

15. Дёмин, Д. А. Методология формирования функционала для задачи оптимального управления электроплавкой [Текст] / Д. А. Дёмин // Технологический аудит и резервы производства. – 2011. – № 1 (1). – С. 15–24. Режим доступа: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/4082>

16. Mohanad, M. K. Modeling of the case depth and surface hardness of steel during ion nitriding [Text] / M. K. Mohanad, V. Kostyk, D. Domin, K. Kostyk // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 2, Issue 5 (80). – P. 45–49. doi: 10.15587/1729-4061.2016.65454

17. Дёмин, Д. А. Адаптивное моделирование в задаче поиска оптимального управления термовременной обработкой чугуна [Текст] / Д. А. Дёмин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2013. – Т. 6, № 4 (66). – С. 31–37. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/eejet/article/view/19453/17110>

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Хорошилов О. М.  
Дата надходження рукопису 24.04.2017*

**Чибичик Ольга Анатольевна**, ассистент, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002  
E-mail: [litvo11@kpi.kharkov.ua](mailto:litvo11@kpi.kharkov.ua)

**Сильченко Константин Петрович**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Земляченко Дмитрий Олегович**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Корчака Иван Николаевич**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Макаренко Дмитрий Николаевич**, старший преподаватель, кафедра химии, экологии и экспертных технологий, Национальный Аэрокосмический Университет им. Н. Е. Жуковского "Харьковский авиационный институт", ул. Чкалова, 17, г. Харьков, Украина, 61070  
E-mail: [d.makarenko@khai.edu](mailto:d.makarenko@khai.edu)

УДК 53.092+519

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.102416

## АНАЛИЗ ВЗАИМОСВЯЗИ ФОНОНОВ И ФОТОНОВ

© А. А. Мочалов, Н. А. Шаповал, Т. А. Ткаченко, Е. П. Бойко

*В данной статье рассмотрены некоторые проблемы квантовой теории излучения. Особенности работы заключаются в разработке методики, которая дает возможность исследовать взаимосвязь между квантами и фононами, а также в проведении исследований зависимости энергии излучения от диапазона различных частот и температуры, что позволяет записать выражение взаимосвязи между числом фононов и квантов*

**Ключевые слова:** взаимосвязь фотонов и фононов, теория излучения, тепловое излучение, квазичастица, энергия

### 1. Введение

В настоящее время существующая квантовая теория не может объяснить физический смысл некоторых понятий. Например, понятие теплопроводности, введенное в понятие молекулярно-кинетической теории, хорошо описывает физический смысл явления теплопроводности для газов. Из этой теории для газов понятно, как и что, и каким способом переносится тепловая энергия хаотического движения от нагретой области газа к холодной.

Если рассмотреть строение металлов, где атомы расположены в узлах кристаллических решеток. Взаимодействие атомов между собой происходит с силами межатомного взаимодействия во много раз

превосходящих такие силы в газах, причем они не могут свободно перемещаться и могут совершать только хаотические колебательные движения около своего стационарного положения в узлах кристаллической решетки. Из этого следует, что понятие теплопроводности, введенное в молекулярной теории газов, теряет свой физический смысл в твердых телах.

Если рассматривать вещества на микроуровне с помощью метода структурных единиц то остаются нерешенными вопросы: что накапливает тепловую энергию в кристаллической структуре, почему количество фотонов увеличивается с ростом температуры, что рождает фононы в межатомном пространстве, почему излучение тепловой энергии представляет

сплошной спектр излучения. Если рождение фононов порождается колебательными движениями атомов, то не понятно, что излучает электромагнитные волны и где они зарождаются. Согласно квантовой теории атомам «запрещено» излучать непрерывный спектр излучения. Кроме того, квантовая механика при абсолютном нуле требует, чтобы все колебательные движения атомов затухали. Правда не запрещает иметь собственную частоту колебаний.

