УДК 621.318.001.2

А. Е. Божко, член-кор. НАН Украины

Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАН Украины
(г. Харьков, e-mail: bozhko@ipmach.kharkov.ua)

ПОГРЕШНОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Определяются погрешности выходных сигналов динамических систем в зависимости от погрешностей входных воздействий и погрешностей в передаточных функциях. Также определяются погрешности амплитуд и углов сдвига в колебательных системах.

Визначаються похибки вихідних сигналів динамічних систем залежно від похибок вхідних впливів і похибок у передатних функціях. Також визначаються похибки амплітуд і кутів зсуву в коливальних системах.

Введение

В данной работе предпринята попытка теоретически показать проявление систематических погрешностей в динамических системах. Большое внимание уделяется колебательным системам. Систематические погрешности являются функциональными. При известных функциональных зависимостях в любой динамической системе автоматические погрешности могут корректироваться с помощью поправок, компенсации. Систематические погрешности могут быть детерминированными (Δ) и случайными (ξ). Теории погрешностей Δ и ξ разные. Здесь будем рассматривать систематические погрешности на основе использования известных функциональных зависимостей в исследуемой системе [1].

Вначале рассмотрим динамические системы в общем виде, в которых выходная величина $x(p)$ связана с входной величиной $U(p)$, где $p = \frac{d}{dt}$, зависимостью

$$x(p) = U(p)W(p), \tag{1}$$

где $W(p)$ – передаточная функция системы.

В данном объекте на основании (1) функциональные погрешности следующие: $\Delta x(p)$, $\Delta U(p)$, $\Delta W(p)$. Введя эти погрешности в (1), получаем

$$x + \Delta x = (U + \Delta U)(W + \Delta W) = UW + U\Delta W + \Delta UW + \Delta U\Delta W \tag{2}$$

Из (2) видно, что

$$\Delta x = U\Delta W + \Delta UW + \Delta U\Delta W \tag{3}$$

Приведем (3) к виду

$$x\left(\frac{\Delta x}{x}\right) = UW\left(\frac{\Delta W}{W} + \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta U\Delta W}{UW}\right), \tag{4}$$

На основе (1) в выражении (4) сократим x и UW. Тогда получим

$$\varepsilon_x = \varepsilon_W + \varepsilon_U + \varepsilon_U\varepsilon_W, \tag{5}$$

где $\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{x}$; $\varepsilon_W = \frac{\Delta W}{W}$; $\varepsilon_U = \frac{\Delta U}{U}$.

Выражение (5) отражает изображение Лапласа функциональной относительной погрешности ε_x от относительных погрешностей ε_W, ε_U. Оригиналы этих погрешностей $\varepsilon_k(p)$, $k = U$, W были найдены, и изображения $\varepsilon_k(t)$, $k = U$, W определяются по формуле [2]

$$\varepsilon_k(p) = \int_0^\infty \varepsilon_k(t)e^{-pt}dt .$$

Если динамическая система является следящей, то тогда $\Delta U = 0$, а

$$\varepsilon_x = \varepsilon_W. \tag{6}$$

В большинстве случаев при заданном $U(t)$ погрешности ε_x определяются выражением (6). А это значит, что следует более подробно рассмотреть погрешности ε_W различных динамических систем. Если система является разомкнутой с передаточной функцией $W(p)$, то ее относительная ошибка $\varepsilon_W = \frac{\Delta W}{W}$. При последовательном соединении различных звеньев с передаточными функциями $W_s(p)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ передаточная функция системы $W(p) = \prod_{s=1}^{n} W_s(p)$. Если в каждой передаточной функции $W_s(p)$ имеется абсолютная погрешность $\Delta W_s(p)$, то абсолютная погрешность $\Delta W(p)$ в общей передаточной функции $W_s(p)$ определяется из соотношения

$$W + \Delta W = \prod_{s=1}^{n} \left(W_s + \Delta W_s\right). \tag{7}$$

Осуществим в (7) преобразования вида

$$W\left(1 + \frac{\Delta W}{W}\right) = \prod_{s=1}^{n} W_s\left(1 + \frac{\Delta W_s}{W_s}\right) = W\left(1 + \varepsilon_W\right) = \prod_{s=1}^{n} W_s \prod_{s=1}^{n}\left(1 + \varepsilon_{Ws}\right),$$

откуда получаем $1 + \varepsilon_W = \prod_{s=1}^{n}\left(1 + \varepsilon_{Ws}\right)$ и

$$\varepsilon_W = \left[\prod_{s=1}^{n}\left(1 + \varepsilon_{Ws}\right)\right] - 1. \tag{8}$$

Если одинаковые $\varepsilon_{Ws} = \varepsilon$, то $\varepsilon_W = (1 + \varepsilon)^n - 1$.

