

Ю. С. Литвинова
К. В. Максименко-Шейко,
 д-р техн. наук
Т. И. Шейко, д-р техн. наук

Институт проблем
 машиностроения
 им. А. Н. Подгорного
 НАН Украины, г. Харьков,
 e-mail:m-sh@ipmach.kharkov.ua

Ключові слова: R-функції, сплайн,
 моделювання, візуалізація, тривимірні
 об'єкти.

УДК 517.95+518.517

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПО ИНФОРМАЦИИ О ФОРМЕ ИХ СЕЧЕНИЙ

Досліджено можливості та запропоновано методики функціонального представлення геометричного об'єкта в 3D за інформацією про рівняння границь перерізів відновлюваного об'єкта. Побудовано геометричні об'єкти з використанням апарату теорії R-функцій та програмного продукту, який його підтримує. Цей метод побудови геометричних об'єктів є універсальним засобом моделювання та візуалізації. Використання буквених параметрів істотно розширює конструктивні можливості реалізації моделювання геометричних об'єктів. Модель, що зберігається в пам'яті комп'ютера, дозволяє досліднику за допомогою програмних засобів інтерактивної тривимірної комп'ютерної графіки маніпулювати одержуваними просторовими образами, варіюючи значення буквених параметрів. Побудовані математичні моделі геометричних об'єктів є їх аналітичною ідентифікацією, про що свідчить відповідна візуалізація.

Введение

Функциональное представление геометрического объекта определяет его как единое целое с помощью одной вещественной непрерывной функции нескольких переменных в виде $\omega(x, y, z) \geq 0$. Решению обратной задачи аналитической геометрии в 3D на основе разработанной В. Л. Рвачевым теории R-функций посвящены работы [1-3]. Описанная в них методика построения уравнений сложных геометрических объектов основана на операциях с известными уравнениями трехмерных примитивов. При этом теоретико-множественные операции определяются в аналитическом виде с помощью R-функций. Однако часто возникает необходимость функционального представления геометрического объекта в 3D, основываясь не на известных уравнениях трехмерных примитивов, а по информации об уравнениях границ сечений восстанавливаемого объекта $\omega_i(x, y, z_i) \geq 0$ [4,5].

Основная часть

Пусть в плоскостях $z = z_i$ ($\omega_i(z) \equiv z_i - z \geq 0$) заданы уравнения контуров $f_i(x, y) \geq 0$, $i = 1, \dots, N$. Применение формулы вида

$$\omega(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^N f_i(x, y) \omega_i^{2ki}(z)}{\sum_{i=1}^N \omega_i^{2ki}(z)} \quad (1)$$

