О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
2. Литвин О. М. Оператори фінітного тривимірного перетворення Фур'є / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Радиоелектроника и информатика. – 2004. – № 4 (29). – С. 130–133.
3. Литвин О. М. Оператори фінітного тривимірного дискретно-неперервного перетворення Фур'є на основі методу Файлона та трилінійних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого порядку / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Інформаційно-керуючі системи на залізничному транспорті. – 2005. – № 1, 2 (51, 52). – С. 19–23.
4. Литвин О. М. Тривимірні фінітні перетворення Фур'є та Хартлі з використанням інтерфлетації функцій / О. М. Литвин, В. М. Удовиченко // Вестн. Нац. техн. ун-та «ХПИ». Автоматика и приборостроение. – Харьков, 2005. – № 38. – С. 90–130.
5. Задирака В. К. Цифровая обработка сигналов / В. К. Задирака, С. С. Мельникова. – Киев: Наук. думка, – 1993. – 294 с.
6. Выгодский М. Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. – М: Наука, – 1982. – 335 с.

Надійшла до редакції
1.04.11

УДК 536.24

А. П. Слесаренко, д-р. физ.-мат. наук
Ю. О. Кобринович

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: kobrinovich.jul@mail.ru)

СТРУКТУРНО-РАЗНОСТНЫЙ ПОДХОД К МАТЕМАТИЧЕСКОМУ МОДЕЛИРОВАНИЮ ВЫСОКОСКОРОСТНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ С НЕСТАЦИОНАРНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ НА ПОВЕРХНОСТИ КОНСТРУКТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Впервые построены приближенные аналитические структуры решения задач теплопроводности, точно, с использованием PS-функций удовлетворяющие нестационарным граничным условиям при любых зависимостях от времени коэффициента теплообмена на поверхности конструктивного элемента и температуры окружающей среды. На их базе с использованием по времени и координатам трехслойной и девятиточечной разностных схем соответственно построены структурно-разностные математические

модели высокоскоростных нестационарных тепловых процессов. Приведены результаты решения задачи с нестационарными граничными условиями.

Вперше побудовані наближені аналітичні структури розв'язання задач теплопровідності, що точно, з використанням PS-функцій задовольняють нестационарні граничні умови за будь-яких залежностей від часу коефіцієнта теплообміну на поверхні конструктивного елемента і температури навколишнього середовища. На їх базі з використанням за часом і координатами тришарової і дев'ятиточкової різницевої схем відповідно побудовано структурно-різницевої математичні моделі високошвидкісних нестационарних теплових процесів. Наведено результати розв'язання задачі з нестационарними граничними умовами.

Введение. Обзор методов решения краевых задач

В областях неканонической формы с криволинейными участками границ для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных наиболее широкое применение получили метод конечных разностей [1–3] и метод конечных элементов [4, 5]. Менее широкое, но в ряде случаев эффективное применение к решению задач теплопроводности, механики, электродинамики и др. получили метод интегральных уравнений [6, 7] и вариационно-разностные методы [8–10].

При решении методом конечных разностей краевых задач математической физики встает вопрос о разностной аппроксимации в окрестности границ областей. Даже в криволинейных ортогональных координатах (эллиптические, параболические, цилиндрические и др.) [11] возникает необходимость аппроксимации границ, т.к. они в основном не совпадают с линиями координат. Перенесение граничных условий на прямоугольную сетку может привести при больших градиентах искомой функции на границе, к большим погрешностям в полученных решениях задач.

В связи с этим исследователи пошли по пути введения локальных криволинейных неортогональных координат [12, 13], естественным образом связанных с особенностями форм частей тел и численного решения методом конечных разностей краевых задач теплопроводности в этих координатах. Положительным является то, что отпадает необходимость в интерполяции граничных условий. Однако если граница области в каждом из вариантов имеет сложный вид, то нужно создавать соответствующие алгоритмы расчета для каждой конкретной области. В этих случаях можно получить физически неадекватные решения при больших значениях вторых производных от координат.

Метод интегральных уравнений основан на замене исходных дифференциальных уравнений в частных производных на интегральные уравнения на поверхности области. Решения уравнений находятся численно. В этом случае параметр границы делится на конечное число изотермических участков. Решение уравнения за счет интегрирования «сглаживается», т.е. точность решения возрастает. Появляется возможность решать задачи для областей любой заданной формы, т.к. проблема с удовлетворением граничных условий не возникает. Но применение метода интегральных уравнений для решения нелинейных нестационарных задач теплопроводности, механики и др. встречает принципиальные трудности математического характера.

Метод конечных элементов позволяет эффективно численно решать дифференциальные уравнения с частными производными. Однако многое еще предстоит сделать для совершенствования этого метода в целях эффективного его применения для решения нелинейных нестационарных задач математической физики, для которых метод конечных разностей пока остается единственным способом получения численных решений.

В связи с этим в научно-технической литературе в последнее время предлагается решать численные дифференциальные уравнения в частных производных в областях неканонической формы, совместно используя несколько методов [14, 15].

Однако в направлении развития численно-аналитических методов встречались, как отмечали Г. И. Марчук, Дж. Ортега, Р. Шехтер и др. ученые, серьезные трудности матема-

тического характера, связанные с построением базисных (координатных) функций для каждого момента времени, точно удовлетворяющих граничным условиям. Особо трудными для решения и важными с научно-технической точки зрения здесь являются задачи с нестационарными граничными условиями. В случаях, когда за очень малый промежуток времени температура в конструктивном элементе изменяется на 1000 и более градусов, перечисленные выше методы математически моделировали высокоскоростные процессы теплообмена с большой погрешностью.

