

УДК 621.391.81

# ФЕНОМЕНОЛОГІЧНІ МОДЕЛІ ОСНОВНИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТУПЕНЕВОГО ОПТИЧНОГО ВОЛОКНА



[Н.А. ОДЕГОВ](#), [І.О. ГЛУЩЕНКО](#), [В.О. ДУРІДІВКА](#)

Одеська національна академія зв'язку ім. О.С. Попова

**Abstract** – The paper considers a group of polynomial models of various characteristics of an optical fiber (OF) depending on the wavelength and chemical composition of the fiber. A method for structural identification of such models is proposed. The following characteristics are considered: the refractive index of the fiber core and cladding, group refractive index, group velocity, dispersion coefficients, numerical aperture, cutoff wavelength of the fundamental mode, etc. An analysis of the well-known Cauchy, Lorentz-Lorenz equations, Sellmeier's formulas, etc. is given in relation to the problem being solved. The applied method of structural identification provides for the decomposition of a complex computational problem into simpler ones. This technique involves the identification of polynomial models for different samples of a substance. After that, structural identification is performed by the parameter of the additives to quartz glass. The proposed method and models are tested on the example of parameter values: the wavelength range is from 0.8 to 1.8  $\mu\text{m}$ , the type of optical fiber is single-mode, and the refractive index is stepped. For calculations, the tabular values of the coefficients of the Sellmeier formula for  $\text{SiO}_2$  with  $\text{GeO}_2$  additions from 0% to 13.5% were used. It is shown that the dependence of the main characteristics of OF on wavelength and chemical composition is modeled with sufficient accuracy by a polynomial model. Indicators of the highest degree on two arguments can be limited to the third degree. The synthesized models have an interpolation and extrapolation error in the considered ranges of the order of 0.001%. This makes it possible to recommend them for scientific and engineering applications, as well as for solving problems of the production of organic matter with predictable characteristics.

**Анотація** – В роботі розглядається група поліноміальних моделей різних характеристик оптичного волокна (ОВ) залежно від довжини хвилі і від хімічного складу волокна. Запропоновано метод структурної ідентифікації таких моделей. Як характеристики розглядаються: показник заломлення серцевини і оболонки волокна, груповий показник заломлення, групова швидкість, коефіцієнти дисперсії, числова апертура, довжина хвилі відсічення основної моди і ін. Дається аналіз відомих рівнянь Коші, Лоренц-Лоренца, формули Селмеєра тощо. Стосовно розв'язуваної задачі застосовується метод структурної ідентифікації передбачена декомпозиція складної обчислювальної задачі на більш прості. Даний прийом передбачає ідентифікацію поліноміальних моделей для різних зразків речовини. Після цього виконується структурна ідентифікація по параметру добавок до кварцового скла. Запропонований метод і моделі апробуються на прикладі значень параметрів: діапазон довжин хвиль від 0,8 до 1,8 мкм, тип ОВ - одномодове, показник профілю заломлення - ступінчастий. Для розрахунків використані табличні значення коефіцієнтів формули Селмеєра для  $\text{SiO}_2$  з добавками  $\text{GeO}_2$  від 0% до 13,5%. Показано, що залежність основних характеристик ОВ від довжини хвилі і хімічного складу з достатньою точністю моделюється поліномом, а показники вищих ступенів двох аргументів можуть бути обмежені третім ступенем. Синтезовані моделі мають помилку інтерполяції й екстраполяції в розглянутих діапазонах порядку 0,001%. Це дозволяє рекомендувати їх для наукових та інженерних додатків, а також для вирішення завдань виробництва ОВ з прогнозованими характеристиками.

## Вступ

Актуальним завданням сучасної прикладної науки є розробка матеріалів і речовин з прогнозованими властивостями. Стосовно волоконно-оптичних систем передачі (ВОСП) це завдання частково зводиться до синтезу моделей характеристик оптичного волокна (ОВ), які дозволяють мінімізувати кількість і вартість виготовлення різ-

них варіантів зразків. Тобто мова йде про те, щоб такі моделі давали змогу замінювати прямі виміри теоретичними розрахунками з достатньою точністю.

**Метою даної роботи** є обґрунтування класу моделей основних характеристик ОВ, які функціонально зв'язані з коефіцієнтами заломлення серцевини та оболонки.

На даний час найбільш масове використання у практичних ВОСП знайшли ОВ, де основним матеріалом серцевини та оболонки є кварцове скло [1] з базовим матеріалом  $\text{SiO}_2$ . При цьому коефіцієнти заломлення (КЗ) серцевини  $n_1$  і оболонки  $n_2$  ОВ зі ступеневим градієнтом КЗ (надалі – ступеневе ОВ) регулюються домішками речовин  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{GeO}_2$ ,  $\text{P}_2\text{O}_5$ ,  $\text{B}_2\text{O}_3$  тощо. [2]. З іншого боку, ще до дослідів Ісаака Ньютона (у 1770 році) по розщепленню світла на призмі, людина спостерігала залежність КЗ від довжини хвилі у весельці. А така залежність обумовлює дисперсійні властивості ОВ. Тому актуальною задачею є встановлення залежності КЗ як від довжини хвилі, так і від хімічного складу речовин [3]. У випадку домішки однією речовиною КЗ, таким чином, виражається залежністю від двох параметрів:  $n = n(\lambda, \mu)$ , де  $\lambda$  – довжина хвилі;  $\mu$  – параметр концентрації домішки до базової речовини  $\text{SiO}_2$ . У даній роботі під параметром  $\mu$  розуміється масова доля (процент домішки, поділений на 100). Аналітична модель КЗ серцевини у вигляді  $n_1(\lambda, \mu)$  дозволить розрахувати важливі для теоретичного аналізу [4] та розрахунку довжини регенераційних ділянок [5,6] характеристики ОВ:

$$n_{gr}(\lambda, \mu) = n(\lambda, \mu) - \frac{\partial n(\lambda, \mu)}{\partial \lambda}, \quad v_{gr}(\lambda, \mu) = \frac{c}{n_{gr}(\lambda, \mu)}, \quad D_m(\lambda, \mu) = \frac{\lambda}{c} \frac{\partial^2 n(\lambda, \mu)}{\partial \lambda^2}, \quad (1)$$

де  $n_{gr}$  – груповий КЗ;

$v_{gr}$  – групова швидкість світла у середовищі серцевини ОВ;

$D_m$  – матеріальна дисперсія серцевини;

$c$  – швидкість світла у вакуумі.

Зауважимо, що для одномодового ОВ матеріальна дисперсія практично співпадає з хроматичною дисперсією, яка враховує також і модову дисперсію [5]. Для визначення режиму роботи ОВ важливими є пов'язані з КЗ характеристики [1,2,7,8]:

$$NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad V = \frac{\pi d}{\lambda} NA, \quad \lambda_{cut} = \frac{\pi d}{2,405} NA, \quad d_{mf} = d(0,65 + 1,619V^{-1,5} + 2,879V^{-6}), \quad (2)$$

де  $NA$  – числова апертура;

$V$  – нормована частота;

$\lambda_{cut}$  – довжина хвилі відсікання (для центральної моди);

$d_{mf}$  – діаметр модового поля;

$d$  – діаметр серцевини ОВ.