Итак, при последовательном соединении звеньев в динамической системе относительная погрешность в передаточной функции определяется выражением (8).

При параллельном соединении звеньев с передаточными функциями $W_s(p)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ общая передаточная функция системы выражается формулой $W(p) = \sum_{s=1}^{n} W_s(p)$. Если в каждой передаточной функции $W_s(p)$ имеется погрешность $\Delta W_s(p)$, то тогда $\Delta W(p)$ системы находится из выражения

$$W + \Delta W = \sum_{s=1}^{n} \left(W_s + \Delta W_s\right). \tag{9}$$

Как и для (7), осуществим в (9) преобразования

$$W\left(1 + \frac{\Delta W}{W}\right) = W\left(1 + \varepsilon_W\right) = \sum_{s=1}^{n} W_s\left(1 + \frac{\Delta W_s}{W_s}\right) = \sum_{s=1}^{n} W_s\left(1 + \varepsilon_s\right). \tag{10}$$

Если для всех звеньев $\varepsilon_s = \varepsilon$, то $\varepsilon_W = \varepsilon$.

Из (10) получаем общую относительную погрешность

$$\varepsilon_W = \left[\sum_{s=1}^{n} \frac{W_s}{W}\left(1 + \varepsilon_s\right)\right] - 1.$$

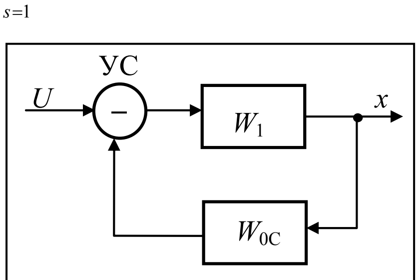

Рис. 1. Замкнутая динамическая система

Далее рассмотрим замкнутую систему вида (см. рис. 1), где $W_1 = W_1(p)$, $W_{0C} = W_{0C}(p)$ – передаточные функции разомкнутой системы и звеньев отрицательной обратной связи соответственно; УС – устройство разности сигналов U и xW_{0C}; x – выходной сигнал.

Передаточная функция данной системы следующая:

$$W = \frac{W_1}{1 + W_1 W_{0C}}. \tag{11}$$

При наличии погрешностей ΔW_1, ΔW_{0C} в передаточных функциях W_1 и W_{0C} выражение (11) принимает вид

$$W + \Delta W = \frac{W_1 + \Delta W_1}{1 + \left(W_1 + \Delta W_1\right)\left(W_{0C} + \Delta W_{0C}\right)}. \tag{12}$$

Представим (12) через относительные погрешности $\varepsilon_W = \dfrac{\Delta W}{W}$, $\varepsilon_{W1} = \dfrac{\Delta W_1}{W_1}$, $\varepsilon_{0C} = \dfrac{\Delta W_{0C}}{W_{0C}}$. Для этого осуществим следующие преобразования:

$$W\left(1 + \varepsilon_W\right) = \frac{W_1\left(1 + \varepsilon_{W1}\right)}{1 + W_1 W_{0C}\left(1 + \varepsilon_{W1}\right)\left(1 + \varepsilon_{W0C}\right)},$$

откуда

$$\varepsilon_W = \frac{W_1}{W}\,\frac{1 + \varepsilon_{W1}}{1 + W_1 W_{0C}\left(1 + \varepsilon_{W1}\right)\left(1 + \varepsilon_{W0C}\right)} - 1. \tag{13}$$

Выражением (13) описывается общая погрешность в передаточной функции замкнутой системы в функции погрешностей индивидуальных звеньев.

Далее перейдем к определению функциональных погрешностей колебательных систем (КС). Вначале рассмотрим КС с одной степенью свободы, движение которой описывается уравнением

$$m\frac{d^2 x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = F, \tag{14}$$

где m – масса; b, c – коэффициенты диссипации и жесткости соответственно; x – перемещение; F – сила.