Поэтому очень актуальным стал вопрос разработки таких численно-аналитических подходов к решению задач теплопроводности с высокоинтенсивными нестационарными граничными условиями, в которых бы базисные функции для численно-аналитического подхода точно удовлетворяли нестационарным граничным условиям с любым высокоинтенсивным вариантом теплообмена на поверхности конструктивного элемента.

В статье предлагается структурно-разностный подход к решению задач теплопроводности с нестационарными граничными условиями, позволяющий с использованием PS-функций [16] строить приближенные аналитические структуры решения [17] задач теплопроводности точно, на аналитическом уровне по координатам и времени, удовлетворяющие нестационарным граничным условиям, при любых заданных зависимостях от времени коэффициентов теплообмена и температуры окружающей среды. При этом по временной и пространственным координатам применяются трехслойная и пятислойная разностные схемы соответственно, это позволяет свести исходную математическую модель нестационарного процесса теплопроводности к последовательности структурно-разностных моделей для каждого момента времени. Использование конечно-разностных схем высокого порядка точности позволило построить структурно-разностные модели высокой степени адекватности по отношению к описанию высокоскоростного нестационарного температурного процесса.

2. Постановка задачи

Рассмотрим высокоскоростной тепловой процесс в конструктивном элементе с нестационарными граничными условиями

$$\begin{aligned}
 c(t)\rho \frac{\partial T(x_1, y_1, t)}{\partial t} &= \lambda(t) \left(\frac{\partial^2 T(x_1, y_1, t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x_1, y_1, t)}{\partial y_1^2} \right) + F_{\text{всм}}(x_1, y_1, t); \\
 \left(\pm \frac{\partial T(x_1, y_1, t)}{\partial x_1} + h(t)T(x_1, y_1, t) \right) \Bigg|_{x=\pm l} &= h(t)T_{\text{ср}}(x_1, y_1, t); \\
 \left(\pm \frac{\partial T(x_1, y_1, t)}{\partial y_1} + h(t)T(x_1, y_1, t) \right) \Bigg|_{y=\pm l} &= h(t)T_{\text{ср}}(x_1, y_1, t); \\
 T(x_1, y_1, 0) &= \theta(x_1, y_1); \quad x_1, y_1 \in \Omega; \quad 0 < t < \infty,
 \end{aligned} \tag{1}$$

где функции $c(t)$, $\lambda(t)$, $h(t)$ характеризуют изменения во времени удельной теплоемкости материала конструктивного элемента, его коэффициента теплопроводности, относительного коэффициента теплоотдачи соответственно; ρ – плотность материала конструктивного элемента.

Перейдем к безразмерным величинам координат и времени

$$\begin{aligned}
 c(t) &= c_0 \vartheta(t); & \lambda(t) &= \lambda_0 \zeta(t); & h(t) &= \alpha \cdot \lambda^{-1}; & a &= c_0 \rho \cdot \lambda_0^{-1}; & \text{Bi}(t) &= h(t)l; \\
 x_1 &= x \cdot l^{-1}; & y_1 &= y \cdot l^{-1}; & \text{Fo} &= atl^{-2}; & T(x, y, 0) &= \theta(x, y); & x, y &\in \Omega; & 0 < \text{Fo} < \infty; \\
 \vartheta(\text{Fo})T(x, y, \text{Fo})'_{\text{Fo}} &= \zeta(\text{Fo}) \left(T(x, y, \text{Fo})''_{xx} + T(x, y, \text{Fo})''_{yy} \right) + F_{\text{ист}}(x, y, \text{Fo})l^2 \cdot a^{-1}; \\
 \left(\pm T(x, y, \text{Fo})'_x + \text{Bi}(\text{Fo})T(x, y, \text{Fo}) \right) \Big|_{x=\pm 1} &= \text{Bi}(\text{Fo})T_{\text{cp}}(x, y, \text{Fo}); \\
 \left(\pm T(x, y, \text{Fo})'_y + \text{Bi}(\text{Fo})T(x, y, \text{Fo}) \right) \Big|_{y=\pm 1} &= \text{Bi}(\text{Fo})T_{\text{cp}}(x, y, \text{Fo}).
 \end{aligned}$$

При $\nu \neq \text{const}$ и $\zeta \neq \text{const}$ возникают принципиальные проблемы метаматематического характера определения собственных функций оператора и в связи с этим аналогичные проблемы сведения решения задачи к решению соответствующих интегральных уравнений. Решение задачи (1) теплопроводности с нестационарными граничными условиями рассмотрим на примере задачи для бесконечной призмы прямоугольного поперечного сечения $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ (3)

$$\begin{aligned}
 T(x, y, \text{Fo})'_{\text{Fo}} &= \Delta T(x, y, \text{Fo}) + F(x, y, \text{Fo}); \\
 \left(\pm T(x, y, \text{Fo})'_x + \text{Bi}(\text{Fo})T(x, y, \text{Fo}) \right) \Big|_{x=\pm 1} &= \text{Bi}(\text{Fo})T_{\text{cp}}(x, y, \text{Fo}); \\
 \left(\pm T(x, y, \text{Fo})'_y + \text{Bi}(\text{Fo})T(x, y, \text{Fo}) \right) \Big|_{y=\pm 1} &= \text{Bi}(\text{Fo})T_{\text{cp}}(x, y, \text{Fo}); \\
 T(x, y, 0) &= \theta(x, y); & x, y &\in \Omega; & 0 < \text{Fo} < \infty.
 \end{aligned} \tag{2}$$

3. Построение структурно-разностной математической модели

Математическая модель строится на базе совместного применения аналитических структур решения [17], точно удовлетворяющих нестационарным граничным условиям, и разностных схем повышенного порядка точности. Задача сводится к решению последовательности структурно-разностных систем уравнений для каждого момента времени, в которых число уравнений для неопределенных коэффициентов при базисных функциях равно числу узлов. С помощью метода наименьших квадратов преобразуем прямоугольную систему уравнений в квадратную.