Теоретическое исследование физических свойств вещества на нано и микроуровне является актуальной задачей современной науки: в настоящее время возможности вычислительной техники позволяют разрабатывать новые методы исследования физических свойств твердых тел на микроуровне.

## 2. Литературный обзор

Представление о фононах широко используется в физике твердого тела [1]. Фононы называют квазичастицами, поскольку они хотя и вполне реальны, но существуют только в кристаллах: вне среды их нет. Кроме фононов есть и другие типы квазичастиц [1, 2]. Тепловые колебания решетки можно рассматривать как фононный газ, при низких температурах – идеальный [2, 3]. При очень высоких температурах решетка плавится и модель невзаимодействующих фононов неприменима: они перестают быть свободными [4, 5]. Преимущество представления о фононах состоит в том, что в рамках фононной теории свойства твердого тела рассматриваются как свойства ансамбля большого числа независимых квазичастиц (фононов) [5]. Все представления этой модели могут быть использованы для описания поведения кристаллической решетки.

К сожалению, с помощью квантовой (фононной) теории не возможно объяснить, что переносит энергию в структурной единице, следовательно, и понятия введенные в молекулярную физику. Взаимосвязь фотонов и фононов мало исследована и до настоящего времени не объяснено их влияние на физические свойства твердых тел.

## 3. Объект, цель и задачи исследования

*Объект исследования* – изучение поведения фононов и фотонов в структурной единице твердого тела.

*Цель исследования* – рассмотреть распределение энергии по частотам.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

– разработана методика, которая дает возможность исследовать взаимосвязь между квантами и фононами;

– проведено исследование зависимости энергии излучения в широком диапазоне частот и температуры, что позволяет записать выражение взаимосвязи между числом фононов и квантов.

## 4. Методика исследования

Согласно теории Больцмана [6] за квант тепловой энергии принимается величина

$$\varepsilon_B = k_B \cdot T,$$

где  $k_B$  – постоянная Больцмана;  $T$  – температура в градусах Кельвина, равная 1 К.

Из этого соотношения следует, что количество квантов Больцмана  $N_B$ , переносящих тепловую энергию в различных средах (газ, жидкость, твердое тело), пропорционально температуре.

Согласно квантовой теории переносчиками тепловой энергии являются фононы, которые рождаются в данном объеме вещества и исчезают в зависимости от температуры. Среднее число фононов определяется из соотношения [7].

$$N_\phi = \left( \exp \frac{h\nu}{k_B T} - 1 \right)^{-1}.$$

Это соотношение входит в уравнение, описывающее количество теплоты, излучаемой единицей площади в единицу времени при температуре поверхности  $T$ , что выражается уравнением Планка [8]

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}} - 1}, \quad (1)$$

где  $c$  – скорость света в вакууме;  $\hbar$  – постоянная Дирака;  $k$  – постоянная Больцмана;  $\omega$  – циклическая частота кванта электромагнитного излучения;  $T$  – температура поверхности нагретого тела.

С учетом квантовой теории выражение (1) можно переписать так

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi c^2} \cdot N_\phi(\omega, T). \quad (2)$$

А из выражения (2) следует, что коэффициент при  $N_\phi$  должен соответствовать энергии одного фотона при соответствующей частоте  $\omega$  и температуре  $T$ . Кроме того, из этого следует, что энергия одного фотона является функцией частоты  $\omega$ . А это уже противоречит фононной теории теплоемкости [9].

Вычислим по формуле Планка (1) значение  $\varepsilon(\omega, T)$  для температуры  $T=1\text{К}$  и получим зависимость представленную на рис. 1.