приводит к результирующим поверхностям, изображенным на рис. 1 при

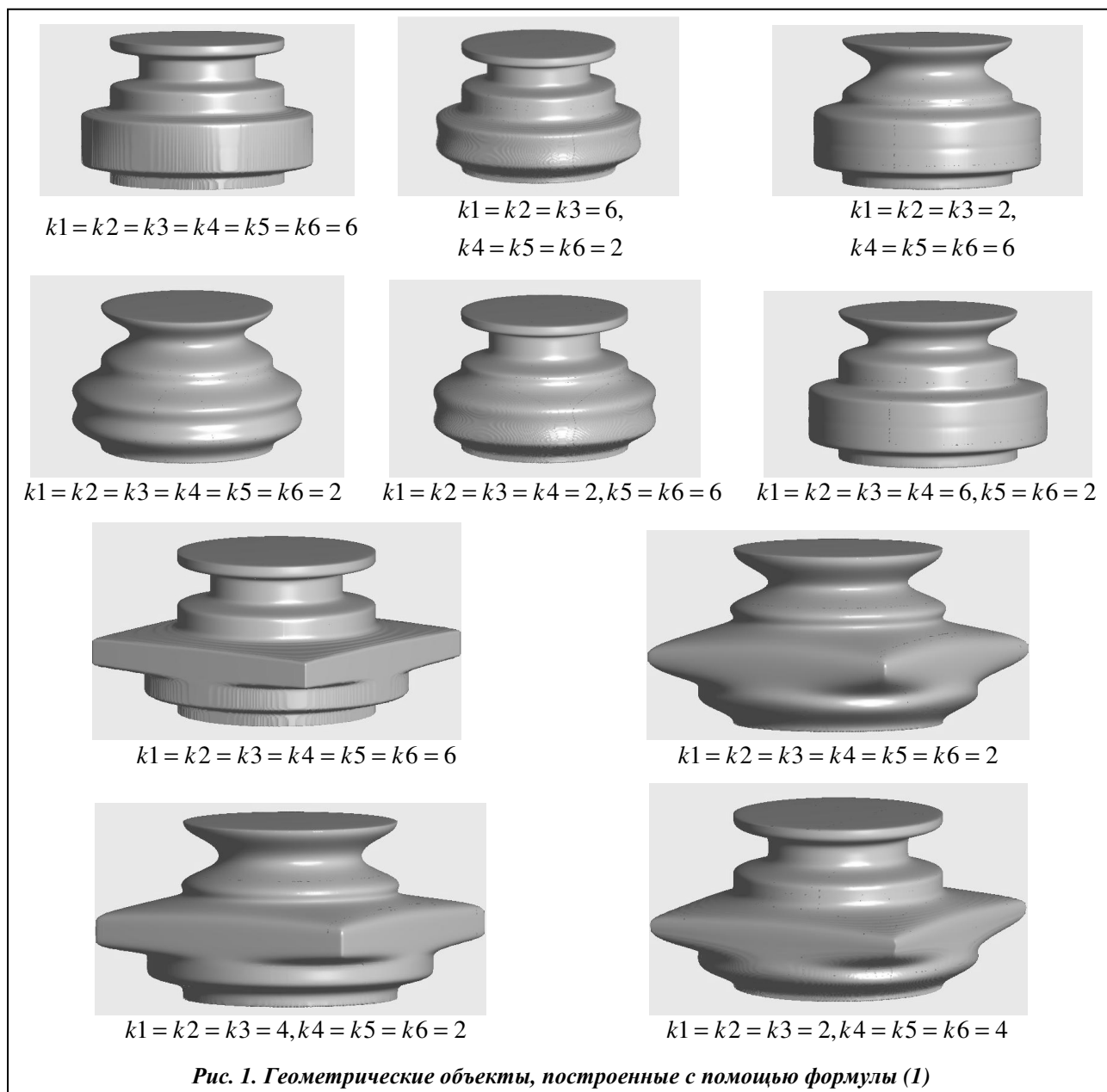
$$f_1 = \frac{r_1^2 - x^2 - y^2}{2r_1} \geq 0; r_1 = 3; w_1 = z^{k1}; f_2 = \frac{r_2^2 - x^2 - y^2}{2r_2} \geq 0; r_2 = 4; w_2 = (1 - z)^{k2}$$

$$f_3 = \frac{r_3^2 - x^2 - y^2}{2r_3} \geq 0; r_3 = 4; w_3 = (2 - z)^{k3}; \left(f_3 = \left(\frac{r_3^2 - x^2}{2r_3} \right) \wedge_0 \left(\frac{r_3^2 - y^2}{2r_3} \right) \geq 0 \right)$$

$$f_4 = \frac{r_4^2 - x^2 - y^2}{2r_4} \geq 0; r_4 = 3; w_4 = (3 - z)^{k4}; f_5 = \frac{r_5^2 - x^2 - y^2}{2r_5} \geq 0; r_5 = 2; w_5 = (4 - z)^{k5}$$

© Ю. С. Литвинова, К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко, 2017

$$f_6 = \frac{r_6^2 - x^2 - y^2}{2r_6} \geq 0; r_6 = 3; w_6 = (5-z)^{k_6}; \omega(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^N f_i(x, y) \omega_{si}^{k_i}(z)}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{\omega_i^{k_i}(z)}} \wedge_0 z(5-z) \geq 0; i = \overline{1,6}.$$



Применение формулы вида

$$\omega(x, y, z) = \frac{\sum_{i=1}^N \omega_i(x, y) |\omega_{si}(z)|}{\sum_{i=1}^N \frac{1}{|\omega_{si}(z)|}} \quad (2)$$

приводит к результирующим поверхностям, изображенным на рис. 2.

