УДК 539.3

В. Б. Говоруха, канд. физ.-мат. наук

Днепропетровский национальный университет
(E-mail: govorukhavb@yahoo.com)

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗОН ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПРОБОЯ У ВЕРШИНЫ ТРЕЩИНЫ В ПЬЕЗОЭЛЕКТРИЧЕСКОМ МАТЕРИАЛЕ

Рассмотрена модель трещины с зонами электрического предразрушения в однородном пьезокерамическом материале. Считая, что зоны электрического предразрушения локализованы на продолжении трещины и на них имеет место лишь скачок электрического потенциала, получено точное аналитическое решение задачи, а также уравнение для определения длины зоны предразрушения, коэффициентов интенсивности и скорости освобождения энергии. Изучено влияние внешнего электрического поля на основные параметры разрушения.

Розглянуто модель тріщини з зонами електричного передруйнування в однорідному п'єзокерамічному матеріалі. Вважаючи, що зони електричного передруйнування локалізована на продовженні тріщини і на них має місце лише стрибок електричного потенціалу, одержано точний аналітичний розв'язок задачі, а також рівняння для визначення довжини зон передруйнування, коефіцієнтів інтенсивності та швидкості звільнення енергії. Вивчено вплив зовнішнього електричного поля на основні параметри руйнування.

Развитие электроники, электроакустики, измерительной техники привело в последние годы к интенсивному развитию новых областей физики диэлектриков. Одно из таких направлений связано с изучением взаимодействия электрических и механических полей при пьезоэлектрическом эффекте. В настоящее время существуют различные технические устройства, в которых успешно используются пьезоэлектрические материалы. Однако наличие в реальных пьезоэлектрических материалах дефектов типа трещин, надрезов, полостей и т.д. может привести к существенному снижению механической и электрической прочности элементов конструкций, изготовленных из таких материалов. В этой связи представляет интерес исследование сопряженных электроупругих полей вблизи различного рода дефектов в пьезоэлектрических материалах.

К настоящему моменту достигнут существенный прогресс в исследовании разрушения пьезоэлектрических материалов для случая плоских задач [1–3]. При этом математическая теория трещин, основанная на энергетическом подходе Гриффитса, оказалась весьма плодотворной для теоретического изучения различных аспектов процесса разрушения и при разработке практических методов расчета на прочность элементов конструкций. Однако многие явления, выявленные в результате экспериментальных исследований, не находят надлежащего объяснения в рамках этой теории [4]. Известно [5], что в некоторой окрестности вершин трещины под действием внешней нагрузки наблюдается резкое увеличение напряженности электрического поля, превосходящее ее максимально допустимое значение, что, в свою очередь, может быть причиной электрического пробоя пьезоэлектрика. В связи с этим количественное описание процесса взаимодействия электрических и механических полей в таких областях в рамках классических положений линейной теории электроупругости не представляется возможным. Для устранения указанных противоречий, по аналогии с известной моделью Леонова–Панасюка–Дагдейла [6], в работе [7] предложена расчетная модель пьезоэлектрического тела с трещиной, предполагающая наличие в полосе на продолжении трещины зон электрического предразрушения. При этом считается, что значение нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля в таком теле не

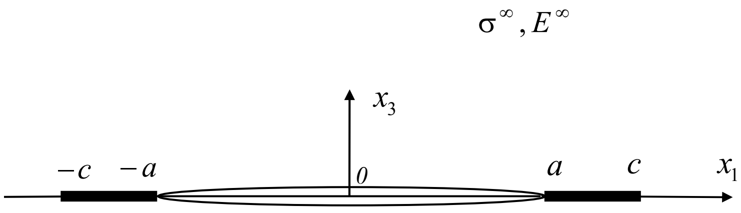

Рис. 1. Схема трещины с зонами электрического предразрушения в однородном пьезоэлектрическом материале

превосходит величины E_s – максимально допустимого значения напряженности электрического поля.

Настоящая работа является продолжением исследований в этом направлении. В ней строится точное аналитическое решение соответствующей граничной задачи электроупругости, формулируются основные параметры разрушения рассматриваемой модели, а также приводятся формулы для распределения механических и электрических величин в окрестности вершин трещины.