У виразах (2) значення КЗ  $n_1$  серцевини ОВ та  $n_2$  оболонки ОВ також залежать від довжини хвилі і хімічних складів відповідних матеріалів. У новітніх дослідженнях

характеристики (2) використовуються також для визначення потенціально досяжної швидкості передачі у ВОСП [7].

У роботах [9,10] пропонувані моделі частини характеристик (1) у вигляді ступеневих поліномів залежно від частоти та хімічного складу, а також методики їх структурної та параметричної ідентифікації. В даній роботі пропонувані моделі поширюються також на всю сукупність характеристик (1) та (2) з урахуванням залежності від довжини хвилі.

## I. Аналіз літературних джерел

Можливо, перше співвідношення залежності КЗ від довжини хвилі для конкретної речовини вивів математик Огюстен Коші на основі дифракційної теорії Огюста Френеля [11]:

$$n(\lambda) = A + B/\lambda_0^2 + C/\lambda_0^4 \dots, \quad (3)$$

де  $\lambda_0$  – довжина хвилі у вакуумі;

$A, B, C \dots$  – вільні параметри моделі, які визначаються підгонкою експериментальних даних та можуть бути різними для різних речовин.

У 1880 році вчені з подібними прізвищами Лоренц (Ludvig Valentin Lorenz та Hendrik Antoon Lorentz) незалежно опублікували формулу, яка отримала назву рівняння (співвідношення) Лоренц-Лоренца. У найбільш використовуваному вигляді це співвідношення для однієї або декількох речовин має наступний вигляд [11,12]:

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} N\alpha, \quad \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = \frac{4\pi}{3} [N_1\alpha_1 + N_2\alpha_2 + \dots], \quad (4)$$

де  $N, N_1, N_2 \dots$  – концентрації частки речовин;

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \dots$  – відповідні параметри поляризації, які пов'язують напруженість електричного поля  $E$  з дипольним моментом  $p$  окремої частинки:  $p_k = \alpha_k E$ .

Завдяки виразу КЗ через фундаментальні властивості речовини рівняння (4) використовується у сучасних наукових дослідженнях [13-16].

Відомі дисперсійні формули, які пов'язують КЗ з частотою або з довжиною хвилі, а також з частотами (відповідно, довжинами хвиль) електронних та іонних резонансів [11]. У наукових та інженерних дослідженнях такі залежності використовуються у формі часткової суми ряду Селмеєра (Sellmeier) [1,4,5]:

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^K \frac{A_k}{\lambda^2 - l_k^2}, \quad (5)$$

де  $A_k$  – коефіцієнти, що характеризують внесок «резонансів»;

$l_k$  – довжина хвиль «резонансів»;

$K$  – загальна кількість складових.

Реально параметр  $K$  обмежується, як правило, значенням 3 (т.з. «тричленна формула Селмеєра» [5]). В даному випадку слово «резонанси» взято у лапки тому, що коефіцієнти у формулі (5) визначаються за результатами вимірювань методом підгонки [2,4], а тому обчислені довжини хвиль  $l_k$  не обов'язково співпадають з будь-якими довжинами хвиль атомних або іонних резонансів. Відмітимо, що модель у формі (5) широко використовується у сучасних наукових дослідженнях [17-20].

У подальших дослідженнях буде використано таблицю коефіцієнтів тричленної формули Селмеєра для кварцового скла з домішками  $\text{GeO}_2$ , дані якої зібрано з різних джерел [2, 4, 5, 21] (табл. 1).

Таблиця 1. Значення коефіцієнтів формули Селмеєра для  $(1-\mu)\text{SiO}_2 + \mu\text{GeO}_2$

$\mu$	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
0	0,69616630	0,40794260	0,89747940	0,06840430	0,11624140	9,89616100
0,031	0,70285540	0,41463070	0,89745400	0,07277230	0,11430850	9,89616100
0,035	0,70420380	0,41600320	0,90740490	0,05144150	0,12916000	9,89615600
0,041	0,68671749	0,43481505	0,89656582	0,07267519	0,11514351	10,00239800
0,058	0,70888760	0,42068030	0,07808758	0,06090530	0,12545140	9,86162000
0,070	0,68698290	0,44479505	0,79073512	0,07808758	0,11551840	10,43662800
0,079	0,71368924	0,42548070	0,89642260	0,06171670	0,12708140	9,89616100
0,135	0,73454395	0,42710828	0,82103399	0,08697693	0,11195191	10,84654000

Серед альтернативних моделей відмітимо відношення Равіндри (N.M. Ravindra [22]), яке встановлює зв'язок між КЗ та забороненими зонами енергії для напівпровідників. Корисною для подальшого є просте рівняння, що пов'язує КЗ з груповим КЗ та матеріальною дисперсією, яке доводиться як дещо тавтологічна теорема [23]:

$$n(\lambda) = n(0) + \lambda \lim_{\lambda \rightarrow 0} \left[ \frac{\partial n(\lambda)}{\partial \lambda} - \frac{\partial n_g(\lambda)}{\partial \lambda} \right] + \frac{c\lambda^2}{2} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\partial D_m(\lambda)}{\partial \lambda} + O(\lambda^2). \quad (6)$$

Конструктивний зміст залежності (6) не зовсім зрозумілий: не ясно, як виміряти параметри, наприклад, КЗ, при  $\lambda = 0$  (тобто при нескінченній частоті випромінювання). Тому, все ж таки, краще замість фактичного розкладання залежності КЗ від довжини хвилі у вигляді ряду Маклорена користуватися рядом Тейлора в околиці деякої певної довжини хвилі  $\lambda_0$ , що знаходиться у діапазоні, що досліджується. Зауважимо, що похідну матеріальної дисперсії далеко не завжди можна вважати приблизно постійною у певному діапазоні.

Аналіз всіх розглянутих моделей (2)-(6) показує, що залежність КЗ як від довжини хвилі, так і від концентрації домішок носить досить «гладкий» характер, тобто всі ці функції диференціюються по параметрам. Окремий випадок – залежність (5), де є окремі точки розриву (при  $\lambda \equiv l_k$ ). Але, при значній відстані від довжини хвиль «резонансів» цим можна знехтувати.

