[1] **І. В. Сергієнко**, акад. НАН України
[2] **О. М. Литвин**, д-р. фіз.-мат. наук
[2] **О. О. Литвин**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. В. Ткаченко**, канд. фіз.-мат. наук
[3] **О. Л. Грицай**

[1] Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, м. Київ
[2] Українська інженерно-педагогічна академія, м. Харків,
e-mail: academ_mail@ukr.net
[3] ДП СКБ «Івченко-Прогрес», м. Запоріжжя,
e-mail: avt2007@outlook.com

Ключові слова: *інтерлінація функцій, циліндрична система координат, збереження класу диференційовності, сліди функції, сліди похідних, оператор ермітової інтерлінації.*

УДК 519.6

ПОБУДОВА ТА ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАТОРІВ ІНТЕРЛІНАЦІЇ ФУНКЦІЙ ТРЬОХ ЗМІННИХ НА СИСТЕМІ НЕПЕРЕТИННИХ КРИВИХ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ ІЗ ЗБЕРЕЖЕННЯМ КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНОСТІ

Пропонується метод побудови операторів інтерлінації ермітового типу функцій трьох змінних за допомогою їх слідів та слідів їх похідних на вказаних лініях в циліндричній системі координат. Метод дозволяє відновлювати ці функції у точках між заданою системою замкнутих неперетинних кривих в циліндричній системі координат, зберігаючи автоматично клас диференційовності, якому належить наближувана функція.

Вступ

Задача побудови функцій із заданими слідами на системі відомих кривих широко використовується при розв'язанні крайових задач в областях, границя яких обмежена заданими кривими в циліндричній системі координат. Найбільш відомими прикладами такої задачі є задача Діріхле для рівняння Лапласа в крузі і перша крайова задача для бігармонійного рівняння в крузі. Відомі розв'язки таких задач є функціями, які у внутрішніх точках області є неперервними із своїми частинними похідними довільного порядку. На практиці праві частини диференціальних рівнянь мають конкретний механічний зміст. Наприклад, для першої бігармонійної задачі права частина може бути недиференційовною і навіть розривною, оскільки вона означає навантаження на пластинку. Аналогічне твердження вірно також для розрахунку термопружного стану тривимірних тіл, наприклад оболонок, поверхня яких однозначно визначається в циліндричній системі координат. Крім того, граничні умови можуть використовувати оператори, нормальні похідні в яких не належать до класу $C^{\infty}(\partial G)$. Тому актуальною є задача побудови та дослідження операторів інтерлінації функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих в циліндричній системі координат із збереженням класу диференційовності для випадку, коли функції, що входять в граничні умови, належать класу $C^{r}(\partial G)$, $r < \infty$.

Постановка задачі

Вважаємо відомими систему кривих, заданих параметрично

$$\Gamma_k : \{(x, y\ z) : x = r_k(\phi)\cos\phi,\ y = r_k(\phi)\sin\phi,\ z = r_k(\phi),\ 0 \le \phi \le 2\pi\},\ k = 1, 2, \ldots, M,$$

$$z_1(\phi) < z_2(\phi) < \ldots < z_M(\phi), 0 \le \phi \le 2\pi,$$

та систему слідів функції $f(r, \phi, z) = u(r(\phi)\cos\phi, r(\phi)\sin\phi, z)$ і її частинних похідних

$$D^s f\Big|_{\Gamma_k} = \frac{\partial^{|s|} f(r,\varphi,z)}{\partial r^{s_1}\partial z^{s_2}}\Bigg|_{r=r_k(\varphi),\, z=z_k(\varphi)} = f_{k,s}(\varphi), \qquad s=(s_1,s_2),\quad |s|=s_1+s_2;\quad |s|=0,1,\ldots,N,$$

де $u(x, y, z) \in C^{\nu}(R^3)$, $\nu \ge N$ – деяка ν разів неперервно диференційовна функція, взагалі кажучи, невідома. Треба побудувати за допомогою цієї інформації оператор інтерлінації $E_{MN}f(r, \phi, z)$, що зберігає клас дифереційовності, якому належить наближувана функція, $f(r, \phi, z) \in C^{\nu}(R^3)$ і дозволить обчислювати наближено $f(r, \phi, z)$ у довільній точці (r, ϕ, z)між вказаними лініями.