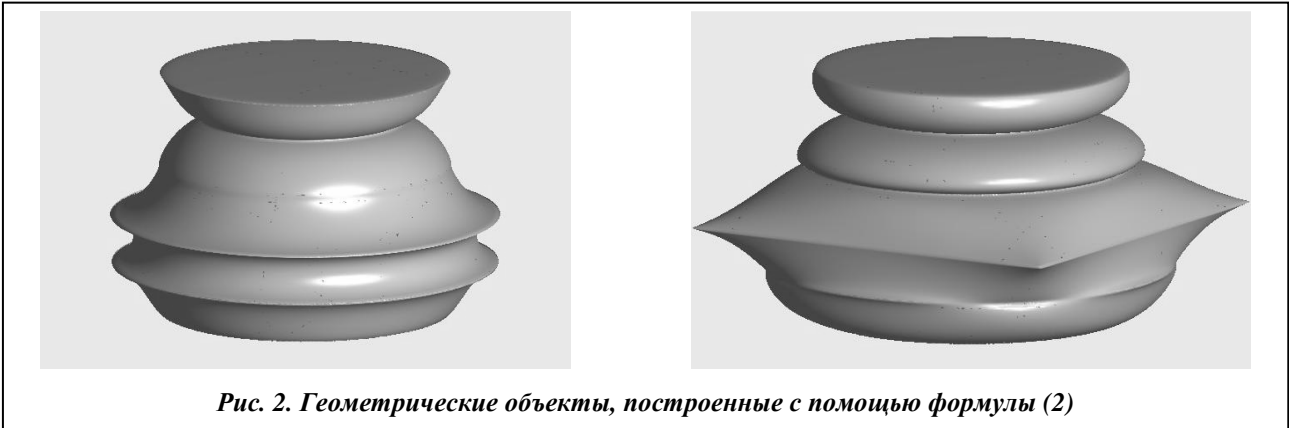


Рис. 2. Геометрические объекты, построенные с помощью формулы (2)

Отметим еще один подход для случая, когда нет никакой дополнительной информации о порядке гладкости боковой поверхности [6].

Теорема. Если задана система линий $\partial\Omega_i(\omega_i(x, y, z_i) \geq 0)$, $i = \overline{1, K}$, полученная пересечением поверхности $\Omega(\omega(x, y, z) \geq 0)$ трехмерного тела горизонтальными плоскостями $z = z_i$, $i = \overline{1, K}$, то построение приближенного уравнения поверхности $\Omega(\omega(x, y, z) \geq 0)$ может быть выполнено с помощью сплайн-интерликации функций [1] по переменной z следующим образом:

$$\omega(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \omega_i(x, y, z_i) h_i(z, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) + \prod_{i=1}^N (z - z_i) P(x, y, z), \tag{3}$$

где $h_i(z, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) = \left(\left[\begin{matrix} z - z_{i-1} \\ z_i - z_{i-1} \end{matrix} \right] \wedge_1 \left[\begin{matrix} z - z_{i+1} \\ z_i - z_{i+1} \end{matrix} \right] \right) \vee_1 0$ — финитный линейный сплайн (рис. 3).