Далі розглядатимуться два діапазони довжини хвиль: широкий – від 0,8 до 1,8 мкм, що включає вікна прозорості ВОСП (0,855, 1,330 та 1,550 мкм), а також вузький –

від 1,460 до 1,625 мкм (діапазони S-C-L DWDM за рекомендаціями MCE-T [24]). Як показує аналіз табл. 1, широкий та вузький діапазони не включають у даному випадку довжини хвиль «резонансів». Тому пропонується модель залежності  $n(\lambda, \mu)$ , аналогічна [10], у вигляді поліному:

$$n(\lambda, \mu) = \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M a_{k,m} \lambda^k \mu^m, \quad (7)$$

де вільні коефіцієнти  $a_{k,m}$  теоретично виражаються через часткові похідні відповідного порядку по параметрам  $\lambda$  та  $\mu$ , а практично – на основі обробки експериментальних даних.

Окрему задачу складає вибір вищих ступенів  $K$  і  $M$  поліному (7). Формально така задача не має кінцевого рішення: складність моделі залежить від точності даних вимірювань, необхідної точності моделі, обраного діапазону значень параметрів та ін. Наприклад, не складно довести, що будь-яка залежність може моделюватись поліномом нульового ступеню (тобто, константою), якщо діапазон значень параметрів достатньо малий. Для діапазону хвиль DWDM значення параметра  $K$  попередньо можна визначити за рекомендаціями MCE-T [25], де коефіцієнт хроматичної дисперсії пропонується апроксимувати лінійним поліномом:

$$D_{chr}(\lambda) = D_{chr}(\lambda_0) + S(\lambda_0)(\lambda - \lambda_0), \quad S(\lambda_0) = const, \quad \lambda_0 = 1550 \text{ нм},$$

де  $S(\lambda_0)$  – коефіцієнт нахилу дисперсійної характеристики.

Оскільки коефіцієнт  $D_{chr}(\lambda)$  практично співпадає з матеріальною дисперсією  $D_m(\lambda)$ , а матеріальна дисперсія виражається через другу похідну по  $\lambda$  (1), то у формулі (7) слід визначити:  $K \geq 3$ .

З метрологічної точки зору визначення межі значень параметра  $M$  є більш складною задачею, бо потребує виготовлення зразків ОВ з різними хімічними складами. Відомі графіки залежності  $n(\lambda = const, \mu)$  у вигляді лінійної функції [2], тобто  $M = 1$ . У сучасних дослідженнях використовуються прецизійні виміри КЗ та функцій від нього за допомогою інтерферометрів Фарбі-Перо [26], решіток Брега [27], інтерферометрів Маха-Цендера [28,29] та ін. Точність вимірювань (відносна похибка) досягає 0,0002 (0,02%) або меншого значення [30]. Надалі важливо, що залежність  $\partial n(\lambda, \mu) / \partial \mu$  апроксимується регресійними моделями у вигляді лінійних поліномів або більш складними лініями регресії [13]. Тому у діапазоні значень  $\mu = 0,0..0,2$  доцільно обирати значення параметру  $M \geq 2$ .

Підсумуємо результати аналізу літературних джерел. Для вирішення завдань структурної ідентифікації поліноміальних моделей (7) у визначених діапазонах слід обирати значення параметрів:  $K \geq 3$  та  $M \geq 2$ . Модель, яка має відносну похибку у межах 0,0002 (0,02%) можна вважати адекватною для вирішення практичних завдань.

### III. Метод структурної ідентифікації моделей

Для визначення параметрів та структури моделей типу (7) можна використовувати різні методи структурної ідентифікації [31-35].

Взагалі ці методи зводяться до наступного. Спершу отримується сукупність даних вимірювань, які є базою подальшого моделювання.

В нашому випадку в якості такої сукупності будемо використовувати дані розрахунків за формулою (5) та табл. 1. Умовно будемо вважати, що такі дані таких «вимірювань» є *абсолютно* точними.

Наступний крок – вибір множини альтернативних аналітичних моделей регресії [33]. Це завдання вирішується в окремих випадках на підставі фізичних чи інших міркувань. Нами обрана сукупність моделей (7).

Далі отримані дані вимірювань розподіляються на одну чи більше сукупностей (підвибірок). По першій (пробній або навчальній) підвибірці ідентифікуються вільні параметри альтернативних моделей. Далі моделі екстраполюються на інші (контрольні) підвибірки, де визначаються показники їх екстраполяційної стійкості: у термінології метода групового врахування аргументів (МГВА) – зовнішній критерій [31]. Найкращою або найкращими вважаються моделі, які дають оптимальні значення зовнішнього критерію на контрольній вибірці.

У даній роботі використано найпростіший варіант визначення похибки моделей у вигляді лінійної метрики (відношення середнього модуля похибки до середнього значення функції):

$$\delta y = \left[ \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q |y_{\text{mod},q} - y_{\text{exp},q}| \right] / \left[ \frac{1}{Q} \sum_{q=1}^Q |y_{\text{exp},q}| \right] = \sum_{q=1}^Q |y_{\text{mod},q} - y_{\text{exp},q}| / \sum_{q=1}^Q |y_{\text{exp},q}|, \quad (8)$$

де  $y_{\text{mod},q}$  – відлік значення моделі;

$y_{\text{exp},q}$  – відповідне значення виміру модульованої величини.

Оскільки значення  $\delta y$  можуть бути досить малими, ті ж самі значення представляються також у вигляді проценту відносної похибки:  $\delta y\% = 100 \cdot \delta y$ .

Задача розподілу даних на пробну та контрольну підвибірки не є тривіальною [34]. Лише у випадку, коли точно визначені закони розподілу похибок та апріорно виконано ряд інших припущень, можна вирішити цю задачу аналітично. Але у цьому випадку сама по собі задача втрачає практичну сутність. Тому, з нашої точки зору, більш доцільно надати чіткий опис процедури ідентифікації для можливості подальшої верифікації отриманих рішень. В цій роботі дані для матеріалів (табл. 1) з домішками  $\text{GeO}_2$  від 0% до 7,9% включно складають пробну вибірку, а дані для 13,5% домішки  $\text{GeO}_2$  – контрольну вибірку.

Параметрична ідентифікація у МГВА виконується, як правило, методом найменших квадратів (МНК). Для моделі (7) ця задача зводиться до вирішення системи із  $(K + M)$  лінійних рівнянь з  $(K + M)$  невідомими. Матриця такої системи є квадратичною формою і, як відомо, погано обумовлена: невеликі похибки вимірювань та по-

милки кінцевої точності обчислень можуть призводити до суттєвих похибок результатів. При цьому такі методичні похибки нелінійно зростають з ростом порядку системи рівнянь. Тому, як мінімум, рішення таких систем треба методом Гауса слід супроводжувати вибором ведучого елемента на кожному кроці процедури.

Додаткову обчислювальну стійкість дає метод декомпозиції, використаний у [9, 10]. В даній роботі він застосовується наступним чином.