Таким чином, вважаємо, що функція (взагалі кажучи, невідома) $f(r, \phi, z) \in C^{\nu}(D)$, $D \subset R^3$ задається на системі неперетинних замкнутих кривих $\Gamma_k : \{(r, \phi, z) : r = r_k(\phi) \in C^{\nu}[0, 2\pi],$

$z = z_k(\phi) \in C^{\nu}[0, 2\pi]\}$, $k = 1, 2, \ldots, M$ своїми слідами та слідами своїх похідних $f_{k,s}(\phi)$, $k = 1, 2, \ldots, M$; $s = (s_1, s_2)$, $|s| = s_1 + s_2$; $s = 0, 1, \ldots, N$.

Основні твердження статті

Введемо позначення $g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) = \phi + \beta_1(r - r_k(\phi)) + \beta_2(z - z_k(\phi))$. Врахуємо, що $g_k(r_k(\phi), \phi, z_k(\phi), \beta_1, \beta_2) = \phi$, $g_k(r_l(\phi), \phi, z_l(\phi), \beta_1, \beta_2) = \phi + \beta_1(r_l(\phi) - r_k(\phi)) + \beta_2(z_l(\phi) - z_k(\phi))$, $l \neq k$.

Введемо до розгляду систему функцій $h_{k,s}(r,\varphi,z)$, $G_{s_1}(\beta_1)$, $K_{s_2}(\beta_2)$, $k = 1, 2, \ldots, M$; $s_1, s_2 = 0, 1, \ldots, N$ з властивостями

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p \partial z^q} h_{k,s}(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_l} = \delta_{k,l}\delta_{p,N-s_1}\delta_{q,N-s_2}; \qquad k,l = 1,2,\ldots M; \quad p+q, \quad s_1+s_2 = 0,1,\ldots,N; \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\beta_1^{m_1} d\beta_1 = \delta_{0,m_1}; \qquad s_1, m_1 = 0,1,\ldots,N; \\ &\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\beta_2^{m_2} d\beta_2 = \delta_{0,m_2}; \qquad s_2, m_2 = 0,1,\ldots,N. \end{aligned} \tag{2}$$

Пропонується такий вигляд шуканого оператора інтерлінації:

$$E_{M,N} f(r,\varphi,z) = \sum_{k=1}^{M} h_{k,0,0}(r,\varphi,z)\int_0^{2\pi} G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2) f_{k,0,0}(g_k(\varphi,r,z,\beta_1,\beta_2))d\beta_2 d\beta_1 +$$

$$+\sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=1}^{N} h_{k,s}(r,\varphi,z)\int_0^{2\pi} G_{s_1}(\beta_1)\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{\left(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u\right)^{|s|-1}}{(|s|-1)!} d\beta_2 d\beta_1 du.$$

Теорема 1. Якщо $f_{k,s}(\phi) \in C^{\nu-|s|}[0, 2\pi]\}$, $|s| = 0, 1, \ldots, N$, $N \le \nu$, то $\forall\beta_1 \in [0, 2\pi]$, $\beta_2 \in [0, 1]$ функції $U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) = f_{k,0,0}(g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2)) \in C^{\nu}(D)$, $U_{k,s}(r, \phi, z) = \int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{\left(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u\right)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}du \in C^{\nu}(D)$, $D = R_+\times[0, 2\pi]\times R$, $R_+ = [0, \infty)$, мають властивості $U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^{\nu}(D)$, $U_{k,s1,s2}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^{\nu}(D)$.

Доведення. Враховуючи, що $r_k(\phi)$, $z_k(\phi)$, $\in C^{\nu}[0, 2\pi]$ маємо $g_k(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^{\nu}(D)$. Тому $U_{k,0,0}(r, \phi, z, \beta_1, \beta_2) \in C^{\nu}(D)$, бо суперпозиція функцій класу $C^{\nu}(D)$ належить цьому ж класу диференційовності. Далі, функція $U_{k,s_1,s_2}(r,\varphi,z)$ є визначеним інтегралом, верхня межа і підінтегральна функція в якому належать до $C^{\nu}(D)$.