4. Построение структур решения

Структуру решения задачи (2) представим в виде

$$T(x, y, \text{Fo}) = \Phi_0(x, y, \text{Fo}) + \sum_{k,l} C_{k,l} \chi_{k,l}(x, y, \text{Fo}) \tag{3}$$

где $\Phi_0(x, y, \text{Fo}) = T_{\text{cp}}(\text{Fo})$; $\theta(x, y) = T_m(x, y, 0)$; $F(x, y, \text{Fo}) = T_m(x, y, \text{Fo})'_{\text{Fo}} - (T_m(x, y, \text{Fo}))''_{xx} + T_m(x, y, \text{Fo})''_{yy}$; $\chi_{kl}(x, y, \text{Fo}) = P_k(x)P_l(y) - W_1(x, y)[(P_k(x)'_x P_l(y) DW_1(x, y) - \text{Bi}(\text{Fo})P_k(x)P_l(y))|_{x=1}] - W_2(x, y)[(P_l(y)'_y P_k(x) DW_2(x, y) - \text{Bi}(\text{Fo})P_k(x)P_l(y))|_{y=1}]$; $C_{k,l}$ – неизвестные коэффициенты; $\Phi_0(x, y, \text{Fo})$ функция, точно удовлетворяющая нестационарным неоднородным граничным условиям; $\chi_{kl}(x, y, \text{Fo})$ – базисные функции, точно удовлетворяющие нестационарным однородным граничным условиям; $P_k(x), P_l(y)$ – нормированные полиномы Чебышева; $W_l(x, y)$ и $W_2(x, y)$ – PS-функции для прямоугольной призмы, $DW_1(x, y)$ и $DW_2(x, y)$ – производные $W_1(x, y)$ и $W_2(x, y)$ по x и y соответственно, с фиксированным значением $DW_1(x, y)$ и $DW_2(x, y)$ на границе.

PS-функции [16] для прямоугольной призмы приведены ниже

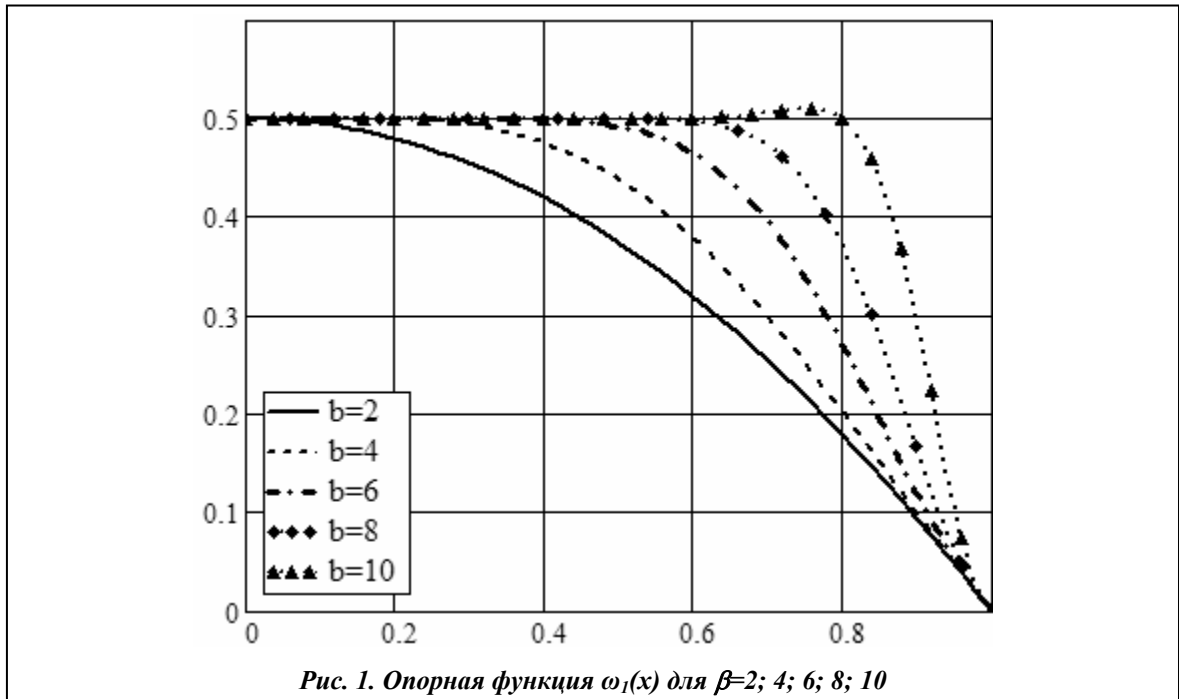


Рис. 1. Опорная функция $\omega_1(x)$ для $\beta=2; 4; 6; 8; 10$

$$W_1(x, y) = \omega_1(x) + (2\omega_2(y))^2 - \sqrt[n]{\omega_1(x)^\beta + (2\omega_2(y))^{2\beta}}; \quad n = 0,5 \cdot \beta - 1; \quad \beta = 2N;$$

$$W_2(x, y) = \omega_2(y) + (2\omega_1(x))^2 - \sqrt[n]{\omega_2(y)^\beta + (2\omega_1(x))^{2\beta}};$$

$$\omega_1(x) = 0,5(1 - x^2) \left(1 + \alpha_1 \cdot f_1(x) + \alpha_2 \cdot f_1(x)^2 + \alpha_3 \cdot f_1(x)^3 + \dots + \alpha_n \cdot f_1(x)^n \right),$$

$$\omega_2(y) = 0,5(1 - y^2) \left(1 + \alpha_1 \cdot f_2(x) + \alpha_2 \cdot f_2(x)^2 + \alpha_3 \cdot f_2(x)^3 + \dots + \alpha_n \cdot f_2(x)^n \right).$$