Для кожної речовини з пробної вибірки вирішується задача структурної ідентифікації моделі:

$$n(\lambda, \mu_p) = a_{0,p} + a_{1,p}\lambda + a_{2,p}\lambda^2 + \dots + a_{K(p),p}\lambda^{K(p)}, \quad p = 1, 2, \dots, P, \quad (9)$$

де  $p$  – номер варіанту речовини з табл. 1;

$P$  – кількість варіантів речовин у пробній вибірці (в даному випадку  $P = 7$ ).

У пробну вибірку включається 70% значень у діапазонах довжини хвилі, у контрольну – 30%.

Із визначених старших ступенів обирається найбільше значення  $K = \max\{p\}K(p)$ . Далі коефіцієнти всіх залежностей (9) перераховуються для всього діапазону довжини хвиль та отримується матриця коефіцієнтів  $a_{k,p}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ ,  $p = 1, 2, \dots, P$ , а також отримуються параметри моделі для контрольної речовини (86,5% SiO<sub>2</sub> 13,5% GeO<sub>2</sub>):  $a_{k,P+1}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ .

Наступний крок – структурна ідентифікація по параметру  $\mu$ . На цьому кроці коефіцієнти  $a_{k,p}$  при кожній ступені  $k = 1, 2, \dots, K$  залежності від довжини хвилі трактується як масив «експериментальних» даних. Для кожної ступені аналогічним чином вирішується задача структурної ідентифікації, визначається максимальна ступень залежності  $M$  від параметра  $\mu$ . Коефіцієнти у виразі (9) також представляються у вигляді степеневих поліномів:

$$a_k(\mu) = b_{k,0} + b_{k,1}\mu + \dots + b_{k,M}\mu^M, \quad (10)$$

тобто інформація про результати структурної ідентифікації будуть визначені матрицею коефіцієнтів  $b_{k,m}$ ,  $k = 0, 1, \dots, K$ ,  $m = 0, 1, \dots, M$ , а сама ідентифікована модель (7) матиме загальний вигляд:

$$n(\lambda, \mu) = \sum_{m=0}^M b_{0,m}\mu^m + \lambda \sum_{m=0}^M b_{1,m}\mu^m + \lambda^2 \sum_{m=0}^M b_{2,m}\mu^m + \dots + \lambda^K \sum_{m=0}^M b_{K,m}\mu^m. \quad (11)$$

Група параметрів (1) залежить від похідних КЗ по довжині хвилі. У роботі [35] пропонується використовувати чотирьохточкову схему обчислення похідних. Крок відстані між окремими значеннями  $n(\lambda)$  обирається при цьому рівним 10 нм, що математично глибоко обґрунтовується. На наш погляд, якщо є надійна та досить точна аналітична модель, то значення кроку  $n(\lambda)$  для подальшого диференціювання можна обрати таким малим, як потрібно. Тому у роботі використовується найпростіша двоточкова схема (буквально, за визначенням похідної):  $\partial n(\lambda) / \partial \lambda \approx \Delta n / \Delta \lambda$ .

## IV. Програмні засоби та результати моделювання

Моделювання за методикою п. 2 виконано за допомогою авторської програми Sellmeier (платформа Visual Studio, мова програмування C#). Для базових розрахунків по формулі Селмеєра (5) використано дані табл. 1. Крок значень довжини хвилі 1,0 нм. Діапазони довжини хвилі 0,8-1,8 мкм (широкий діапазон) або 1,4-1,7 мкм (вузький діапазон, що включає S-C-L діапазони DWDM).

На рис. 1 подано загальний вигляд вікна програми Sellmeier для одного з варіантів відображення графіків  $n(\lambda)$  для матеріалу серцевини (core) 3,5%GeO<sub>2</sub>\_96,5%SiO<sub>2</sub> та матеріалу оболонки 0%GeO<sub>2</sub>\_100%SiO<sub>2</sub> (cladding). Програма дозволяє розраховувати всі параметри серцевини за формулами (1) та всі параметри з урахуванням матеріалу серцевини і оболонки за формулами (2). У режимі відображення All Functions відображаються графіки всіх залежностей (1) для всіх матеріалів табл. 1 (рис. 2).

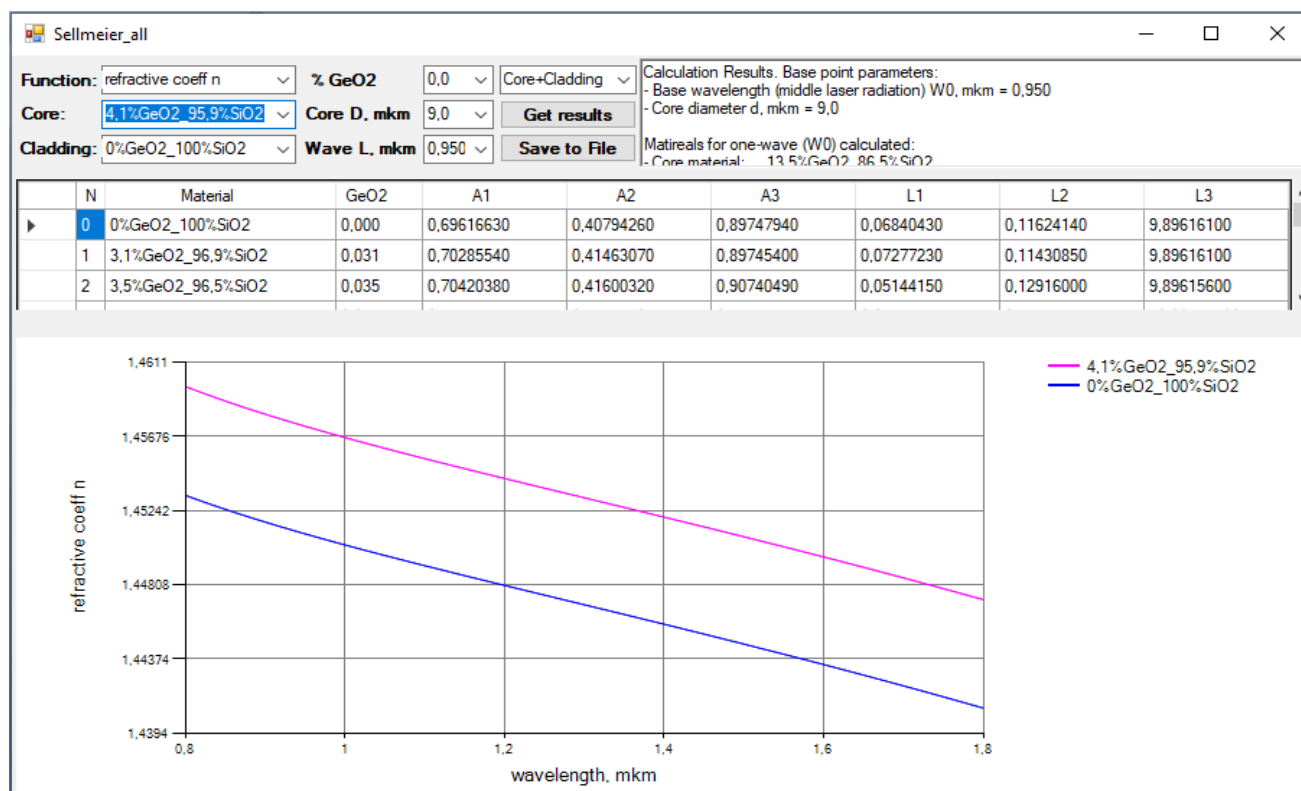


Рис. 1. Вікно програми Sellmeier

Відображення результатів розрахунків за формулами (2) дано на рис. 3 на прикладі одномодового ОВ (діаметр серцевини 9,0 мкм) та для матеріалів серцевини і оболонки за рис. 1.