Якщо врахувати, що

$$\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial z^{\alpha_1}\partial z^{\alpha_2}} U_{k,s_1,s_2}(r,\varphi,z) = \begin{cases} \beta_1^{\alpha_1}\beta_2^{\alpha_2}\displaystyle\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{\left(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u\right)^{|s|-|\alpha|-1}}{(|s|-|\alpha|-1)!}du, & |\alpha|<|s|, \\ \beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2} f_{k,s}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)) \in C^{r-|s|}(D), & |\alpha|=|s|, \\ \beta_1^{s_1}\beta_2^{s_2}\dfrac{\partial^{\alpha_1-s_1,\alpha_2-s_2}}{\partial z^{\alpha_1-s_1}\partial z^{\alpha_2-s_2}} f_{k,s}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)), & |s|-|\alpha|\ge 1, \quad \alpha_1-s_1 \vee \alpha_2-s_2 \ge \varphi. \end{cases}$$

то можна зробити висновок, що $U_{k,s}$ має неперервні похідні $\frac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2}}{\partial z^{\alpha_1}\partial z^{\alpha_2}}U_{k,s}$ до порядку $|\alpha| \le r$.

Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Якщо виконуються співвідношення (1), (2), то

$$V_{k,0,0}(r,\varphi,z)=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2)f_{k,0,0}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))d\beta_2 d\beta_1\in C^{\nu}(D^*)$$

$$V_{k,s}(r,\varphi,z)=\int_0^{2\pi}G_{s_1}(\beta_1)\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\int_0^{g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)} f_{k,s}(u)\frac{(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2)-u)^{|s|-1}}{(|s|-1)!}d\beta_2 d\beta_1 du\in C^{\nu}(D^*)$$

на $\Gamma_k : \{(r, \phi, z) : r = r_k(\phi), z = z_k(\phi)\}$ мають властивості

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}V_{k,0,0}(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_k}=\begin{cases}f_{k,0,0}(\varphi), & p=0,\ q=0\\ 0,1\le p+q\le N\end{cases}; \tag{3}$$

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}V_{k,s}(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_k}=\begin{cases}0, & 0\le p\le s_1-1;\quad 0\le q\le s_2-1,\\ f_{k,s}(\varphi), & p=s_1,\quad q=s_2,\\ \left.\int_0^{2\pi}G_{s_1}(\beta_1)\int_0^1 K_{s_2}(\beta_2)\frac{\partial^{p-s_1+q-s_2}}{\partial r^{p-s_1}\partial z^{q-s_2}}f_{k,s}(g_k(r,\varphi,z,\beta_1,\beta_2))d\beta_2 d\beta_1\right|_{\Gamma_k}=0,\\ & s_1<p\le N,\quad s_2<q\le N;\quad p+q,\quad s_1+s_2\le N.\end{cases} \tag{4}$$

Доведення. Якщо $p + q = 0$, то

$$V_{k,0,0}(r,\varphi,z)\Big|_{\Gamma_k}=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2)f_{k,0,0}(g_k(r_k(\varphi),\varphi,z_k(\varphi),\beta_1,\beta_2))d\beta_2 d\beta_1=$$

$$=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)d\beta_1\int_0^1 K_0(\beta_2)f_{k,0,0}(\varphi)d\beta_2=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)d\beta_1\int_0^1 K_0(\beta_2)d\beta_2 f_{k,0,0}(\varphi)=$$

$$=\left(\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)d\beta_1=1,\int_0^1 K_0(\beta_2)d\beta_2=1\right)=f_{k,0,0}(\varphi).$$

Далі отримуємо

$$\left.\frac{\partial^{p+q}V_{k,0,0}(r,\varphi,z)}{\partial r^p\partial z^q}\right|_{\Gamma_k}=\left.\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)\int_0^1 K_0(\beta_2)\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}f_{k,0,0}(g_k(r_k(\varphi),\varphi,z_k(\varphi),\beta_1,\beta_2))\beta_2 d\beta_1\right|_{\Gamma_k}=$$

$$=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)\beta_1^p\int_0^1 K_0(\beta_2)\beta_2^q f_{k,0,0}^{(p+q)}(\varphi)d\beta_2 d\beta_1=\int_0^{2\pi}G_0(\beta_1)\beta_1^p d\beta_1\int_0^1 K_0(\beta_2)\beta_2^q d\beta_2 f_{k,0,0}^{(p+q)}(\varphi)=0.$$

Таким чином, рівності (3) теореми 2 доведені. Аналогічно доводяться рівності (4) теореми 2. Теорема 2 доведена.