Площадь под функцией  $\varepsilon(\omega, T)$  (рис. 1) при температуре  $T=1\text{К}$ , будет характеризовать всю энергию, которую излучает единица площади в единицу времени во всем диапазоне частот и является функцией температуры

$$\int_0^\infty \varepsilon(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot T^4. \quad (3)$$

Для того чтобы рассчитать количество фононов Больцмана, которые соответствуют частоте  $\omega_1$ , необходимо  $\varepsilon(\omega_1, T)$  разделить на  $k_B \cdot T$  (так как эта величина принята эта величина принята за энергию одного фонона при  $T=1\text{К}$ ).

$$N_\phi(\omega_1, T) = \frac{\varepsilon(\omega_1, T)}{k_B T}. \quad (4)$$

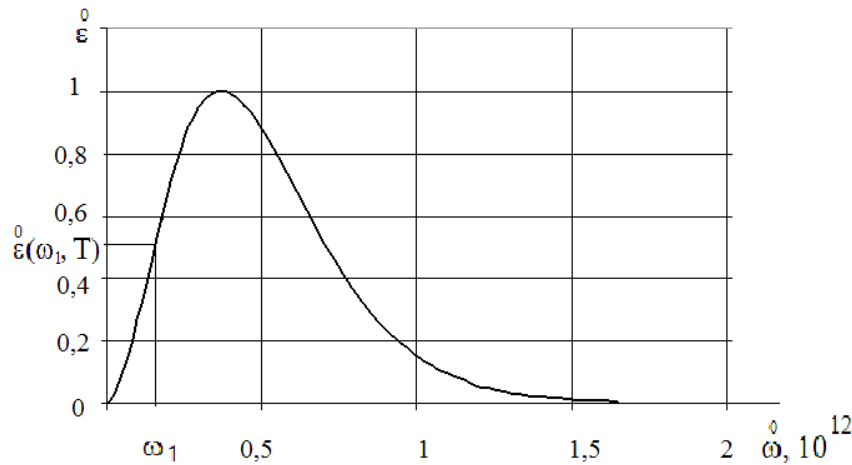


Рис. 1. Зависимость энергии  $\varepsilon(\omega, T)$  при  $T=1$  К в диапазоне частот  $\omega(0) - \omega(\infty)$  в безразмерном виде, где  $\varepsilon(\omega, T)$  соответствует суммарной энергии фотонов с частотой  $\omega_1$

Согласно квантовой теории  $\varepsilon(\omega, T)$  должна соответствовать суммарной энергии квантов электромагнитного излучения частот  $\omega_1$ , т. е.

$$\varepsilon(\omega_1, T) = N_{\text{кв}}(\omega_1, T) \hbar \omega_1. \quad (5)$$

Из этого следует, что число фононов и число квантов электромагнитного излучения (фотонов) должны быть связаны следующим соотношением

$$\frac{N_{\phi}(\omega_1, T)}{N_{\text{кв}}(\omega_1, T)} = \frac{\hbar \omega_1}{k_B T}. \quad (6)$$

С увеличением частоты  $\omega$  от 0 до  $\infty$ , учитывая, что при  $T = \text{const}$  соотношение (6) будет стремиться к бесконечности. Таким образом, число фононов будет расти по сравнению с числом квантов фотонов, так как энергия фотонов не зависит от температуры. Это говорит о том, что для рождения (возникновения) фотона большой энергии необходимо затратить больше энергии, чем на рождение фонона с энергией  $k_B \cdot T$ .

Если принять энергию всех фотонов от 0 до  $\infty$ , при температуре  $T=1$  К за энергию одного фонона Больцмана, согласно (3) и рис. 1

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot 1K = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar \omega_i N_{\text{кв}}(\omega_i, T), \quad (7)$$

где  $\omega_i$  не зависит от температуры и при  $T = \text{const}$  может принимать любые значения в диапазоне  $0 \div \infty$  (рис. 1).

Разделив левую и правую части на  $k_B \cdot T$  получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{k_B T} \int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega &= \text{const} \cdot 1K = \\ &= \frac{1}{k_B T} \sum_{i=0}^{\infty} \hbar \omega_i N_{\text{кв}}(\omega_i, T). \end{aligned} \quad (8)$$

Правая часть выражения (8) есть отношение суммарного количества фотонов всех частот к кванту фонона Больцмана. В левой части количество фононов Больцмана при соответствующей температуре  $T$ .

