

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.110600

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ЛОКАЛЬНЫХ СИЛОВЫХ НАГРУЗОК НА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫЕ ПЛАСТИНЫ НА БАЗЕ ОБОБЩЕННОЙ ТЕОРИИ $\{m,n\}$ -АППРОКСИМАЦИИ

© И. П. Боков, Н. С. Бондаренко, Е. А. Стрельникова

Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Нагрузка распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении. Рассмотрены выражения для внутренних силовых факторов, полученные на базе уточненной теории $\{1,2\}$ -аппроксимации. Проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала на внутренние силовые факторы

Ключевые слова: теория $\{m,n\}$ -аппроксимации, напряженно-деформированное состояние, трансверсально-изотропные пластины, локальные нагрузки, внутренние силовые факторы

1. Введение

При рассмотрении задач о концентрации напряжений в тонкостенных элементах конструкций большой интерес вызывают локальные силовые нагрузки. Конструкции, изготовленные из материалов, обладающих трансверсальной изотропией упругих свойств, широко применяются в современном машиностроении, авиастроении и других отраслях промышленности. Для исследования прочности таких конструкций в местах концентрации напряжений требуются подходы, более современные, чем классическая теория Кирхгофа-Лява. В отличие от классической теории, обобщенная теория в варианте $\{m,n\}$ -аппроксимации [1], основанная на методе И. Н. Векуа разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра, позволяет учесть явления, связанные с поперечными сдвигами и обжатием.

2. Литературный обзор

Исследования задач динамики пластин и оболочек, которые находятся под действием локальных нагрузок, представлены в работах [2, 3]. В публикации [2] рассмотрена задача о действии на тонкую ортотропную пластину локальной динамической нагрузки, распределенной по произвольной области. В статье [3] решена задача о действии на оболочку внезапно приложенной локальной распределенной по кругу нагрузки.

Работы [4, 5] посвящены локальным импульсным воздействиям на оболочечные элементы конструкций. В публикации [4] используется теория С. П. Тимошенко для цилиндрических, конических и сферических оболочек. В зоне воздействия локальной нагрузки применяется модель трехмерного тела. В статье [5] рассмотрена оболочка, находящаяся под действием локальных нагрузок, которые распределены на малых площадках и изменяются

на заданном коротком отрезке времени по ступенчатому закону.

В публикациях [6, 7] рассмотрены задачи термоупругости, в которых источники тепла распределены равномерно по локальной области.

В данной работе впервые проанализировано влияние упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и геометрии области локального нагружения на внутренние силовые факторы, полученные на базе обобщенной теории $\{1,2\}$ -аппроксимации.

3. Цель и задачи исследования

Цель данной работы состоит в исследовании поведения внутренних силовых факторов в трансверсально-изотропной пластине, которая находится под действием локальных силовых нагрузок, в зависимости от упругих постоянных.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Получить выражения для внутренних силовых факторов в различных случаях действия компоненты объемной силы F_z ;

2. Проанализировать поведение полученных выражений в зависимости от упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и геометрии области локального нагружения.

4. Материалы и методы исследований поведения внутренних силовых факторов для трансверсально-изотропной пластины**4.1. Основные соотношения и математическая формулировка задачи**

Рассмотрим трансверсально-изотропную пластину толщиной $2h$. Отнесём пластину к ортогональной системе безразмерных координат x ,

$(i = \overline{1,3})$, определенных с точностью до полутолщины пластины h . Пластина подвергается локальному силовому воздействию по области, размер которой намного меньше характерного размера пластины. Края пластины находятся на значительном удалении от места приложения силовой нагрузки. Данная нагрузка распределена равномерно и действует в нормальном к срединной плоскости пластины направлении.

Одним из эффективных методов определения локального напряжённо-деформированного состояния тонкостенных конструкций является метод фундаментальных решений [8]. Он основан на использовании формулы свёртки, которая применительно к задачам локального нагружения, записывается таким образом

$$P(\vec{r}) = \iint_{\Omega} E(\vec{r} - \vec{t}) W(\vec{t}) d\Omega, \quad (1)$$

где P – внутренние силовые факторы; E – силовые компоненты фундаментального решения для трансверсально-изотропной пластины; Ω – область локального нагружения; \vec{r} и \vec{t} – вектора текущей точки и точки интегрирования соответственно.