Будем считать, что в (14) сила $F = F_0 + F_{\sim}$, где F_0 – постоянная, а $F_{\sim}$ – переменная составляющие. Сила F_0 вызывает в КС постоянное смещение $x_0 = F_0/C$, которое может иметь абсолютную Δx_0 или относительную $\varepsilon_{x0} = \dfrac{\Delta x_0}{x_0}$ погрешности. Рассмотрим более подробно Δx_0 и ε_{x0}. Для этого запишем

$$\Delta x_0 = \frac{F_0 + \Delta F_0}{C + \Delta C} - \frac{F_0}{C} = \frac{C\Delta F_0 - \Delta C F_0}{\left(C + \Delta C\right)C} = x_0\,\frac{\varepsilon_{F_0} - \varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C},$$

откуда

$$\varepsilon_{x_0} = \frac{\varepsilon_{F_0} - \varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C}, \qquad \varepsilon_C = \frac{\Delta C}{C}. \tag{15}$$

Индивидуальные зависимости ε_{x0} от ε_{F0} или ε_C на основании (15) имеют соответственно вид

$$\varepsilon_{x0}(F) = \varepsilon_{F0} \text{ при } \varepsilon_C = 0,$$

$$\varepsilon_{x0}\left(C\right) = -\frac{\varepsilon_C}{1 + \varepsilon_C} \text{ при } \varepsilon_{F0} = 0.$$

 ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2011, Т. 14, № 4

Переменная составляющая силы $F_{\sim}$, например $F_{\sim}$,$=F_a\sin\omega t$, где F_a – амплитуда; ω – круговая частота, вызывает гармоническое колебание КС $x(t) = x_a\sin(\omega t - \varphi)$, где x_a – амплитуда; φ – угол сдвига между $F(t)$ и $x(t)$.

Известно [3], что амплитуда и угол φ определяются формулами

$$\left.\begin{aligned} x_a &= \frac{F_a}{m\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}},\\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{b\omega}{\omega^2-\omega_0^2} \end{aligned}\right\}, \tag{16}$$

где ω_0 – собственная частота колебаний КС.

Перейдем к определению погрешности Δx_a системы (16). С учетом (16)

$$\Delta x_a = \frac{F_a+\Delta F_a}{(m+\Delta m)\sqrt{\left[(\omega+\Delta\omega)^2-(\omega_0+\Delta\omega_0)^2\right]^2+\left[\frac{b+\Delta b}{m+\Delta m}(\omega+\Delta\omega)\right]^2}} - \frac{F_a}{m\sqrt{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}. \tag{17}$$

Приведем (17) к относительным погрешностям

$$\varepsilon_{xa} = \frac{\Delta x_a}{x_a},\quad \varepsilon_m = \frac{\Delta m}{m},\quad \varepsilon_\omega = \frac{\Delta\omega}{\omega},\quad \varepsilon_{\omega 0} = \frac{\Delta\omega_0}{\omega_0},\quad \varepsilon_b = \frac{\Delta b}{b}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xa} = \Bigg\langle &\frac{1+\varepsilon_F}{1+\varepsilon_m}\left[\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\left(\frac{b}{m}\omega\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\times \\ &\times\left\{\left[\omega^2(1+\varepsilon_\omega)^2-\omega_0^2\left(1+\varepsilon_{\omega_0}\right)^2\right]^2+\left[\frac{\omega b(1+\varepsilon_b)(1+\varepsilon_\omega)}{m(1+\varepsilon_m)}\right]^2\right\}^{\frac{1}{2}}-1\Bigg\rangle. \end{aligned} \tag{18}$$

Индивидуальные зависимости ε_{xa} от ε_F, ε_ω, $\varepsilon_{\omega 0}$, ε_m, ε_b определяются из (18) при одной погрешности ≠ 0 и при других погрешностях = 0. Абсолютная погрешность Δφ угла сдвига φ в КС определяется выражением

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \operatorname{arctg}\frac{(\omega+\Delta\omega)(b+\Delta b)}{(\omega+\Delta\omega)^2-(\omega_0+\Delta\omega_0)^2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega b}{\omega^2-\omega_0^2} = \\ &= \operatorname{arctg}\frac{\omega b\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)\left(1+\frac{\Delta b}{b}\right)}{\omega^2\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega}\right)^2-\omega_0^2\left(1+\frac{\Delta\omega_0}{\omega_0}\right)^2}-\operatorname{arctg}\frac{\omega b}{\omega^2-\omega_0^2}. \end{aligned} \tag{19}$$