Рассмотрим электроупругое состояние в окрестности туннельной трещины в неограниченной среде из поляризованной пьезокерамики гексагонального класса симметрии 6mm. Пусть прямолинейная трещина располагается в плоскости $x_3 = 0$ на участке $|x_1| < a$, $|x_2| < \infty$, причем вектор предварительной поляризации коллинеарен оси Ox_3 (рис. 1). Будем рассматривать задачу для случая плоской деформации при условии, что на берегах трещины отсутствуют свободные электрические заряды и механическая нагрузка, а на бесконечности заданы постоянное растягивающее напряжение $\sigma_{33} = \sigma^{\infty}$ и нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля $E_3 = E^{\infty}$.

В соответствии с моделью [7] и на основании симметрии задачи введем зоны электрического предразрушения на продолжении трещины $a < |x_1| < c$, где допускается скачок лишь электрического потенциала, а для нормальной компоненты напряженности электрического поля выполняется условие $E_3(x_1, 0) = E_s$. Положение точки c пока неизвестно.

При условии, что электроупругое состояние не зависит от координаты x_2, компоненты тензора механических напряжений, вектора электрической индукции, а также скачки перемещений и электрического потенциала можно представить следующим образом [9]:

$$[[\mathbf{V}'(x_1, 0)]] = \mathbf{W}^{+}(x_1) - \mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{1}$$

$$\mathbf{t}(x_1, 0) = \mathbf{G}\mathbf{W}^{+}(x_1) - \overline{\mathbf{G}}\mathbf{W}^{-}(x_1), \tag{2}$$

где $\mathbf{V}(x_1, 0) = [u_1(x_1, 0), u_3(x_1, 0), \varphi(x_1, 0)]^T$; $\mathbf{W}(z) = [W_1(z), W_2(z), W_3(z)]^T$ – кусочно-аналитическая функция, обращающаяся в нуль на бесконечности, $\mathbf{W}^{\pm}(x_1) = \lim\limits_{x_3 \to \pm 0} \mathbf{W}(z)$, $\mathbf{t}(x_1, 0) = [\sigma_{13}(x_1, 0), \sigma_{33}(x_1, 0), \mathrm{D}_3(x_1, 0)]^T$, $z = x_1 + ix_3$, $i = \sqrt{-1}$. Символ $[[\cdot]]$ – обозначает скачок соответствующей функции на границе $x_3 = 0$.

Следует отметить, что соотношения (1), (2) были получены в [9] для пьезоэлектрического биматериала. В случае однородного материала, относящегося к гексагональному классу симметрии 6mm, имеет место соотношение $\overline{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}$, и матрица $\mathbf{G}$ определяется следующим образом:

$$\mathbf{G} = i\begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{33} & g_{34} \\ 0 & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix},$$

где g_{11}, g_{33}, g_{34}, g_{43}, g_{44} – действительные константы, зависящие от характеристик материала [9].

Ввиду симметрии электроупругого состояния относительно оси x_3 получаем

$$[[u_1(x_1, 0)]] = 0, \quad \sigma_{13}(x_1, 0) = 0, \quad -\infty < x_1 < \infty. \tag{3}$$

С учетом (3), соотношения (1), (2) принимают вид

$$\begin{pmatrix} [\![u_3'(x_1,0)]\!] \\ [\![\varphi'(x_1,0)]\!] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_3^+(x_1) - W_3^-(x_1) \\ W_4^+(x_1) - W_4^-(x_1) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{33}(x_1,0) \\ D_3(x_1,0) \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} g_{33} & g_{34} \\ g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) \\ W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Используя уравнения пьезоэффекта [8], получим также выражение для нормальной составляющей вектора напряженности электрического поля при $x_3 = 0$

$$E_3(x_1,0) = ie_1\left[W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)\right] + ie_2\left[W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)\right], \tag{6}$$

где e_1, e_2 – действительные константы, зависящие от характеристик материала, выражение для которых не приводятся здесь из-за их громоздкости.

Таким образом, формулы (4)–(6) позволяют выразить основные физические величины через две кусочно-аналитические функции $W_3(z)$ и $W_4(z)$.