Интеграл, приведенный в выражениях (7) и (8), пропорционален четвертой степени температуры  $T$ .

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega = \text{const} \cdot T^4.$$

Тогда выражение (8) можно переписать следующим образом

$$\text{const} \cdot T^4 = \sum_{i=0}^{\infty} \hbar \omega_i N_{\text{кв}}(\omega_i, T), \quad (9)$$

$$\text{const} \cdot T^4 = N_{\phi} k_B T \Rightarrow N_{\phi} = \frac{\text{const} \cdot T^3}{k_B}. \quad (10)$$

Полученные соотношения полностью соответствуют теории теплового излучения (рис. 1) из чего следует

$$N_{\phi} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\hbar \omega_i}{k_B T} N_{\text{кв}}(\omega_i, T). \quad (11)$$

Выражение (11) устанавливает взаимосвязь между числом фононов и суммарным количеством квантов с энергией  $\hbar \omega_i$ , где  $\omega_i$  изменяется от 0 до  $\infty$ .

Другими словами квант тепловой энергии Больцмана включает в себя множество квантов электромагнитного поля (фотонов) с различными частотами (энергиями). Из этого следует, что фононы и фотоны суть одной природы.

С целью вычисления постоянной входящей в выражения (9) и (10), приведем выражение (1) к безразмерному виду, для этого перейдем к безразмерным величинам  $\varepsilon, \omega$

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\varepsilon(\omega, T)}{\varepsilon(\omega_{\text{max}}, T)} = \frac{\varepsilon(\omega, T)}{\varepsilon_{\text{max}}},$$

$$\omega = \frac{\omega}{\omega_{\max}}$$

где  $\varepsilon_{\max}$  – максимальная излучательная способность тела с единицы поверхности в единицу времени, при  $\omega = \omega_{\max}$ ,  $\omega_{\max}$  – частота электромагнитного излучения, соответствующая максимуму  $\varepsilon_{\max} = \varepsilon(\omega_{\max}, T)$ .

Тогда значения  $\varepsilon(\omega, T)$  будет изменяться от 0 до 1, а  $\omega$  от 0 до  $\infty$ .

В безразмерном виде выражение (1) будет иметь вид

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}} - 1} \cdot \frac{2\pi c^2}{\hbar \omega_{\max}^3} \left( e^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}} - 1 \right),$$

$$\omega_{\max} = \frac{\omega_{\max}(T)}{\omega_{\max}(T)} = 1; \quad \varepsilon(\omega_{\max}, T) = 1.$$

Упростив, получим

$$\varepsilon(\omega, T) = \frac{\omega^3}{e^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}} - 1} \cdot \left( e^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}} - 1 \right), \quad (12)$$

Введем обозначение  $x = \frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}$  и найдем экстремум функции  $\varepsilon(\omega, T)$  по переменной  $\omega$ , получим уравнение, с учетом того, что при  $\varepsilon_{\max} = \omega_{\max} = 1$ , вида

$$e^x - 1 = \frac{x}{3}.$$

Решив уравнение численным методом найдем значение  $x=2,82$ . Используя значение  $x$  найдем  $\omega_{\max}$

$$\omega_{\max}(T) = \frac{xkT}{\hbar} = a_{\omega} \cdot T. \quad (13)$$

Тогда значение  $\varepsilon_{\max}(\omega_{\max}, T)$  с учетом (1) запишется так

$$\varepsilon(\omega_{\max}, T) = \varepsilon_{\max}(T) = \frac{\hbar \omega_{\max}^3}{2\pi c^2} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_{\max}}{kT}} - 1},$$

$$\varepsilon(\omega_{\max}, T) = \varepsilon_{\max}(T) = \frac{x^3 k^3 T^3}{\hbar^2 2\pi c^2} \cdot \frac{1}{e^x - 1}. \quad (14)$$

Подставив в выражение (12) значение  $\omega_{\max}(T)$  и проинтегрировав его по  $\omega$  в диапазоне  $0 \div \infty$  получим [10]

$$\int_0^{\infty} \varepsilon(\omega, T) d\omega = \int_0^{\infty} \frac{\omega^3 (e^x - 1)}{e^{x\omega} - 1} d\omega = \frac{\pi^4}{15x^4} = const. \quad (15)$$

### 5. Результаты исследования

Исходя из того, что  $x=2,82$ , интеграл (15) в безразмерной форме не зависит от температуры  $T$ .