где $\alpha_1 = 0,25$ из условия нулевой кривизны опорных функций $\omega_1(x)$ и $\omega_2(y)$ на границе призмы, $\alpha_2, \dots, \alpha_n$ – обеспечивают наилучшие аппроксимационные свойства аналитических структур.

На рис. 1 показана опорная функция $\omega_1(x)$, удовлетворяющая условиям нулевой кривизны на границе призмы при $\beta = 2; 4; 6; 8; 10$ и обеспечивающая в качестве весовой функции наилучшие аппроксимационные свойства аналитических структур.

5. Спектральный признак устойчивости Неймана разностных схем

Математическую модель, описывающую нестационарные процессы в данной задаче, построим с использованием уравнений теплопроводности, разностных схем и структуры решения (3) задачи теплопроводности.

Рассмотрим разностные схемы [2, 3, 18], которые можно использовать для построения дискретной модели, а именно:

– двухслойную по времени

$$\left(T_{Fo} \right)_{2 i,j}^s = \left(T_{i,j}^s - T_{i,j}^{s-1} \right) \cdot Fo^{-1}, \quad s = 1, \dots, N;$$

– трехслойную по времени

$$\left(T_{Fo} \right)_{3 i,j}^s = \left(T_{i,j}^s - T_{i,j}^{s-1} \right) \cdot Fo^{-1}, \quad s = 1, 2;$$

$$\left(T_{Fo} \right)_{i,j}^s = \left(T_{i,j}^{s-2} - 4 \cdot T_{i,j}^{s-1} + 3 \cdot T_{i,j}^s \right) \cdot (2 \cdot Fo)^{-1}, \quad s > 2;$$

– пятиточечный «крест»

$$(\Delta T)_{5i,j}^s = h^{-2} \cdot (T_{i-1,j}^s - 4T_{i,j}^s + T_{i+1,j}^s + T_{i,j-1}^s + T_{i,j+1}^s); \quad (8)$$

– девятиточечный «большой крест»

$$(\Delta T)_{9\text{б.к.}i,j}^s = (12h^2)^{-1} \cdot (-T_{i-2,j}^s - T_{i,j-2}^s - T_{i+2,j}^s - T_{i,j+2}^s + 16(T_{i-1,j}^s + T_{i,j-1}^s + T_{i+1,j}^s + T_{i,j+1}^s) - 60T_{i,j}^s); \quad (9)$$

– «ящик»

$$(\Delta T)_{9\text{я.}i,j}^s = (6h^2)^{-1} \cdot (T_{i-1,j-1}^s + T_{i+1,j+1}^s + T_{i-1,j+1}^s + T_{i+1,j-1}^s + 4(T_{i-1,j}^s + T_{i,j-1}^s + T_{i+1,j}^s + T_{i,j+1}^s) - 20T_{i,j}^s); \quad (10)$$

Найдем необходимое спектральное условие устойчивости [1] для следующих схем

$$\left(T_{Fo}'\right)_{2i,j}^s = (\Delta T)_{5i,j}^s, \quad (4)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{2i,j}^s = (\Delta T)_{9\text{б.к.}i,j}^s, \quad (5)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{2i,j}^s = (\Delta T)_{9\text{я.}i,j}^s, \quad (6)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{3i,j}^s = (\Delta T)_{5i,j}^s, \quad (7)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{3i,j}^s = (\Delta T)_{9\text{б.к.}i,j}^s, \quad (8)$$

$$\left(T_{Fo}'\right)_{3i,j}^s = (\Delta T)_{9\text{я.}i,j}^s, \quad (9)$$

задавая $(T)_{ij}^0 = e^{I(\mu i + \nu j)}$ в виде двумерной гармоники

$$(T)_{i,j}^s = \lambda^s(\mu, \nu, r) e^{I(\mu i + \nu j)} \quad (10)$$

где $r = \Delta Fo \cdot h^{-2}$, μ, ν – вещественные параметры.

Подставляя выражение (10) в разностные уравнения (4)–(9), найдем спектр разностных задач $\lambda(\mu, \nu, r)$, и определим r , для которого выполняется необходимое условие устойчивости Неймана $|\lambda(\mu, \nu, r)| \leq 1$ для схем (4)–(9) соответственно

$$\lambda_{2-5}(\mu, \nu, r) = r \cdot C(\mu, \nu) + 1;$$

$$\lambda_{2-9\text{б.к.}}(\mu, \nu, r) = r \cdot A(\mu, \nu) + 1;$$

$$\lambda_{2-9\text{я.}}(\mu, \nu, r) = r \cdot B(\mu, \nu) + 1;$$

$$\lambda_{3-5}(\mu, \nu, r) = 6^{-1} \cdot \left[4 + 2r \cdot C(\mu, \nu) \pm \sqrt{(4 + 2r \cdot C(\mu, \nu))^2 - 12} \right];$$

$$\lambda_{3-9\text{б.к.}}(\mu, \nu, r) = 6^{-1} \cdot \left[4 + 2r \cdot A(\mu, \nu) \pm \sqrt{(4 + 2r \cdot A(\mu, \nu))^2 - 12} \right];$$

$$\lambda_{3-9\text{я.}}(\mu, \nu, r) = 6^{-1} \cdot \left[4 + 2r \cdot B(\mu, \nu) \pm \sqrt{(4 + 2r \cdot B(\mu, \nu))^2 - 12} \right];$$