Согласно принципу суперпозиции исходное электроупругое состояние, возникающее в рассматриваемом пьезоэлектрическом теле с трещиной, можно представить в виде суммы: состояния сплошного тела под действием на бесконечности постоянной электромеханической нагрузки

$$\sigma_{33}^{(0)}(x_1,x_3) = \sigma^\infty, \qquad D_3^{(0)}(x_1,x_3) = D^\infty, \qquad E_3^{(0)}(x_1,x_3) = E^\infty,$$

где $D^\infty = \left(\dfrac{c_{11}e_{33} - c_{13}e_{31}}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}\right)\sigma^\infty + \left(\varepsilon_{33} + \dfrac{c_{33}e_{31}^2 - 2c_{13}e_{31}e_{33} + c_{11}e_{33}^2}{c_{11}c_{33} - c_{13}^2}\right)E^\infty$; c_{11}, c_{13}, c_{33} – модули упругости; e_{31}, e_{33} – пьезоэлектрические константы; ε_{33} – диэлектрическая проницаемость и состояния тела с трещиной, когда на ее берегах заданы следующие условия:

$$\sigma_{33}(x_1,0) = -\sigma^\infty, \qquad D_3(x_1,0) = -D_3^\infty, \qquad |x_1| < a, \tag{7}$$

$$u_3^+(x_1,0) = u_3^-(x_1,0), \qquad E_3(x_1,0) = E_s - E^\infty, \qquad a < |x_1| < c. \tag{8}$$

Подставляя соотношения (5) в граничные условия (7), имеем

$$\begin{aligned} &ig_{33}\left[W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)\right] + ig_{34}\left[W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)\right] = -\sigma^\infty, \\ &ig_{43}\left[W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1)\right] + ig_{44}\left[W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)\right] = -D^\infty, \qquad |x_1| < a, \end{aligned}$$

Исключив из этой системы $W_4^+(x_1) + W_4^-(x_1)$, получаем краевую задачу сопряжения для нахождения кусочно-аналитической функции $W_3(z)$ с линией скачков $|x_1| < a$, граничные значения которой удовлетворяют условию

$$W_3^+(x_1) + W_3^-(x_1) = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} i, \qquad |x_1| < a. \tag{9}$$

Решение задачи (9) в соответствии с [10] имеет вид

$$W_3(z) = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{2i(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - 1\right). \tag{10}$$

С учетом зависимости (6), найдем значение напряженности электрического поля при $|x_1| < a$

$$E_0 = E_3(x_1,0) = \frac{e_2(g_{43}\sigma^\infty - g_{33}D^\infty) - e_1(g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty)}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}} + E^\infty.$$

Из этой формулы следует, что напряженность электрического поля на берегах раскрытой трещины является постоянной величиной, которая зависит от характеристик материала и внешней нагрузки.

Используя далее соотношения (4)–(6) и представление (10), из условий (7), (8) получим

$$
\begin{aligned}
&W_4^+(x_1)+W_4^-(x_1)=-\frac{g_{43}\sigma^\infty-g_{33}D^\infty}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43}}i, \qquad |x_1|<a\\
&W_4^+(x_1)+W_4^-(x_1)=\frac{E_s-E^\infty}{ie_2}-\frac{e_1(g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty)}{ie_2(g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43})}\left(\frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2-a^2}}-1\right), \qquad a<|x_1|<c,
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где функция $W_4(z)$ является аналитической на всей плоскости (x_1, x_3) за исключением участка $|x_1|<c$.

Решение задачи (11) имеет вид

$$
W_4(z)=\frac{E^\infty-E_0}{ie_2}f_c(z)+\frac{E_s-E_0}{ie_2}g_0(z)-\frac{e_1}{e_2}W_3(z)\,, \tag{12}
$$

где $g_0(z)=\dfrac{1}{\pi}\left[\operatorname{arcctg}\left(\dfrac{a}{z}\sqrt{\dfrac{z^2-c^2}{c^2-a^2}}\right)-\dfrac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}\arccos\left(\dfrac{a}{c}\right)\right]$, $f_c(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}-1\right)$.