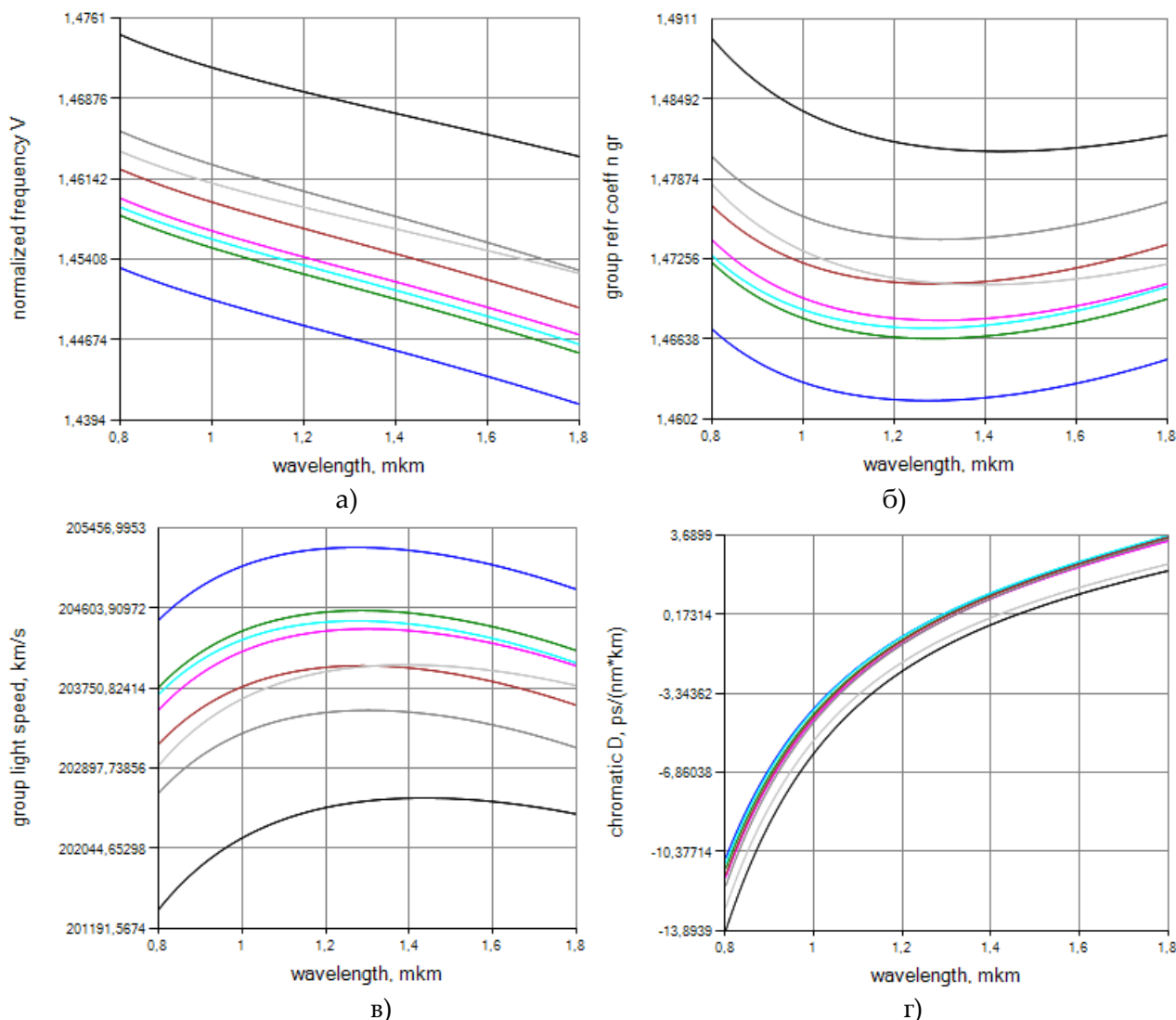


Рис. 2. Варіанти відображення графіків за формулами (1): а) КЗ  $n(\lambda, \mu)$ , б) груповий КЗ  $n_{gr}(\lambda, \mu)$ , в) групова швидкість світла  $v_{gr}(\lambda, \mu)$ , г) матеріальна дисперсія  $D_m(\lambda, \mu)$

Результати екстраполяції моделей КЗ у вигляді (9) для даних табл. 1 на контрольну вибірку значень довжини хвиль дозволяють визначити значення максимального ступеню розкладання по довжині хвилі  $K = 3$ . При  $K < 3$  моделі мають значні похибки екстраполяції, а при  $K > 3$  точність екстраполяції не підвищується. Значення уточнених коефіцієнтів залежностей (9) для КЗ та відносних похибок (у процентах) дано у табл. 2.

Для залежності від частки домішок  $\mu$ -оптимальним найвищим ступенем згідно запропонованого методу визначено  $M = 2$ . Тобто, модель (11) у даному випадку визначається матрицею з 12 коефіцієнтів:  $b_{k,m}$ ,  $k = 0,1,2,3$ ,  $m = 0,1,2$ . Значення цих коефіцієнтів дано у табл. 3.