где $C(\mu, \nu) = 2(\cos(\mu) + \cos(\nu) - 2)$; $A(\mu, \nu) = 12^{-1} \cdot [-\cos(2\mu) - \cos(2\nu) + 16(\cos(\mu) + \cos(\nu)) - 60]$; $B(\mu, \nu) = 6^{-1} \cdot [\cos(\mu)\cos(\nu) + 4(\cos(\mu) + \cos(\nu)) - 20]$.

На рис. 2 представлен спектр $\lambda(\mu, \nu, r)$ для схем (4)–(9), на рис. 3 – больший из двух комплексных спектров $\lambda(\mu, \nu, r)$ для схем (7)–(8), удовлетворяющий необходимому условию устойчивости Неймана.

Необходимое условие устойчивости Неймана для схем (4) – (9) приведено в табл. 1.

Табл. 1. Максимальные значения параметра r , для схем (11)–(16)

Разностная схема по времени	Разностная схема по координатам	r
2-слойная	5-точечная	0,25
	9-точечная «большой крест»	0,255
	9-точечная «ящик»	0,444
3-слойная	5-точечная	0,5
	9-точечная «большой крест»	0,511
	9-точечная «ящик»	0,889

Таким образом, максимальное допустимое соотношение шага по времени к квадрату шага по координатам равномерной сетки, составляет 0,889 для разностной схемы повышенного порядка точности 3 слоя по времени и 9 точек по координатам, схема «ящик».

6. Вычислительный эксперимент

Проведен вычислительный эксперимент на временном интервале от $0,001Fo$ до $0,02Fo$. В качестве модельной выбрана задача, точное решение которой имеет вид

$$T_m(x, y, Fo) = T_{cp}(Fo) + (\varphi(x, Fo) - f_1(x)\varphi(x, Fo)'_x f_1(x)'_x + f_1(x)Bi(Fo)\varphi(x, Fo)) \times (\psi(y, Fo) - f_2(y)\psi(y, Fo)'_y f_2(y)'_y + f_2(y)Bi(Fo)\psi(y, Fo)); \quad x, y \in \Omega, 0 < Fo < 0,02;$$

где $\varphi(x) = \exp(-x^2)$, $\psi(y) = \exp(-y^2)$, $f_1(x) = 0,5(1 - x^2)$, $f_2(y) = 0,5(1 - y^2)$.

Температура среды и критерий Био осциллируют $T_{cp}(Fo) = 120 \cdot (1 - J_0(500 \cdot Fo))$, $Bi(Fo) = 70 \cdot (\sin(500 \cdot Fo) + 1)$.

Графики температуры среды и критерия Био представлены на рис. 4.