Формулы (10), (12) позволяют определить в явном виде основные компоненты электромеханического поля в плоскости $x_3=0$. В частности, принимая во внимание, что для $|x_1|>c$ справедливо соотношение $\mathbf{W}^+(x_1)=\mathbf{W}^-(x_1)$, из уравнения (6) получаем

$$
\begin{aligned}
E_3(x_1,0)=&\left[E^\infty-E_0-\frac{2}{\pi}(E_s-E_0)\arccos\left(\frac{a}{c}\right)\right]\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-c^2}}+\\
&+\frac{2}{\pi}(E_s-E_0)\operatorname{arcctg}\left(\frac{a}{x_1}\sqrt{\frac{x_1^2-c^2}{c^2-a^2}}\right)+E_0, \qquad |x_1|>c.
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля, представленная выражением (13), при произвольном месторасположении точки c становится неограниченной при $x_1\to c$, что противоречит свойствам рассматриваемой модели. Следовательно, месторасположение точки c должно быть таким, чтобы условие ограниченности $E_3(x_1, 0)$ выполнялось при $x_1\to c$. Этим условием, как следует из выражения (13), является равенство нулю выражения в квадратных скобках, что дает нам следующую формулу для определения расположения точки c:

$$
\arccos\left(\frac{a}{c}\right)=\frac{\pi}{2}\left(\frac{E^\infty-E_0}{E_s-E_0}\right). \tag{14}
$$

Пользуясь равенством (14), выражение (13) можно преобразовать к такому виду:

$$
E_3(x_1,0)=\frac{2}{\pi}(E_s-E_0)\operatorname{arcctg}\left(\frac{a}{x_1}\sqrt{\frac{x_1^2-c^2}{c^2-a^2}}\right)+E_0, \qquad |x_1|>c\,. \tag{15}
$$

Исходя из соотношений (4), распределение напряжения $\sigma_{33}(x_1, 0)$ и электрической индукции $D_3(x_1, 0)$ на участке $a<|x_1|<c$ определяется формулами

$$
\begin{aligned}
\sigma_{33}(x_1,0)=&\,i\left(g_{33}-\frac{g_{34}e_1}{e_2}\right)\left[W_3^+(x_1)+W_3^-(x_1)\right]+\\
&+\frac{g_{34}}{e_2}\left(E^\infty-E_0\right)\left[f_c^+(x_1)+f_c^-(x_1)\right]+\frac{g_{34}}{e_2}\left(E_s-E_0\right)\left[g_0^+(x_1)+g_0^-(x_1)\right]+\sigma^\infty,
\end{aligned}
$$

ISSN 0131–2928. Пробл. машиностроения, 2010, Т. 13, № 2

$$D_3(x_1,0)=i\left(g_{43}-\frac{g_{44}e_1}{e_2}\right)\left[W_3^+(x_1)+W_3^-(x_1)\right]+$$

$$+\frac{g_{44}}{e_2}\left(E^\infty-E_0\right)\left[f_c^+(x_1)+f_c^-(x_1)\right]+\frac{g_{44}}{e_2}\left(E_s-E_0\right)\left[g_0^+(x_1)+g_0^-(x_1)\right]+D^\infty.$$

Учитывая, что на этом участке выполняются соотношения

$$W_3^+(x_1)=W_3^-(x_1),\qquad f_c^+(x_1)+f_c^-(x_1)=-1,\qquad g_0^+(x_1)+g_0^-(x_1)=1,$$

имеем

$$\sigma_{33}(x_1,0)=\left(g_{33}-\frac{g_{34}e_1}{e_2}\right)\frac{g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43}}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}+\frac{g_{34}}{e_2}\left(E_s-E_0\right),\qquad a<|x_1|<c,\tag{16}$$

$$D_3(x_1,0)=\left(g_{43}-\frac{g_{44}e_1}{e_2}\right)\frac{g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43}}\left[\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}-1\right]+\frac{g_{44}}{e_2}\left(E_s-E^\infty\right)+D^\infty,\qquad a<|x_1|<c.\tag{17}$$

Анализ формул (16), (17) показывает, что в окрестности вершины трещины напряжения и электрическая индукция, в рамках рассматриваемой модели, остаются сингулярными. Эта сингулярность носит корневой характер и характеризуется коэффициентами интенсивности

$$K_1=\lim_{x_1\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\sigma_{33}(x_1,0),\qquad K_4=\lim_{x_1\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,D_3(x_1,0),$$

которые на основании (16), (17) определяются формулами

$$K_1=\sqrt{\pi a}\left(g_{33}-\frac{g_{34}e_1}{e_2}\right)\frac{g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43}},\tag{18}$$

$$K_4=\sqrt{\pi a}\left(g_{43}-\frac{g_{44}e_1}{e_2}\right)\frac{g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43}}.\tag{19}$$