Из (19) получим относительную погрешность $\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\varphi}{\varphi}$ в виде

$$\varepsilon_\varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega b(1+\varepsilon_\omega)^2\left(1+\varepsilon_{\omega_0}\right)^2}{\omega^2(1+\varepsilon_\omega)^2-\omega_0^2\left(1+\varepsilon_{\omega_0}\right)^2}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega b}{\omega^2-\omega_0^2}\right)^{-1}-1. \tag{20}$$

Индивидуальные зависимости ε_φ от одной погрешности определяются из (20) при равенстве нулю остальных погрешностей.

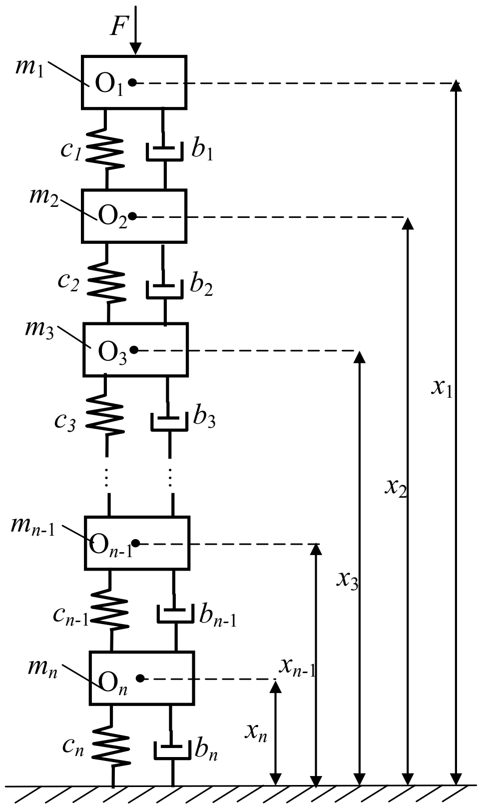

Рис. 2. КС с n-степенями свободы

Далее перейдем к КС с n-степенями свободы (см. рис. 2), где m_k – массы; C_k, b_k – коэффициенты жесткости и диссипации соответственно; x_k – перемещение, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Движение этой КС описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\left.\begin{aligned} & m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1 = F + b_1 \frac{dx_2}{dt} + c_1 x_2, \\ & m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + (b_1 + b_2)\frac{dx_2}{dt} + c_1 + c_2 = b_1 \frac{dx_1}{dt} + c_1 x_1, \\ & \ldots \\ & m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + (b_{n-1} + b_n)\frac{dx_n}{dt} + c_{n-1} + c_n = \\ & = b_{n-1} \frac{dx_{n-1}}{dt} + c_{n-1} x_{n-1} \end{aligned}\right\}. \quad (21)$$

Здесь также будем считать, что сила $F = F_0 + F_n \sin\omega t$. Тогда F_0 вызывает смещение всей КС, описываемое системой уравнений (21) в виде

$$\left.\begin{aligned} & c_1 x_{10} = F_0 + c_1 x_{20}, \\ & x_{20}(c_1 + c_2) = c_1 x_{10} + c_2 x_{30}, \\ & \ldots \\ & x_{(n-1)0}(c_{n-2} + c_{n-1}) = c_{n-3} x_{(n-2)0} + c_{n-1} x_{n0}, \\ & x_{n0}(c_{n-1} + c_n) = c_{n-1} x_{(n-1)0} \end{aligned}\right\}. \quad (22)$$