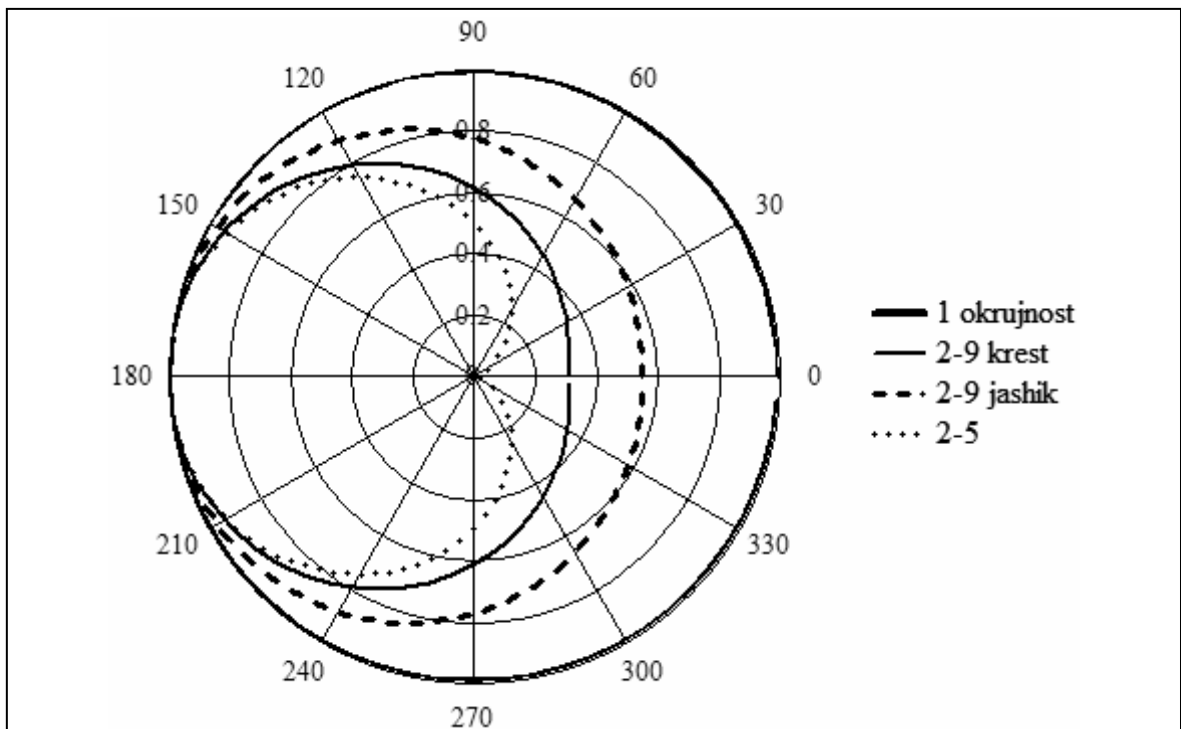
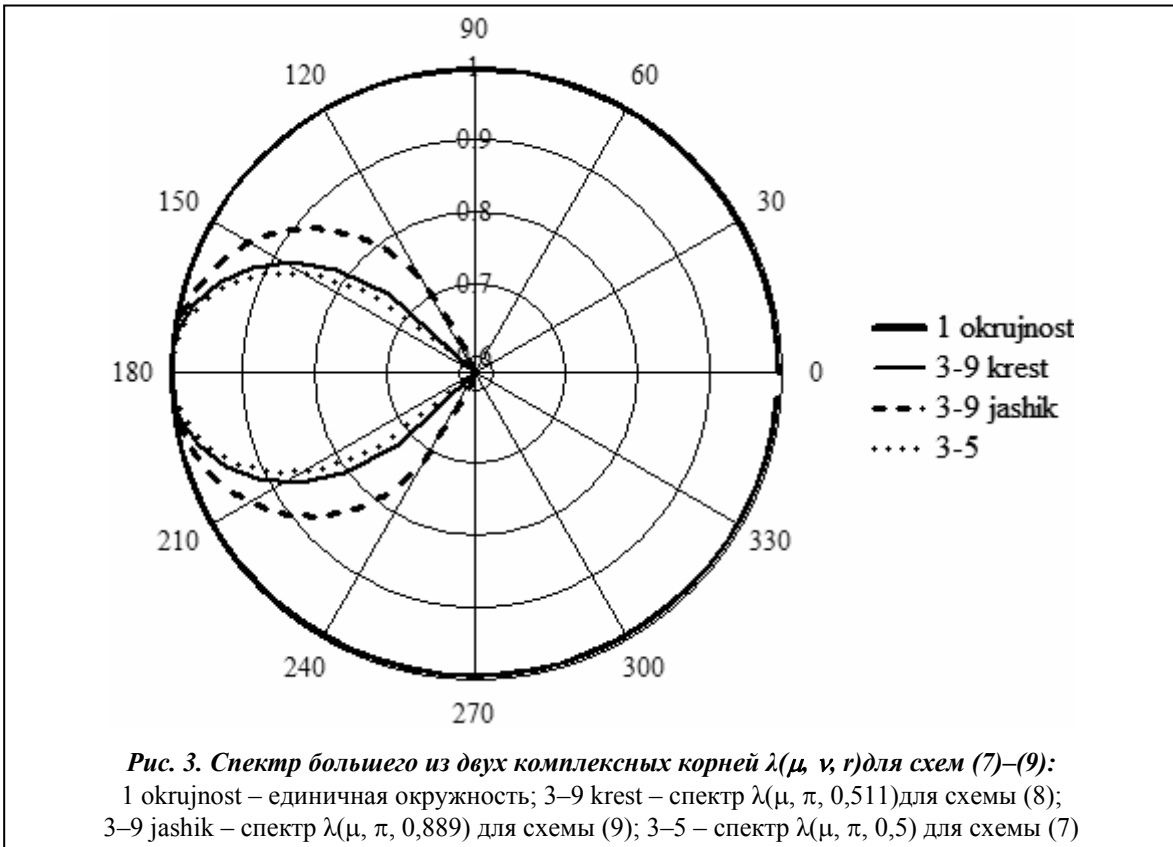


Рис. 2. Спектр $\lambda(\mu, \nu, r)$ для схем (11)–(13):

1 okrujnost – единичная окружность (внешний контур графика), 2–9 krest – спектр $\lambda(\mu, \pi, 0,255)$ для схемы (5); 2–9 jashik – спектр $\lambda(\mu, \pi, 0,444)$ для схемы (6); 2–5 – спектр $\lambda(\mu, \pi, 0,25)$ для схемы (4)



Для построения дискретной модели используем разностную схему (9), включающую 3 слоя по времени и 9 точек по координатам «ящик», для этой схемы $r \leq 0,889$. Структурно-разностная модель теплового процесса примет вид

$$\sum_{k,l} C_{k,l}^s \cdot [\chi_{k,l,i,j}^s - Fo \cdot (6h^2)^{-1} \cdot (\chi_{k,l,i-1,j-1}^s + \chi_{k,l,i+1,j+1}^s + \chi_{k,l,i-1,j+1}^s + \chi_{k,l,i+1,j-1}^s + 4(\chi_{k,l,i-1,j}^s + \chi_{k,l,i,j-1}^s + \chi_{k,l,i+1,j}^s + \chi_{k,l,i,j+1}^s) - 20\chi_{k,l,i,j}^s)] = \sum_{k,l} C_{k,l}^{s-1} \chi_{k,l,i,j}^{s-1} + Fo \cdot (6h^2)^{-1} \cdot (\Phi_{0i-1,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j+1}^s + \Phi_{0i-1,j+1}^s + \Phi_{0i+1,j-1}^s + 4(\Phi_{0i-1,j}^s + \Phi_{0i,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j}^s + \Phi_{0i,j+1}^s) - 20\Phi_{0i,j}^s) - (\Phi_{0i,j}^s - \Phi_{0i,j}^{s-1}) + Fo \cdot (6h^2)^{-1} F_{mi,j}^s, \quad s = 1,2;$$