Определим далее скачок перемещения u_3 и электрического потенциала φ в плоскости трещины. Из соотношений (4) получаем

$$[[u_3'(x_1,0)]]=\frac{g_{44}\sigma^\infty-g_{34}D^\infty}{i(g_{33}g_{44}-g_{34}g_{43})}\left[f_a^+(x_1)-f_a^-(x_1)\right],\qquad |x_1|<a,\tag{20}$$

$$[[\varphi'(x_1,0)]]=\frac{E^\infty-E_0}{ie_2}\left[f_c^+(x_1)-f_c^-(x_1)\right]+\frac{E_s-E_0}{ie_2}\left[g_0^+(x_1)-g_0^-(x_1)\right]-\frac{e_1}{e_2}[[u_3'(x_1,0)]],\quad |x_1|<c\tag{21}$$

где $f_a(z)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right)$.

Преобразовав выражения (20), (21) с учетом известных соотношений [6]

$$f_a^+(x_1)-f_a^-(x_1)=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}},\qquad f_c^+(x_1)-f_c^-(x_1)=\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-c^2}}$$

$$g_0^+(x_1)-g_0^-(x_1)=-\frac{2}{\pi}\arccos\left(\frac{a}{c}\right)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-c^2}}-\frac{1}{2\pi i}\left[\Gamma(c,x_1,a)-\Gamma(c,x_1,-a)\right]-\frac{e_1}{e_2}[[u_3'(x_1,0)]],\quad |x_1|<c$$

где $\Gamma(l,x,\xi)=\ln\dfrac{l^2-x\xi-\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}}{l^2-x\xi+\sqrt{(l^2-x^2)(l^2-\xi^2)}}$,

запишем их для реальной длины зоны электрического предразрушения в следующем виде:

$$[[u_3'(x_1,0)]] = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{i(g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43})}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - a^2}}, \qquad |x_1| < a,$$

$$[[\varphi'(x_1,0)]] = \frac{E_s - E_0}{2\pi e_2}\left[\Gamma(c, x_1, a) - \Gamma(c, x_1, -a)\right] - \frac{e_1}{e_2}[[u_3'(x_1,0)]], \qquad |x_1| < c.$$

Интегрируя последние соотношения, получаем

$$[[u_3(x_1,0)]] = \frac{g_{44}\sigma^\infty - g_{34}D^\infty}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}\sqrt{a^2 - x_1^2}, \qquad |x_1| < a, \tag{22}$$

$$[[\varphi(x_1,0)]] = \frac{E_s - E_0}{2\pi e_2}\left[(x_1 - a)\Gamma(c, x_1, a) - (x_1 + a)\Gamma(c, x_1, -a)\right] - \frac{e_1}{e_2}[[u_3(x_1,0)]], \qquad |x_1| < c. \tag{23}$$

При этом скачок перемещения в вершине трещины равен нулю, а электрического потенциала определяется следующим образом:

$$\delta_\varphi = [[\varphi(x_1,0)]] = -\frac{2a(E_s - E_0)}{\pi e_2}\ln\left(\frac{a}{c}\right).$$

Согласно [2] имеем выражение для скорости освобождения электроупругой энергии при продвижении правой вершины трещины

$$G = \lim_{\Delta l \to 0}\frac{1}{2\Delta l}\int_a^{a+\Delta l}\left(\sigma_{33}(x_1,0)[[u_3(x_1 - \Delta l, 0)]] + D_3(x_1,0)[[\varphi(x_1 - \Delta l, 0)]]\right)dx_1. \tag{24}$$

Подставив (16), (17) и (22), (23) в (24), находим следующее выражение для скорости освобождения электроупругой энергии

$$G = \frac{1}{4}\mathbf{K}^T\mathbf{H}\mathbf{K}, \tag{25}$$

где $\mathbf{K} = (K_1, \mathrm{K}_4)^T$, $\mathbf{H} = \frac{1}{g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43}}\begin{pmatrix} g_{44} & -g_{34} \\ -g_{43} & g_{33}\end{pmatrix}$.

Результаты вычисления длины зоны электрического предразрушения, коэффициентов интенсивности K_1 и K_4 для a = 0,01 м, σ^∞ = 10 МПа и различных значений E^∞/E_s приведены в таблице. В расчетах использовались данные о физико-механических свойствах пьезокерамики PZT-4, приведенные в [8]. Из полученных результатов следует, что величины c, K_1 и K_4 растут нелинейным образом с ростом электрической нагрузки E^∞/E_s.