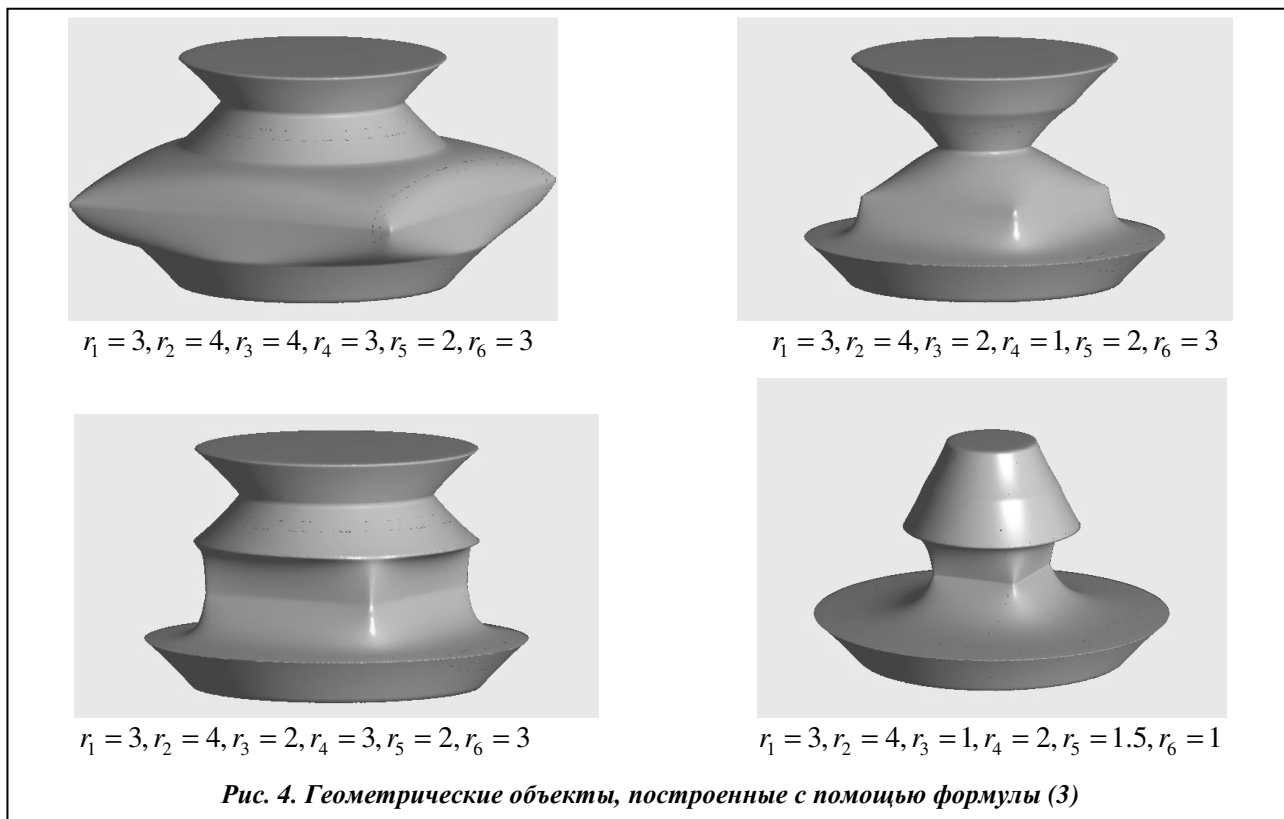
Рис. 3. Финитный линейный сплайн

Доказательство. Рассмотрим $h_i(z, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) = \left(\left[\begin{matrix} z - z_{i-1} \\ z_i - z_{i-1} \end{matrix} \right] \wedge_1 \left[\begin{matrix} z - z_{i+1} \\ z_i - z_{i+1} \end{matrix} \right] \right) \vee_1 0$. Так как

$$\begin{cases} x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \equiv \min(x, y) \\ x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \equiv \max(x, y), \text{ то при } z = z_i, i = \overline{1, K} \quad h_i(z_i, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}) = 1 \\ \bar{x} \equiv -x \end{cases}$$

и $\omega(x, y, z_i) = \omega_i(x, y, z_i)$, что и требовалось доказать.

В этом случае результирующие поверхности изображены на рис. 4. Более общий случай рассмотрен в работах О. Н. Литвина [1].



Следует отметить, что применение формулы (1) позволяет варьировать два вида параметров – k_i и r_i , регулируя как гладкость сопряжения, так и геометрические параметры сечений. Применение формулы (3) позволяет варьировать только геометрические параметры, определяющие форму и размеры сечений геометрического объекта и его элементов r_i . При этом и в одном и в другом случаях можно соединять разноплановые с точки зрения числа параметров области, например окружность и прямоугольник.

С использованием информации об уравнениях границ сечений восстанавливаемого объекта построено уравнение корпуса корабля (рис. 5), о чем писал В. Л. Рвачев в работе [4], определяя к рассмотрению типы геометрических объектов, подлежащих описанию с помощью R-функций.

Пусть $f_i = z - a_i y^2 \geq 0, i = \overline{1,6}$ – уравнения сечений,

$h_i(x, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \left(\left[\frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] \wedge_1 \left[\frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \right] \right) \vee_1 0$ – финитный линейный сплайн, тогда