Из системы уравнений (22) видно, что каждое смещение x_{k0}, $k = 1, 2, \ldots, n$ зависит от $(n - 1)$ смещений x_{s0}, $s = 1, 2, \ldots, n - 1$, $s \neq k$, а это значит, что если имеем погрешности Δx_{k0} или $\varepsilon_{xk0} = \dfrac{\Delta x_{k0}}{x_{k0}}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, то из системы (20) можно найти зависимость ε_{xk0}, $k = 1, 2, \ldots, n$ от погрешностей в силе F_0, коэффициентов жесткости c_k и смещений x_{s0}, $s = 1, 2, \ldots, n - 1$, $s \neq k$ на основании следующей системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} & (c_1 + \Delta c_1)(x_{10} + \Delta x_{10}) = (F_0 + \Delta F_0) + (c_1 + \Delta c_1)(x_{20} + \Delta x_{20}), \\ & (c_1 + \Delta c_1 + c_2 + \Delta c_2)(x_{20} + \Delta x_{20}) = (c_1 + \Delta c_1)(x_{10} + \Delta x_{10}) + (c_2 + \Delta c_2)(x_{30} + \Delta x_{30}), \\ & \ldots \\ & (c_{n-2} + \Delta c_{n-2} + c_{n-1} + \Delta c_{n-1})\left[x_{(n-1)0} + \Delta x_{(n-1)0}\right] = \\ & = (c_{n-3} + \Delta c_{n-3})\left[x_{(n-2)0} + \Delta x_{(n-2)0}\right] + (c_{n-1} + \Delta c_{n-1})(x_{n0} + \Delta x_{n0}), \\ & (c_{n-1} + \Delta c_{n-1} + c_{n-2} + \Delta c_{n-2})(x_{n0} + \Delta x_{n0}) = (c_{n-1} + \Delta c_{n-1})\left[x_{(n-1)0} + \Delta x_{(n-1)0}\right] \end{aligned}\right\}. \quad (23)$$

Решение системы (23) дает результат Δx_{k0} или ε_{xk0}, $k = 1, 2, \ldots, n$. Переменная составляющая силы $F_{\sim} = F_a \sin\omega t$ вызывает в КС с n-степенями свободы колебания $x_k(t) = x_{ak}\sin(\omega t - \varphi_k)$, где φ_k – углы сдвига между $x_{(k-1)}(t)$ и $x_k(t)$.

Амплитуды x_{ak} определяются по формуле [3]

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2011, Т. 14, № 4

$$x_{a1}=\frac{\left|F_a+b_1\frac{dx_2}{dt}+c_1x_2\right|}{m_1\sqrt{\left(\omega^2-\omega_{01}^2\right)^2+\left(\frac{b_1\omega}{m_1}\right)^2}},\qquad x_{a2}=\frac{\left|b_1\frac{dx_1}{dt}+c_1x_1\right|}{m_2\sqrt{\left(\omega^2-\omega_{02}^2\right)^2+\left[\frac{(b_1+b_2)\omega}{m_2}\right]^2}},$$
$$\underset{k=3,n}{x_{ak}}=\frac{\left|b_{k-1}\frac{dx_{k-1}}{dt}+b_{k+2}\frac{dx_{k+2}}{dt}+c_{k-1}x+c_kx_{k+2}\right|}{m_k\sqrt{\left(\omega^2-\omega_{0k}^2\right)^2+\left[\frac{(b_{k-1}+b_k)\omega}{m}\right]^2}}. \qquad (24)$$

Углы сдвига φ_k определяются выражениями

$$\left.\begin{aligned}\varphi_2&=\operatorname{arctg}\frac{(b_1+b_2)\omega}{\omega^2-\omega_{02}^2},\\ \underset{k=1,n}{\varphi_k}&=\operatorname{arctg}\frac{(b_{k-1}+b_k)\omega}{\omega^2-\omega_{03}^2}\end{aligned}\right\}. \qquad (25)$$

Выражения (24), (25) по форме похожи на (16), а это значит, что погрешности Δx_{ak}, ε_{ak}, $\Delta\varphi_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$ могут определяться теми же методами, что ранее (для КС с одной степенью свободы [см. (17)–(20)]). Эти конкретные решения громоздки, а принципиально не отличаются от нахождения Δx_a, ε_{xa}, $\Delta\varphi$, ε_φ для КС с одной степенью свободы. Поэтому здесь они не приводятся.

Заключение

Таким образом, в результате данного исследования предложен метод определения функциональных погрешностей в динамических и, в частности, в колебательных системах. Результаты таких решений позволяют обеспечить или, в крайнем случае, повысить качество функционирования систем.

Литература

1. *Божко А. Е.* Теория функциональных погрешностей электромагнитных вибровозбудителей / А. Е. Божко // Доп. НАН України.– 2006. – № 9. – С. 86–95.
2. *Конторович М. И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях / М. И. Конторович. – М.: Наука, 1964.– 328 с.
3. *Божко А. Е* Динамико-энергетические связи колебательных систем / А. Е. Божко, Н. М. Голуб. – Киев: Наук. думка, 1980. – 188 с.

Поступила в редакцию
01.06.11