Теорема 3. Якщо виконуються припущення (1), (2), то оператор $E_{M,N}f(r, \phi, z)$, визначений вище, задовольняє умови

$$f(r,\varphi,z)\in C^{\nu}(D)\Rightarrow E_{M,N}f(r,\varphi,z)\in C^{\nu}(D),$$

$$\left.\frac{\partial^{p+q}}{\partial r^p\partial z^q}E_{M,N}f(r,\varphi,z)\right|_{\Gamma_l}=f_{l,p,q}(\varphi),\quad l=1,2,\ldots,M,\quad p+q=0,1,\ldots,N;\quad 0\le\varphi\le 2\pi. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки $E_{M,N}f(r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=0}^{N}V_{k,s}(x,y,z)$ є сумою добутків функцій, кожна з яких належить класу $C^{\nu}(D)$, то і $E_{M,N}f(r, \phi, z) \in C^{\nu}(D)$. Для доведення рівностей (5) напишемо такий ланцюжок рівностей:

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} E_{M,N} f(r,\varphi,z)\Big|_{\Gamma_\ell} = \sum_{k=1}^{M} \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q}\big[h_{k,0,0}(r,\varphi,z)V_{k,0,0}(r,\varphi,z)\big]\Big|_{\Gamma_\ell} + \sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=1}^{N} \frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q}\big[h_{k,s}(r,\varphi,z)V_{k,s}(r,\varphi,z)\big]\Big|_{\Gamma_\ell} =$$

$$= \sum_{k=1}^{M} f_{k,0,0}(\varphi)\delta_{k,\ell}\delta_{0,p}\delta_{0,q} + \sum_{k=1}^{M}\sum_{|s|=1}^{N} f_{k,s}(\varphi)\delta_{k,\ell}\delta_{p,s_1}\delta_{q,s_2} = f_{\ell,s_1,s_2}(\varphi), \qquad 0 \le p+q \le N.$$

Теорема 3 доведена.

Теорема 4. Функції $h_{k,s}(r, \phi, z)$ можна подати у вигляді

$$h_{k,s}(r,\varphi,z) = s_{N,k,s_1}(r,\varphi)s_{N,k,s_2}(z,\varphi),$$

де $s_{N,k,s_1}(r,\varphi) \in C^{\nu}\big[R_+ \times [0,2\pi]\big]$, $s_{N,k,s_2}(z,\varphi) \in C^{\nu}\big[R \times [0,2\pi]\big]$ – базисні сплайни степеня $N+1$ з властивостями

$$\frac{\partial^p s_{N,k,s_1}}{\partial r^p}(r_l,\varphi) = \delta_{k,l}\delta_{p,N-s_1}; \qquad k,l = 0,1,\ldots,M; \quad p,s_1 = 0,1,\ldots,N;$$

$$\frac{\partial^q s_{N,k,s_2}}{\partial z^q}(z_l,\varphi) = \delta_{k,l}\delta_{q,N-s_2}; \qquad k,l = 0,1,\ldots,M; \quad q,s_2 = 0,1,\ldots,N.$$

Доведення. Знайдемо похідні

$$\frac{\partial^{p+q}}{\partial z^p \partial z^q} h_{k,s}(r,\varphi,z)\Big|_{\Gamma_\ell} = \frac{\partial^p}{\partial z^p} s_{N,k,s_1}(r,\varphi)\Big|_{r=r_k(\varphi)} \frac{\partial^q}{\partial z^q} s_{N,k,s_2}(z,\varphi)\Big|_{z=z_k(\varphi)} =$$

$$= \delta_{k,\ell}\delta_{p,N-s_1}\delta_{k,\ell}\delta_{q,N-s_2} = \delta_{k,\ell}\delta_{0,N-s_1}\delta_{0,N-s_2}.$$

Тобто запропонована в теоремі 4 формула дозволяє отримувати функції $h_{k,s_1,s_2}(r,\varphi,z)$ з потрібними властивостями.