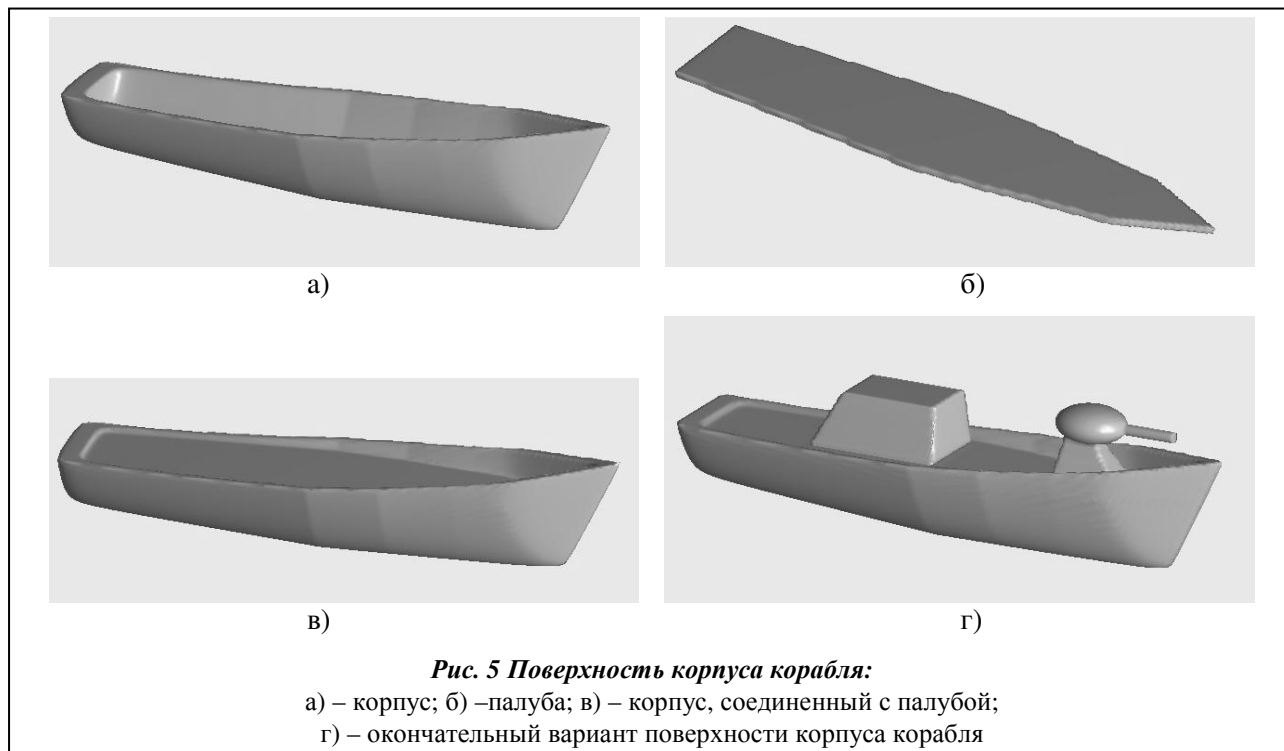
$w1(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 f(x_i, y, z) h_i(x, x_{i-1}, x_i, x_{i+1})$ – сборка основных сечений.

Сформируем носовую часть, борта и корму

$$w2 = (x \cos\left(-\frac{\pi}{7}\right) + z \sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)) \wedge_0 (-xn + 2y + 8) \wedge_0 (-xn - 2y + 8) \geq 0,$$

$$w3 = (w1 \wedge_0 w2) \wedge_0 (x + 5) \geq 0, \quad ww = 0.3 - |w3| \geq 0,$$

$$W = (ww \wedge_0 (x + 3)) \wedge_0 (-(z - 2) + 0.006(x + 3)^2) \geq 0. \text{ (рис. 5, а)}$$



Построим уравнение палубы $wpal = 0.1 - \sqrt{(z-1.8)^2} \vee_0 (-w3) \geq 0$ (рис. 5, б) и соединим его с уравнением корпуса корабля $wk = W \vee_0 wpal \geq 0$ (рис. 5, в).

Построим модельные уравнения рубки и орудия. Для формирования рубки воспользуемся уравнением пирамиды $fr = ((4 - (x_1 - 7)^2) \wedge_0 (1 - y_1^2)) \geq 0$ и двумя плоскостями $fr1 = (3.5 - z)(z - 2) \geq 0$. Пусть вершина пирамиды задана координатами $x0_1 = 6, y0_1 = 0, z0_1 = 4$,

$$x_1 = x0_1 - z0_1 \frac{x - x0_1}{z - z0_1}, y_1 = y0_1 - z0_1 \frac{y - y0_1}{z - z0_1},$$

$$frub1 = ((4 - (x_1 - 7)^2) \wedge_0 (1 - y_1^2)) \wedge_0 (3.5 - z)(z - 2) \geq 0 - \text{уравнение усеченной пирамиды.}$$