Перестроим график  $\varepsilon(\omega, T)$ , представленный на рис. 1, в безразмерном виде используя выражение (12), переведа частоту  $\omega$  и значение  $\varepsilon(\omega, T)$  в безразмерную форму, используя выражения (13) и (14)

$$\omega = \frac{\omega}{\omega_{\max}}; \quad \varepsilon = \frac{\varepsilon(\omega, T)}{\varepsilon_{\max}(\omega_{\max}, T)},$$

получим зависимость  $\varepsilon(\omega) = f(\omega)$ .

На рис. 2 представлена зависимость изменения безразмерной излучательной способности тела для произвольной температуры  $T$ , из выражения (15) следует, что значение  $\int_0^{\infty} \varepsilon(\omega) d\omega$  не зависит от температуры  $T$ .

Для перевода относительных величин  $\omega \rightarrow \omega$ ,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon(\omega, T)$  необходимо воспользоваться масштабными коэффициентами  $\omega_{\max}(T)$  (13) и  $\varepsilon_{\max}(T)$  (14). При этом умножив на них соответствующие величины в безразмерном виде  $\varepsilon(\omega)$ ,  $\omega$ .

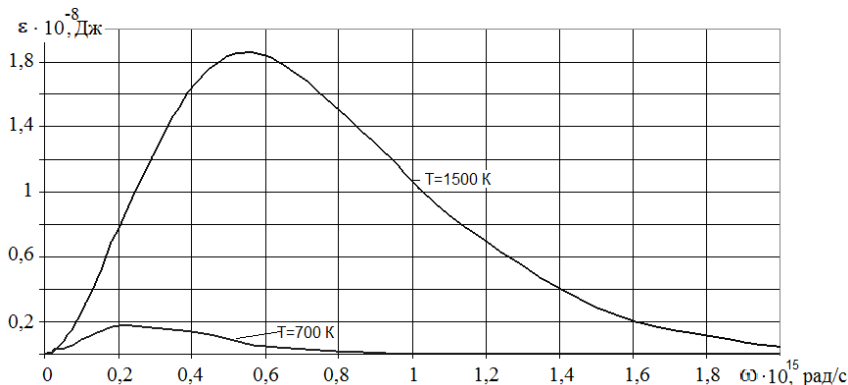


Рис. 2. Зависимость энергии  $\varepsilon(\omega, T)$  при  $T=700$  и  $1500$  К в диапазоне частот  $\omega(0) - \omega(\infty)$

**6. Выводы**

1. Разработана методика, которая дает возможность исследовать взаимосвязь между квантами и фононами.

2. Проведено исследование зависимости энергии излучения в широком диапазоне частот и температуры, что позволяет записать выражение взаимосвязи между числом фононов и квантов.