Результаты расчетов

$\frac{E^\infty}{E_s}$	$\frac{c-a}{2a}$	$\frac{K_1}{\sqrt{a}\sigma^\infty}$	$\frac{K_4}{\sqrt{a}D^\infty}\cdot 10^{-3}$
0,2	0,411	2,401	–4,916
0,4	0,682	2,491	–4,461
0,6	1,238	2,581	–4,107
0,8	2,932	2,671	–3,824

На рис. 2 приведены графики, характеризующие изменение скорости освобождения электроупругой энергии в зависимости от E^∞/E_s. Сплошная линия соответствует скорости освобождения энергии в рамках рассматриваемой модели, пунктирная – в рамках линейной модели трещины [2].

Как видно из графика, использование линейной модели трещины приводит к выводу, что увеличение электрической нагрузки, независимо от ее знака, препятствует развитию трещины. Однако это противоречит известным результатам экспериментальных исследований [4]. С другой стороны, использование рассматриваемой модели с зонами электрического предразрушения показывает, что положительное электрическое поле способствует процессу разрушения, а отрицательное – препятствует, что полностью согласуется с результатами экспериментов.

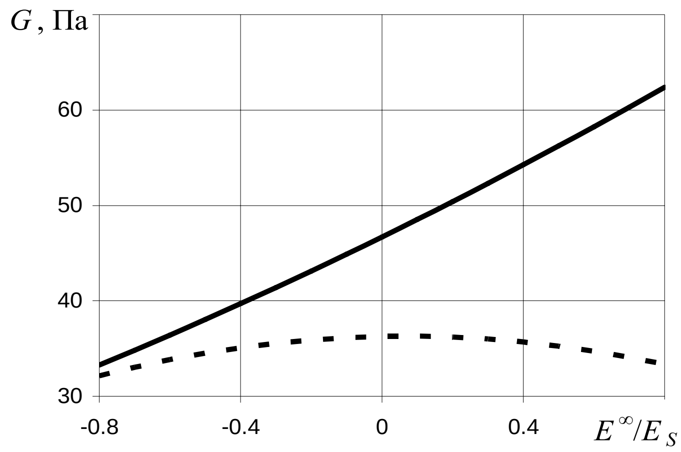

Рис. 2. Изменение G при действии внешнего электрического поля E^{∞} для различных моделей трещины

Литература

1. *Кудрявцев Б. А.* Механика разрушения пьезоэлектрических материалов. Прямолинейная туннельная трещина на границе с проводником / Б. А. Кудрявцев, В. З. Партон, В. И. Ракитин // Прикл. математика и механика – 1975. – **39**, № 1. – С. 149–159.
2. *Партон В. З.* Электроупругость пьезокерамических и электропроводных тел / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев. – М.: Наука, 1988. – 472 с.
3. *Калоеров С. А.* Двумерная задача электроупругости для многосвязного пьезоэлектрического тела с полостями и плоскими трещинами / С. А. Калоеров, А. И. Баева, Ю. А. Глущенко // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 32. – С. 64–79.
4. *Park S.* Fracture criteria for piezoelectric materials / S. Park, C. T. Sun // J. Am. Ceram. Soc. – 1995. –**78**. – P. 1475–1480.
5. *Партон В. З.* Об одном критерии электрического разрушения диэлектриков в сильно неоднородных полях / В. З. Партон, Б. А. Кудрявцев, Н. А. Сенник. // Докл. АН СССР. – 1988. – **298**, № 3. – С. 611–615.
6. *Панасюк В. В.* Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1968. – 248 с.
7. *Zhang T. Y.* Fracture behaviors of piezoelectric materials / T. Y. Zhang, C. F. Gao. // Theor. Appl. Fract. Mech. – 2004. – **41**. – P. 339–379.
8. *Гринченко В. Т.* Электроупругость / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев: Наук. думка, 1989. – 280 с. (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т. – Т. 5).
9. *Herrmann K. P.* On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, V. B. Govorukha // Int. J. Frac. – 2001. – **111**. – P. 203–227.
10. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М.: Наука, 1966. – 708 с.

Поступила в редакцию
03.04.08