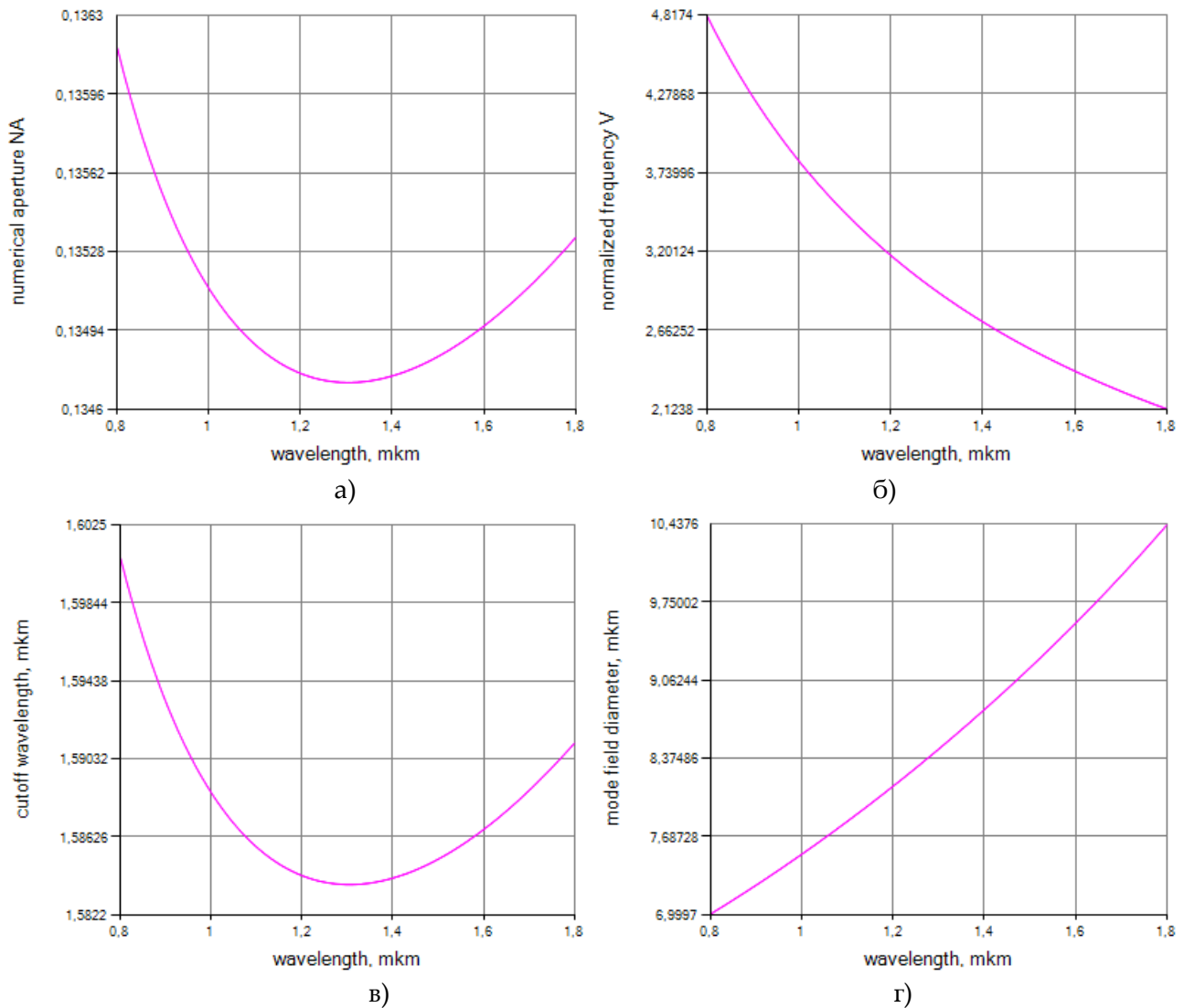


Рис. 3. Відображення графіків залежностей (2): а) числова апертура  $NA$ , б) нормована частота  $V$ , в) довжина хвилі відсічки  $\lambda_{cut}$ , г) діаметр модового поля  $d_{mf}$

Таблиця 2. Коефіцієнти та похибки моделей  $n(\lambda, \mu_p)$  для різного складу речовини

$\mu$	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$\delta\%$
0	1,4725E+00	-3,5958E-02	1,8468E-02	-4,5990E-03	1,2580E-03
0,031	1,4780E+00	-3,7299E-02	1,9273E-02	-4,7628E-03	1,3007E-03
0,035	1,4783E+00	-3,6366E-02	1,8715E-02	-4,6593E-03	1,2766E-03
0,041	1,4800E+00	-3,8294E-02	1,9932E-02	-4,8789E-03	1,3366E-03
0,058	1,4825E+00	-3,7935E-02	1,9666E-02	-4,8491E-03	1,3259E-03
0,070	1,4852E+00	-4,1076E-02	2,2127E-02	-5,1803E-03	1,4377E-03
0,079	1,4866E+00	-3,9258E-02	2,0480E-02	-5,0108E-03	1,3711E-03
0,135	1,4971E+00	-4,3848E-02	2,3870E-02	-5,5076E-03	1,5257E-03

Таблиця 3. Значення коефіцієнтів  $b_{k,m}$  моделі (11) для КЗ

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$m = 0$	1,4725E+00	-3,5737E-02	1,8304E-02	-4,5731E-03
$m = 1$	1,7264E-01	-4,3452E-02	2,7229E-02	-5,4559E-03
$m = 2$	7,4450E-02	-1,2645E-01	1,0590E-01	-1,1286E-02

Програма Sellmeier дозволяє розрахувати параметри аналогічних моделей для всіх функцій (2). Як приклад матрицю коефіцієнтів залежності виду (11) для групової швидкості дано у табл. 4.

Таблиця 4. Значення коефіцієнтів  $b_{k,m}$  моделі (11) для групової швидкості

	$k = 0$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$
$m = 0$	1,9755E+05	1,5002E+04	=-9,3080E+03	1,7835E+03
$m = 1$	-3,0942E+04	1,7010E+04	-1,0149E+04	2,2045E+03
$m = 2$	2,4011E+04	4,0749E+04	-1,8822E+04	5,6344E+03

Відносні похибки (у процентах) моделей (11) для всіх залежностей (1) порівняно з розрахунками по базовій формулі Селмеєра (5) і дано у табл. 5

Таблиця 5. Похибки моделей (11) для залежностей (1)

$\mu$	$\delta\% n(\lambda, \mu)$	$\delta\% n_{gr}(\lambda, \mu)$	$\delta\% v_{gr}(\lambda, \mu)$	$\delta\% D_m(\lambda, \mu)$
0	1,6654E-03	8,5743E-03	8,5861E-03	3,5759E+00
0,031	3,5226E-03	5,0539E-03	5,0730E-03	3,5779E+00
0,035	9,0029E-03	1,8046E-02	1,8079E-02	6,5338E+00
0,041	1,8995E-03	4,9542E-03	4,8798E-03	3,8584E+00
0,058	8,8928E-03	2,3464E-02	2,3457E-02	8,1049E+00
0,070	1,9209E-02	9,1130E-02	9,1293E-02	2,1617E+01
0,079	1,0760E-02	5,3122E-02	5,3060E-02	1,1318E+01
0,135	1,5397E-03	4,7541E-03	4,6493E-03	3,7424E+00

Аналіз похибок за даними табл. 2 та табл. 5 дозволяє зробити висновок, що поліноміальні моделі (11) мають досить велику точність: методична похибка має порядок, що не перевищує порядку похибки вимірювань. Виключення в даному випадку складає модель залежності  $\delta\% D_m(\lambda, \mu)$ , для якої похибка досягає 20%, що обумовлено двократним чисельним диференціюванням. Але й цю модель можна рекомендувати для експрес-аналізу.