**Литература**

1. Mahan, G. D. Many-Particle Physics [Text] / G. D. Mahan. – New York: Springer, 1981.
2. Kimble, H. J. Photon Anti-bunching in Resonance Fluorescence [Text] / H. J. Kimble, M. Dagenais, L. Mandel // Physical Review Letters. – 1977. – Vol. 39, Issue 11. – P. 691–695. doi: 10.1103/physrevlett.39.691
3. Мочалов, А. А. Исследования температурных характеристик твердого тела на микроуровне с помощью метода структурных единиц [Текст] / А. А. Мочалов, А. А. Гайша, К. Д. Евфимко // Журнал нано- и электронной физики. – 2014. – Т. 6, № 4. – С. 76–80.
4. Мочалов, А. А. Исследование особенностей теплопроводности структурной единицы твердого тела [Текст] / А. А. Мочалов, К. Д. Евфимко, Н. А. Шаповал // Математическое моделирование. – 2014. – № 2 (31). – С. 22–25.
5. Мочалов, А. А. Математическая фононная модель динамической теплопроводности металлов, на базе потенциала межатома взаимодействия [Текст]: міжнар. наук.-пр. конф. / А. А. Мочалов, Н. О. Шаповал, К. Д. Евфимко // Розвиток інноваційної діяльності в галузі технічних і фізико-математичних наук. – Миколаїв: МНУ, 2016. – С. 147–149.
6. Румер, Ю. Б. Термодинамика, статистическая физика и кинетика [Текст] / Ю. Б. Румер, М. Ш. Рывкин. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
7. Боум, А. Квантовая механика: основы и приложения [Текст] / А. Боум. – М.: Мир, 1990. – 720 с.
8. Элементарный учебник физики. Т. 3. Колебания и волны. Оптика. Атомная и ядерная физика. Пар. 209. Квантовые и волновые свойства фотона [Текст] / ред. Г. С. Ландсберг. – М.: Физматлит, 2003. – С. 497–504.
9. Кучерук, І. М. Загальний курс фізики. Т. 1–3 [Текст] / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук, П. П. Луцик; ред. І. М. Кучерук. – К.: Техніка, 1999, 2001. – 536 с., 452 с., 520 с.
10. Таблицы физических величин [Текст]: справочник / ред. И. К. Кикоин. – М.: Атомиздат, 1976. – 1008 с.

Дата надходження рукопису 20.04.2017

**Мочалов Александр Александрович**, доктор технических наук, заведующий кафедрой, кафедра физики, директор, Институт заочного и дистанционного образования, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, пр. Героев Сталинграда, 9, г. Николаев, Украина, 54025

**Шаповал Наталья Александровна**, кандидат технических наук, доцент, кафедра физики, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, пр. Героев Сталинграда, 9, г. Николаев, Украина, 54025

**Ткаченко Татьяна Александровна**, старший преподаватель, кафедра физики, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, пр. Героев Сталинграда, 9, г. Николаев, Украина, 54025

**Бойко Елена Петровна**, старший преподаватель, кафедра физики, Национальный университет кораблестроения имени адмирала Макарова, пр. Героев Сталинграда, 9, г. Николаев, Украина, 54025

УДК 663.18; 573.6.086.835

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.101741

## КОНСТРУЮВАННЯ БІОРЕАКТОРІВ З ВВЕДЕННЯМ ЕНЕРГІЇ МЕХАНІЧНИМИ НИЗЬКОЧАСТОТНИМИ КОЛИВАННЯМИ

© С. І. Костик, М. Г. Кутовий, В. М. Поводзинський, В. Ю. Шибецький

*Представлена сучасна концепція проектування біореакторів з введенням енергії низькочастотними механічними коливаннями робочими органами різних конструкцій. Процеси перемішування в біореакторах спрямовані на забезпечення рівномірного розподілення гетерогенної дисперсії – умови ідеального змішування та забезпечення оптимального режиму масопередачі. Визначено, що рух мілкомасштабних пульсацій, розмір яких співвідноситься з транспортними об'єктами забезпечує процеси масопередачі взаємодіючих фаз*

**Ключові слова:** біотехнологія, біоінженерія, біореактор, біологічний агент, масопередача, низькочастотні механічні коливання

**1. Вступ**

Різноманітність біологічних агентів (БА), що експлуатуються в біотехнології з метою отримання біомаси, метаболітів та трансформації широкого спектру

субстратів вимагає адекватного біоінженерного оформлення технологічного процесу. При цьому основною задачею біоінженерії є створення таких умов зовнішнього оточення БА, при яких вони синтезують