Теорема 4 доведена.

Загальна теорія їх побудови наведена в роботах [1–7].

Таким чином, в даній роботі запропоновані формули для операторів інтерлінації функцій трьох змінних в циліндричній системі координат $Or\phi z$, заданих своїми слідами і слідами своїх похідних за змінними r і z на системі неперетинних ліній в параметричній формі.

Висновки

Таким чином відмітимо основні властивості запропонованого в даній роботі методу.

По-перше, оператор $E_{M,N}f(r, \phi, z)$ має властивості $E_{M,N}f(r, \phi, z) \in C^{\nu}(D)$ та (5), навіть якщо $f_{k,s}(\phi) \in C^{\nu-|s|}[0, 2\pi]$, $|s| = 0, 1, \ldots, N$, $N \le \nu$ і $f_{k,s}(\phi)$ не належать класу $C^{\nu}[0, 2\pi]$.

По-друге, метод дозволяє використовувати замість слідів $f_{k,s}(\phi) \in C^{\nu-|s|}[0, 2\pi]$, $|s| = 0, 1, \ldots, N$, $N \le \nu$ їх наближення сплайнами (інтерполяційними або апроксимаційними), побудованими на основі використання дискретних наборів значень $f_{k,s}(\phi_j)$, $k = 1, 2, \ldots, M$, $|s| = 0, 1, \ldots, N$, $N \le \nu$, $j = 1, 2, \ldots, N$.

В подальшому планується розробка та дослідження методу побудови операторів інтерполяції функцій трьох змінних, коли лінії інтерлінації задаються дискретними наборами точок, а не формулами. Така постановка задачі виникає, зокрема, в машинобудуванні при конструюванні поверхонь пера лопаток авіадвигунів.

Література

1. *Литвин, О. Н.* Общий метод построения уравнений кривых и поверхностей в неявной форме с помощью интерлинации и интерфлетации функций / О. Н. Литвин, А. В. Ткаченко, О.О. Литвин // Кибернетика и систем. анализ. – 2011. – № 1. – С. 62–67.
2. *Відновлення* функцій двох змінних із збереженням класу $C^r(R^2)$ за допомогою їх слідів та слідів їх похідних до фіксованого порядку на заданій лінії / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2014. – № 2. – С. 50–55.

3. *Ермітова* інтерлінація функцій двох змінних на заданій системі неперетинних ліній із збереженням класу $C^r(R^2)$ / О. М. Литвин, О. О. Литвин, О. В. Ткаченко, О. Л. Грицай // Доп. НАН України. – 2014. – № 7. – С. 53–59.
4. *Інтерлінація* функцій трьох змінних на системі неперетинних кривих із збереженням класу диференційовності / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2015. – № 1. – С. 44–50.
5. *Побудова* операторів інтерполяції ермітового типу на нерегулярній сітці вузлів, розміщених на довільній системі замкнутих неперетинних ліній в циліндричній системі координат, що належать конструйованій поверхні / І. В. Сергієнко, О. М. Литвин, О. О. Литвин та ін. // Доп. НАН України. – 2015. – № 2. –С. 43–49.
6. *Интерлинация* эрмитового типа на системе непересекающихся линий. Обзор / И. В. Сергиенко, О. Н. Литвин, О. О. Литвин и др. // Кибернетика и систем. анализ. – 2015. – Т. 51, № 2. – С. 1–12.
7. *Литвин, О. М.* Одна теорема про ізогеометричні властивості операторів інтерлінації функцій 2-х змінних / О. М. Литвин, О. В. Ткаченко, О. О. Литвин // Вісн. Нац. техн. ун-ту «Харківський політехнічний інститут». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011. – № 42. – С. 107–109.

Поступила в редакцию 05.10.16