На перший погляд, моделі (11) більш складні, ніж залежність (5): мають 12 вільних коефіцієнтів проти 6. Але ця складність надає можливість розраховувати значення параметрів ОВ при будь-яких значеннях параметрів  $\lambda$  та  $\mu$  у визначених діапазонах.

Певним недоліком моделей виду (11) є феноменологічний характер, тобто вони явним чином не залежать від фундаментальних властивостей речовини, наприклад, від частот резонансів. Проте цей недолік компенсується у даному випадку високою точністю та найпростішим способом параметричної ідентифікації, що зводиться до вирішення лінійних алгебраїчних рівнянь.

Додатковий аналіз даних табл. 2 показує, що залежність від складу речовини найбільше обумовлена варіацією значень коефіцієнтів при нульовому ступеню залежності від довжини хвилі. Тому для експрес-аналізу можна рекомендувати спрощену модель залежностей у вигляді:

$$n(\lambda, \mu) = N(\mu) + N(\lambda), \quad N(\mu) = a_0 + a_1\mu + a_2\mu^2, \quad N(\lambda) = b_1\lambda + b_2\lambda^2 + b_3\lambda^3. \quad (12)$$

Значення коефіцієнтів за формулою (12), а також значення відносних похибок (у процентах) для різних залежностей (1) дано у табл. 6. Похибки дано як максимальні значення для всього масиву речовин з табл. 1. Моделювання виконано для діапазону довжини хвиль 0,8-1,8 мкм.

Таблиця 6. Коефіцієнти та похибки моделей (12) для залежностей (1)

Функція	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\delta\%$
$n(\lambda, \mu)$	1,4725E+00	1,726E-01	-3,875E-02	7,4450E-02	2,0316E-02	-4,931E-03	8,5894E-02
$n_{gr}(\lambda, \mu)$	1,5166E+00	2,3254E-01	-1,169E-01	2,1542E-01	7,2249E-02	-1,403E-02	6,7437E-01
$v_{gr}(\lambda, \mu)$	1,9755E+05	-3,094E+04	-2,401E+04	1,6143E+04	-9,963E+03	1,9330E+03	6,0815E-01

Порівняння похибок у табл. 5 та табл. 6 показує, що спрощена модель (12) приблизно на порядок менш точна, ніж повна модель (11). Втім, для інженерних розрахунків і ряду задач теоретичного аналізу вона має достатню точність. Для ряду теоретичних задач зручно, що у моделі (12) функції залежності від параметрів  $\lambda$  і  $\mu$  відокремлені.

Тому для крос-похідних виконуються умови:  $\partial N(\mu) / \partial \lambda \equiv 0$ ;  $\partial N(\lambda) / \partial \mu \equiv 0$ . Це положення дозволяє для певних діапазонів параметрів використовувати форми виду (12) для моделювання залежностей для кількох складів домішок.

Поліноміальні моделі певного порядку дають, як відомо, тим більшу точність інтерполяції, чим у меншому діапазоні вона виконується. Для вузького діапазону хвиль від 1,4 до 1,7 також виконано аналогічні розрахунки. Результати приведені у табл. 7. Порівняно з даними табл. 6, як можна бачити, точність підвищилася в 2-4 рази.

Таблиця 7. Коефіцієнти та похибки моделей (12) для діапазону 1,4-1,7 мкм

Функція	$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\delta\%$
$n(\lambda, \mu)$	1,4637E+00	1,6110E-01	4,1507E-02	-1,864E-02	6,3649E-03	-1,739E-03	2,6756E-02
$n_{gr}(\lambda, \mu)$	1,4885E+00	1,9298E-01	1,6930E-01	-5,274E-02	2,7707E-02	-3,849E-03	4,7967E-01
$v_{gr}(\lambda, \mu)$	2,0144E+05	-2,633E+04	7,3745E+03	-1,923E+04	-3,885E+03	5,4355E+02	4,4905E-01

Програма Sellmeier дозволяє ідентифікувати також поліноміальні моделі залежностей (2). Для цих функцій так само оптимальним є моделювання залежностями від довжини хвилі у вигляді кубічного поліному.

## Висновки

1. Пропоновані поліноміальні моделі дозволяють вирішувати задачі інтерполяції та екстраполяції значень різних характеристик оптичного волокна залежно як від довжини хвилі, так і від його хімічного складу. Це дозволяє мінімізувати витрати на проведення натурних іспитів і спростити вирішення завдань вироблення волокна з прогнозованими властивостями.

2. На певній відстані від частот резонансів речовини поліноміальні моделі дають результати обчислень досить високої точності для вирішення інженерних і наукових задач.

3. Для розглянутого в роботі випадку достатньо моделювати залежності поліномами досить низького ступеню: другого ступеню по частці домішок і третього ступеню по довжині хвилі.

4. Для вузьких діапазонів хвиль спрощені моделі з 6 коефіцієнтами також мають достатню точність для інженерного та наукового експрес-аналізу.

5. Пропонований метод декомпозиції задачі структурної ідентифікації дозволяє суттєво підвищити обчислювальну стійкість рішень: рішення системи лінійних рівнянь порядку  $(K \times M)$  замінюється рішенням  $M$  систем порядку  $K$  кожна.

6. Певним недоліком пропонованих моделей є їх феноменологічний характер, що компенсується високою точністю та простотою процедур обробки експериментальних даних.

## Список літератури:

1. Бейли, Д., Райт, Э. (2006), Волоконная оптика: теория и практика, Пер. с англ. М.: КУДИЦ-ОБРАЗ, 320 с.
2. Гауэр, Дж. (1989), Оптические системы связи: Пер. с англ. М.: Радио и связь, 504 с.
3. Korsakov, A., Salimgareev, D., Lvov, A., Zhukova, L. (2017), "IR spectroscopic determination of the refractive index of  $Ag_{1-x}Tl_xBr_{1-0.54x}I_{0.54x}$  ( $0 \leq x \leq 0.05$ ) crystals", Optics & Laser Technology. No. 93, P. 18-23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2017.01.030>
4. Agrawal, G. P. (2006), Nonlinear Fiber Optics, Elsevier Inc. USA, 552 p.
5. Иоргачев, Д. В., Бондаренко, О. В., Дащенко, А. Ф., Усов, А. В. (2000), Волоконно-оптические кабели, Одесса: Астропринт, 536 с.
6. Бондаренко, О. В., Петрович, В. С., Степанов, Д. М. (2012), Методичні вказівки з курсового проектування, ОНАЗ ім. О.С. Попова, 59 с.
7. Волоконно-оптическая техника: Современное состояние и перспективы. Сб. статей под ред. С.А. Дмитриева и Н.Н. Слепова (2005), М.: ООО «Волоконно-оптическая техника», 576 с.
8. Корнейчук, В. И., Макаров, Т. В., Панфилов, И. П. (1994), Оптические системы передачи, Киев: Техника, 386 с.