Для построения основания башни орудия также воспользуемся уравнением усеченной пирамиды с вершиной $x0_2 = 2, y0_2 = 0, z0_2 = 8$,

$$x_2 = x0_2 - z0_2 \frac{x - x0_2}{z - z0_2}, y_2 = y0_2 - z0_2 \frac{y - y0_2}{z - z0_2}$$

$$frub2 = ((2.5^2 - x_2^2) \wedge_0 (1.5^2 - y_2^2)) \wedge_0 (3.5 - z)(z - 2) \geq 0 - \text{уравнение основания башни орудия.}$$

Для построения ствола орудия воспользуемся уравнением цилиндра $fc = (0.025 - y^2 - (z - 3.5)^2) \geq 0$ и двумя плоскостями $fc1 = (9 - x)(x - 6.5) \geq 0$.

$$fct = (0.025 - y^2 - (z - 3.5)^2) \wedge_0 (9 - x)(x - 6.5) \geq 0 - \text{уравнение ствола орудия.}$$

$$fp = \left(frub2 \vee_0 \left(1 - (x - 6.5)^2 - \frac{y^2}{0.64} - \frac{(z - 3.5)^2}{0.25} \right) \right) \vee_0 fct \geq 0.$$

Окончательно уравнение поверхности корпуса корабля имеет вид

$$Wship = (frub1 \vee_0 wk) \vee_0 fp \geq 0, \text{ (рис. 5, г).}$$

Рассмотрим еще несколько успешно реализованных подходов к решению поставленной задачи [6].

Пусть $\omega_i(x, y) \geq 0, i=1, \dots, N$, а $\omega_{s1} \equiv z_1 - z \geq 0; \omega_{s2} \equiv z_2 - z \geq 0; \dots \omega_{sN} \equiv z_N - z \geq 0$. Тогда $f_i = \frac{\omega_i \omega_{si+1} - \omega_{i+1} \omega_{si}}{\omega_{si+1} - \omega_{si}} \wedge_0 \frac{\omega_{si+1} \overline{\omega}_{si}}{z_{i+1} - z_i} \geq 0, (i=1, \dots, N)$ – уравнение i -го слоя. Уравнение составной конструкции имеет вид

$$\omega = \bigcup_{i=1}^{N-1} f_i + \varepsilon \geq 0. \quad (4)$$

Если часть контуров задана в виде окружностей $\omega_i(x, y) \equiv \frac{r_i^2 - x^2 - y^2}{2r_i} \geq 0$, а часть — в виде прямоугольников $\omega_j(x, y) \equiv \frac{a_i^2 - x^2}{2a_i} \wedge_0 \frac{b_i^2 - y^2}{2b_i} \geq 0$, то, задавая значения r_i, a_i, b_i и z_i , можно получать поверхности, изображенные на рис. 6.



Рис.6. Геометрические объекты, построенные с помощью формулы (4) при соединении окружностей и прямоугольников

Анализируя данную методику, следует отметить, что результирующая функция $\omega(x, y, z)$, как обычно, положительна внутри тела, равна нулю на его поверхности и отрицательна вне его.

Пусть, как и прежде, $\omega_i(x, y) \geq 0, i=1, \dots, N$, а $\omega_{s1} \equiv z_1 - z \geq 0; \omega_{s2} \equiv z_2 - z \geq 0; \dots \omega_{sN} \equiv z_N - z \geq 0$. Тогда, если $f_i = \frac{\omega_i \omega_{si+1} - \omega_{i+1} \omega_{si}}{\omega_{si+1} - \omega_{si}} \geq 0$, то

$W_i = \sqrt{f_i^2 \vee_0 \frac{(z_{i+1} - z)(z_i - z)}{z_{i+1} - z_i}} = 0$ – уравнение боковой поверхности i -го слоя. Уравнение составной конструкции имеет вид

$$\omega = \bigcap_{i=1}^{N-1} W_i = 0. \quad (5)$$

При этом следует отметить, что результирующая функция $\omega(x, y, z)$ равна нулю на поверхности тела и положительна как внутри, так и вне его. Это дает возможность «заполнять» полученный объем другими телами (рис. 7).