$$\sum_{k,l} C_{k,l}^s \cdot [3\chi_{k,l,i,j}^s - Fo \cdot (3h^2)^{-1} \cdot (\chi_{k,l,i-1,j-1}^s + \chi_{k,l,i+1,j+1}^s + \chi_{k,l,i-1,j+1}^s + \chi_{k,l,i+1,j-1}^s + 4(\chi_{k,l,i-1,j}^s + \chi_{k,l,i,j-1}^s + \chi_{k,l,i+1,j}^s + \chi_{k,l,i,j+1}^s) - 20\chi_{k,l,i,j}^s)] = 4 \sum_{k,l} C_{k,l}^{s-1} \chi_{k,l,i,j}^{s-1} - \sum_{k,l} C_{k,l}^{s-1} \chi_{k,l,i,j}^{s-1} + Fo \cdot (3h^2)^{-1} \cdot (\Phi_{0i-1,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j+1}^s + \Phi_{0i-1,j+1}^s + \Phi_{0i+1,j-1}^s + 4(\Phi_{0i-1,j}^s + \Phi_{0i,j-1}^s + \Phi_{0i+1,j}^s + \Phi_{0i,j+1}^s) - 20\Phi_{0i,j}^s) - (\Phi_{0i,j}^{s-2} - 4\Phi_{0i,j}^{s-1} + 3\Phi_{0i,j}^s) + Fo \cdot (3h^2)^{-1} F_{mi,j}^s, \quad s > 2;$$

В табл. 2 представлены значения температуры призмы для трех моментов времени в трех точках и максимальная относительная погрешность вычисления. Расчет проводился на сетке 2 500 узлов, шаг по времени 0,001Fo, опорные функции $\omega_1(x)$ и $\omega_2(y)$ при $\beta = 6$, использовались 55 координатных функций, коэффициенты опорной функции $\alpha_1 = 0,25$; $\alpha_2 = 11,613$; $\alpha_3 = -31,452$; $\alpha_4 = 28,066$; $\alpha_5 = -8,477$.

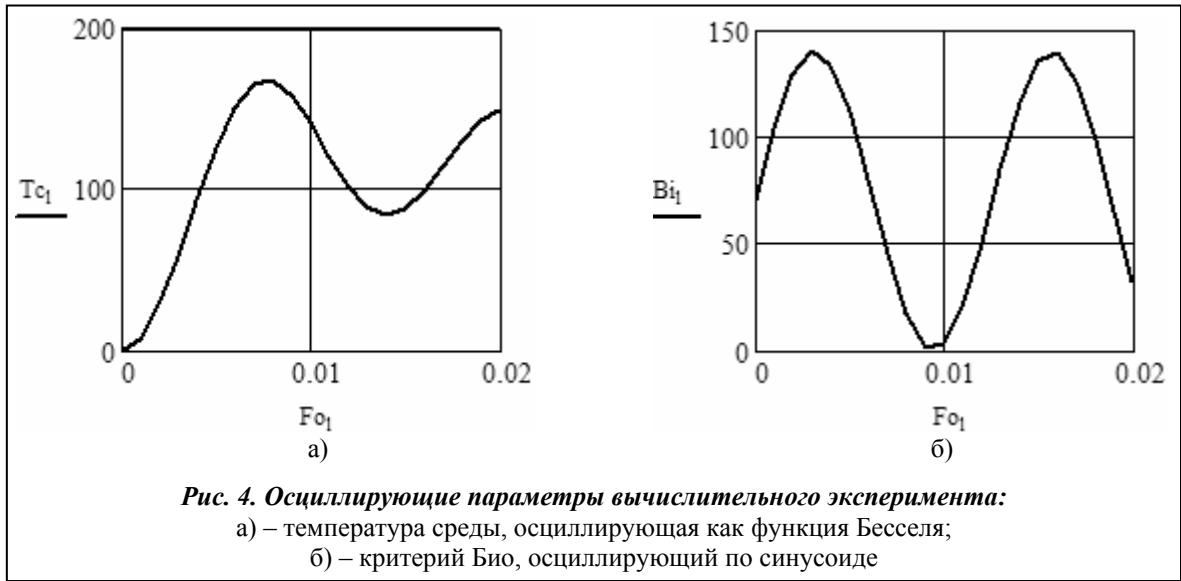
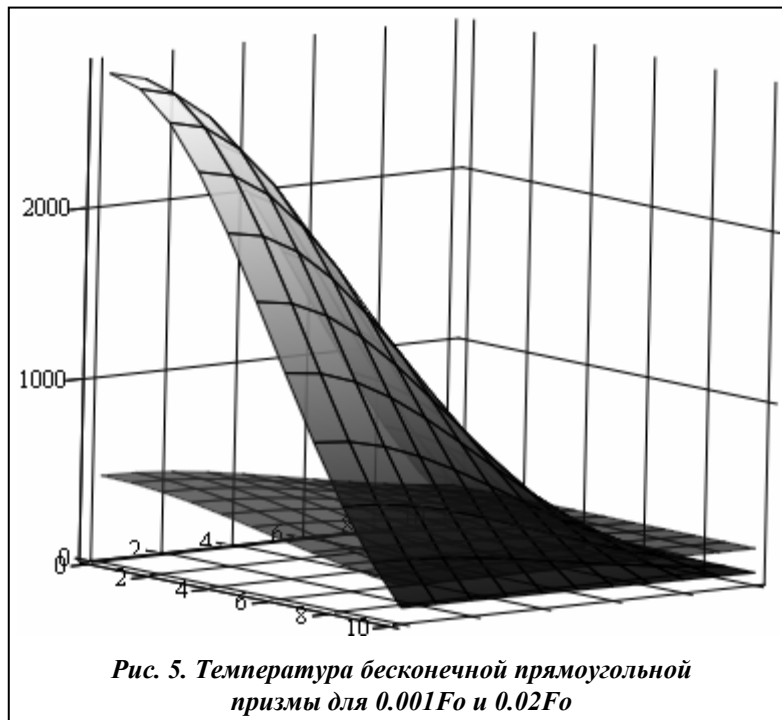