9. Одегов, Н. А., Грушенко, А. А., Костюк, В. В., Резник, Р. С. (2018), “Методика синтеза моделей зависимостей дисперсионных характеристик от частоты и состава оптического волокна”, Наукові праці ОНАЗ ім. О.С. Попова, No. 1, С. 68-76. DOI: <https://doi.org/10.33243/2518-7139-2018-1-1-68-76>
10. Odegov, N. A., Staren'kyu, I. V., Kostjuk, V. V. (2018), “Formation the picosecond optical pulses of the assigned structure using precision lines of delay”, Proceedings of the O. S. Popov ONAT, No. 1, С. 34-43. DOI: <https://doi.org/10.33243/2518-7139-2018-1-1-34-43>
11. Калитеевский, Н. И. (1978), Волновая оптика, М.: Высш. школа, 383 с.
12. Борн, М., Вольф, Э. (1973), Основы оптики, М.: Наука, 716 с.
13. Hanley, B. F. (2020), “A practical method for estimating specific refractive index increments for flexible non-electrolyte polymers and copolymers in pure and mixed solvents using the Gladstone-Dale and Lorentz-Lorenz equations in conjunction with molar refraction structural constants, and solvent physical property databases”, Materials Today Communications, No. 25, 101644. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2020.101644>
14. Fang, Y., Furniss, D., Jayasuriya, D., Parnell, H., Tang, Z.Q., Gibson, D., Bayya, S., Sanghera, J., Seddon, A. B., Benson, T. M. (2019), “(INVITED) Methods for determining the refractive indices and thermo-optic coefficients of chalcogenide glasses at MIR wavelengths”, Optical Materials: X, No. 2, 100030. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.omx.2019.100030>
15. Matthias, A., Raićević, N., Donfeu Tchana, R., Kip, D., Deubener, J. (2014), “Density dependence of refractive index of nanoparticle-derived titania films on glass”, Thin Solid Films, No. 558, P. 86-92. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2014.02.078>
16. Likhachev, D. V. (2014), “A practical method for optical dispersion model selection and parameters variations in scatterometry analysis with variable n&k's”, Thin Solid Films, No. 562. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.tsf.2014.03.082>
17. Staschuk, O., Stepanov, D., Bahachuk, D. (2020), “Polarization mode dispersion compensator based on anisotropic optical fiber”, Proceedings of the O.S. Popov ONAT, Odessa, No. 1, С. 12-18.
18. El-Zaiat, S. Y. (2001), “Interferometric determination of refraction and dispersion of a birefringent material: non-numerical procedure”, Optics & Laser Technology, No. 33(2), P. 91-95. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0030-3992\(00\)00124-9](https://doi.org/10.1016/S0030-3992(00)00124-9)
19. Kato, K., Umemura, N., Petrov, V. (2017), “Sellmeier and thermo-optic dispersion formulas for CdGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub> and their application to the nonlinear optics of Hg<sub>1-x</sub>CdxGa<sub>2</sub>S<sub>4</sub>”, Optics Communications, No. 386, P. 49-52. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optcom.2016.10.054>
20. Burckhardt, W., Feltz, A., Bussemer, P. (1987), “The influence of the structure of different arsenic chalcogenide glasses on the dispersion parameters of a sellmeier and a Lorentz-Lorenz relation”, Journal of Non-Crystalline Solids, No. 89(3), P. 273-281. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0022-3093\(87\)80270-3](https://doi.org/10.1016/S0022-3093(87)80270-3)
21. Адамс, М. (1984), Введение в теорию оптических волноводов, М.: Мир, 512 с.
22. Ravindra, N. M., Ganapathy, P., Choi, J. (2007), “Energy gap–refractive index relations in semiconductors – An overview”, Infrared Physics & Technology, No. 50(1), P. 21-29. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.infrared.2006.04.001>
23. Grado-Caffaro, M. A., Grado-Caffaro, M. (2011), “A theorem on refractive index as a function of wavelength”, Optik, No. 122(7), P. 652-653. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2010.03.021>
24. ITU-T Recommendation G.698.1 (2005), Telecommunication standardization sector of ITU, Multichannel DWDM applications with single-channel optical interfaces, 28 p.

25. ITU-T Recommendation G.656 (2006), Telecommunication standardization sector of ITU, Characteristics of a fibre and cable with non-zero dispersion for wideband optical transport, 12 p.
26. Korsakov, A., Salimgareev, D., Lvov, A., Zhukova, L. (2017), "IR spectroscopic determination of the refractive index of  $\text{Ag}_{1-x}\text{Tl}_x\text{Br}_{1-0.54x}\text{I}_{0.54x}$  ( $0 \leq x \leq 0.05$ ) crystals", Optics & Laser Technology, No. 93, P. 18-23. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2017.01.030>
27. Gomes, A. D., Silveira, B., Warren-Smith, S. C., Becker, M., Rothhardt, M., Frazão, O. (2018), "Temperature independent refractive index measurement using a fiber Bragg grating on abrupt tapered tip", Optics & Laser Technology, No. 101, P. 227-231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2017.11.031>
28. Oraie, M., Latifi, H. (2019), "Real-time refractive-index sensing by using liquid core/liquid cladding optofluidic waveguide", Optics & Laser Technology, No. 111, P. 303-306. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.10.006>
29. Jiao, T., Meng, H., Deng, S., Liu, S., Wang, X., Wei, Z., Wang, F., Tan, C., Huang, X. (2019), "Simultaneous measurement of refractive index and temperature using a Mach-Zehnder interferometer with forward core-cladding-core recoupling", Optics & Laser Technology, No. 111, P. 612-615. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.optlastec.2018.10.047>
30. Zhang, Q., Zhong, S., Zhong, J., Fu, X. (2018), "Ultrahigh-accuracy measurement of refractive index curves of optical materials using interferometry technology", Measurement, No. 122, P. 40-44. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.measurement.2018.02.049>
31. Ивахненко, А. Г., Степашко, В. С. (1985), Помехоустойчивость моделирования, К.: Наукова думка, 216 с.
32. Левин, С. Ф., Одегов, Н. А. (1982), "Интерполяционная фильтрация статистических характеристик случайных функций методом максимума компактности", Вопросы кибернетики, ВК-94, С. 71-77.
33. Стрижов, В. В., Крымова, Е. А. (2010), Методы выбора регрессионных моделей, М.: ВЦ РАН, 60 с.
34. Martín-Baos, J. Á., M., García-Ródenas, R., López-García, M. L., Rodríguez-Benitez, L. (2020), "Discrete choice modeling using Kernel Logistic Regression", Transportation Research Procedia, No. 47, P. 457-464. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.trpro.2020.03.121>
35. Wei, D., Xiao, M., Yang, P. (2017), "Selection of numerical differentiation method for calculation of group refractive index of air over all calculable wavelengths", Optik, No. 130, P. 1362-1369. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijleo.2016.11.183>