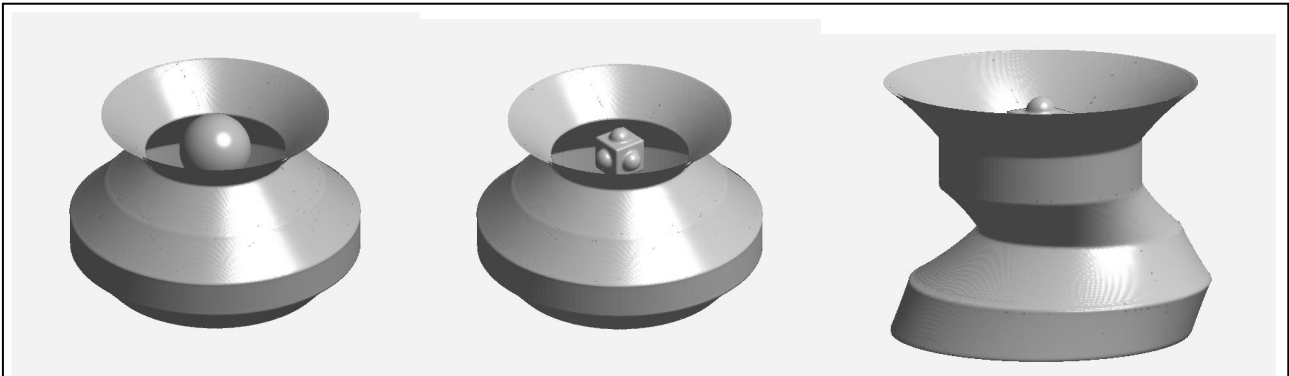


Рис.7. Геометрические объекты, построенные с помощью формулы (5)

Необходимо ещё обратить внимание на тот случай, когда в нижнем, верхнем и всех промежуточных сечениях расположены геометрические объекты (ГО), обладающие свойством геометрического подобия. Если известно построенное с помощью R-функций уравнение границы ГО в плоскости xOy – $\omega(x, y) = 0$, то уравнение подобной фигуры имеет вид $\frac{1}{k}\omega(kx, ky) = 0$, где k – коэффициент подобия. Тогда, задавая $k = k(z)$, при условии $k(0) = 1$, получим уравнение поверхности вида $\partial\Omega = \left(\frac{1}{k(z)}\omega(k(z)x, k(z)y) = 0 \right)$, которому в сечениях $z = h_i$ будут соответствовать подобные геометрические объекты.

Выводы

Построение геометрических объектов на основе функционального представления с использованием аппарата теории R-функций и поддерживающего его программного продукта является универсальным средством моделирования и визуализации. Использование буквенных параметров существенно расширяет конструктивные возможности реализации моделирования геометрических объектов. Исследованы возможности и предложены методики функционального представления геометрического объекта в 3D, основываясь на информации об уравнениях границ сечений восстанавливаемого объекта. Хранящаяся в памяти компьютера модель позволяет исследователю с помощью программных средств интерактивной трехмерной компьютерной графики манипулировать получаемыми пространственными образами, варьируя значения буквенных параметров. Построенные математические модели геометрических объектов являются их аналитической идентификацией, о чем свидетельствует визуализация полученных уравнений.

Література

1. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.
2. Максименко-Шейко, К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов и физических полей / К. В. Максименко-Шейко. – Харьков: Ин-т пробл. машиностроения НАН Украины, 2009. – 306 с.
3. Литвин, О. М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування / О. М. Литвин – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
4. R-функции и обратная задача аналитической геометрии в трехмерном пространстве / К. В. Максименко-Шейко, А. М. Мацевитый, А. В. Толок, Т. И. Шейко // Информ. технологии. – М., 2007. – № 10. – С. 23–32.
5. Новые подходы к построению уравнений трехмерных локусов с помощью R-функций / В. Л. Рвачев, А. В. Толок, Р. А. Уваров, Т. И. Шейко // Вісн. Запоріж. ун-ту. – 2000. – № 2. – С. 119–130.
6. Максименко-Шейко, К. В. R-функции в математическом моделировании геометрических объектов в 3D по информации в 2D / К. В. Максименко-Шейко, Т. И. Шейко // Вісн. Запоріж. ун-ту. – 2010. – № 1. – С. 98–104.

Поступила в редакцию 26.12.16