Табл. 2 Температура и максимальная относительная погрешность вычисления температуры призмы

Fo	Значение	Температура призмы в точках			ε max, %
		(0;0)	(0,5;0,5)	(1;1)	
0,001	Приближенное	2793,053664	960,812122	7,525945	0,627137
	Точное	2793,101000	960,800050	7,518958	–
0,01	Приближенное	147,241542	143,470465	141,447156	0,009788
	Точное	147,253752	143,479893	141,446948	–
0,02	Приближенное	437,103265	248,592003	149,650447	0,017083
	Точное	437,128829	248,606142	149,647627	–

На рис. 5 показан график температуры прямоугольной призмы для двух моментов времени: верхний график – для 0.001Fo, нижний – 0.02Fo.



Выводы

Впервые построены приближенные аналитические структуры решения задач теплопроводности, точно удовлетворяющие нестационарным граничным условиям и содержащие в своих структурах в качестве аналитических модулей любые заданные функции от времени, включая импульсный характер поведения во времени коэффициента теплообмена и температуры окружающей среды. Это позволяет впервые в мировой научной практике проводить качественный анализ тонкой структуры динамических процессов, включая нестационар-

ные процессы теплопроводности, не меняя алгоритмов расчета температурных полей конструктивных элементов при изменении функциональной зависимости во времени как коэффициента теплообмена, так и температуры окружающей среды. Применение PS-функций для точного учета геометрической информации в структурах решения нестационарных задач теплопроводности позволяет строить соответствующие структуры решения и входящие в них базисные функции физически адекватными протекающим скоростным тепловым процессам на поверхности конструктивных элементов. Применение интерполяционных формул по времени для коэффициентов при базисных функциях в узлах интерполяции позволяет впервые получать в аналитическом виде по координатам и времени приближенные аналитические решения высокоскоростных тепловых процессов при интенсивном нестационарном теплообмене на поверхностях конструктивных элементов.

Литература

1. Годунов С. К. Разностные схемы. Введение в теорию / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука, 1973. – 400 с.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.
3. Рихтмайер Р. Разностные методы решения краевых задач: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 421 с.
4. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике: Пер. с англ. под ред. Б. Е. Победри. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
5. Деклу Ж. Метод конечных элементов: Пер. с франц. – М.: Мир, 1976 – 96 с.
6. Гандель Ю. В. Математические вопросы метода дискретных токов. Обоснование численного метода дискретных особенностей решения двумерных задач дифракции электромагнитных волн / Ю. В. Гандель, С. В. Еременко, Т. С. Полянская. – Харьков: Харьков. ун-т, 1992. – 145 с.
7. Гандель Ю. В. Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений: Учеб. пособие. Ч. I Введение в методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов / Ю. В. Гандель. – Харьков: Харьков. нац. ун-т, 2001. – 90 с.
8. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики / Г. И. Марчук. – М.: Наука, 1977. – 455 с.
9. Ортега Дж. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными: Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 558 с.
10. Шехтер Р. С. Вариационный метод в инженерных расчетах / Р. С. Шехтер. – М.: Мир, 1971. – 291 с.
11. Cunsolo D. Accuracy in non- orthogonal grid reference frames / D. Cunsolo, P. Orlandi // Numerical methods in laminar and turbulent flow; Proc. First Intern. Conf., Swansea, Wales, July 17-21, 1978. – London, Pentech Press, 1978. – P. 899–912.
12. McWhorter J. C. III. Numerical Anisotropic Heat Conduction Solutions Using Boundary-Fitted Coordinate Systems / J. C. McWhorter III, M. H. Sadd // J. Heat Transfer. – May 1980. – Vol. 102, № 2. – P. 308–402.
13. Математическое моделирование нестационарных трехмерных температурных полей в телах произвольной сложной формы / Ю. Н. Кузнецов, В. П. Пухляков, А. З. Стерншиш, Н. П. Кузнецова // Теплообмен – VII. – Минск, 1984. – С. 160–165.
14. Noor A. K. Reduction methods for nonlinear steady- state thermal analysis / A. K. Noor, C. D. Balch and M. A. Shibus // Int. J. Numer. Methods Engrg. – 1984. – Vol. 20, № 7. – P. 1323–1327.
15. Арентьев С. И. Автоматизация вычислительного процесса при решении задач теплопроводности методом конечных элементов для теплозащитных конструкций с нерегулярными границами // Инж.-физ. журн. – 1980. – Т. 38, № 5. – С. 888–894.
16. Слесаренко А. П. Идентификация нелинейной нестационарной зависимости мощности источника энергии от температуры на базе вариационно-структурного и проекционного методов / А. П. Слесаренко, Н. А. Сафонов // Пробл. машиностроения. – 2010. – Т. 13, №6. – С. 58–63.
17. Слесаренко А. П. Математическое моделирование тепловых процессов в телах сложной формы при нестационарных граничных условиях / А. П. Слесаренко // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, №4 – С. 72–80.
18. Ильин В. П. Численные методы решения задач электрооптики / В. П. Ильин. – Новосибирск: Наука, 1974. – 202 с.

Поступила в редакцию
23 июня 2011