4.2. Изложение метода исследования

Фундаментальное решение уравнений статики для трансверсально-изотропных пластин на базе уточнённой теории $\{1,2\}$ -аппроксимации построено в работе [9]. Поскольку предполагаем, что сила действует на пластину только в перпендикулярном к срединной плоскости направлении, то в выражениях для внутренних силовых факторов, приведенных в [9], следует положить $q_1^* = m_1^* = q_2^* = m_2^* = 0$. В рамках $\{1,2\}$ -аппроксимации закон распределения компоненты объёмной силы F_z по толщине пластины имеет вид [1]

$$F_z = \frac{q_4}{2} P_0 + \frac{3q_3}{2} P_1 + \frac{5q_5}{2} P_2,$$

где $q_i = q_i^* \delta(x_1, x_2)$ ($i = \overline{3,5}$), $\delta(x_1, x_2)$ – двумерная дельта-функция Дирака, P_i ($i = \overline{0,2}$) – полиномы Лежандра; компонента вектора объёмной силы F_z определена с точностью до величины Eh . Запишем выражения для внутренних силовых факторов в полярной системе координат в таких трех случаях:

I. $q_3^* = 1, q_4^* = q_5^* = 0$, тогда

$$N_r = -\frac{\lambda_0 B_0 \Omega'_0}{4\pi A \Lambda'_0} (\nu - 1) [G_{0,0}(a_0 r) - G_{1,1}(a_0 r)],$$

$$N_\phi = -\frac{\lambda_0 B_0 \Omega'_0}{4\pi A \Lambda'_0} (\nu - 1) [G_{0,0}(a_0 r) + G_{1,1}(a_0 r)],$$

$$M_r = M_\phi = H_{r\phi} = S_{r\phi} = Q_{r0} = Q_{\phi0} = Q_{\phi1} = Q_{r2} = Q_{\phi2} = R_1 = 0,$$

$$Q_{r1} = -\frac{G_{0,1}(a_0 r)}{\pi r}, \quad R_0 = \frac{B_0 \Omega'_0}{2\pi A \Lambda'_0} G_{0,0}(a_0 r); \quad (2)$$

II. $q_4^* = 1, q_3^* = q_5^* = 0$, тогда

$$N_r = N_\phi = S_{r\phi} = H_{r\phi} = Q_{\phi0} = Q_{r1} = Q_{\phi1} = Q_{\phi2} = R_0 = 0,$$

$$M_r = \frac{1}{108\pi A_1 \Lambda_0} \left[-27 A_1 \Lambda_0 (\nu + 1) \ln \frac{\gamma r}{2} + 147 r^2 D_0 \Omega_0 (\nu - 1) G_{2,0}(a_1 r) + 27 D_0 \Lambda_0 \{(\nu + 1) G_{0,0}(a_1 r) - (\nu - 1) G_{1,1}(a_1 r)\} - 14 \lambda_0 D_0 \Omega_0 \{(\nu - 1) G_{0,0}(a_1 r) - (\nu - 1) G_{1,1}(a_1 r)\} - 27 A_1 \Lambda_0 (\nu + 1) G_{0,0}(a_1 r) + 18 \lambda_0^2 \Lambda_0 \Omega_0 G_{0,0}(a_1 r) \right],$$

$$M_\phi = \frac{1}{108\pi A_1 \Lambda_0} \left[-27 A_1 \Lambda_0 (\nu + 1) \ln \frac{\gamma r}{2} - 147 r^2 D_0 \Omega_0 (\nu - 1) G_{2,0}(a_1 r) + 27 D_0 \Lambda_0 \{(\nu + 1) G_{0,0}(a_1 r) + (\nu - 1) G_{1,1}(a_1 r)\} - 14 \lambda_0 D_0 \Omega_0 \{(\nu - 1) G_{0,0}(a_1 r) + (\nu - 1) G_{1,1}(a_1 r)\} - 27 A_1 \Lambda_0 (\nu + 1) G_{0,0}(a_1 r) + 18 \lambda_0^2 \Lambda_0 \Omega_0 G_{0,0}(a_1 r) \right],$$

$$Q_{r0} = \frac{49 r^2 D_0 \Omega_0 G_{1,0}(a_1 r) - 9 A_1 \Lambda_0 G_{0,1}(a_1 r)}{9\pi A_1 \Lambda_0 r},$$

$$Q_{r2} = -\frac{(9\lambda_0\Lambda_0 + 14D_0)r\Omega_0}{36\pi A_1\Lambda_0} G_{1,0}(ar),$$

$$R_1 = \frac{(9\lambda_0\Lambda_0 + 14D_0)\Omega_0}{54\pi A_1\Lambda_0} G_{0,0}(ar); \tag{3}$$

III. $q_5^* = 1, q_3^* = q_4^* = 0$, тогда

$$N_r = N_\phi = S_{r\phi} = H_{r\phi} = Q_{r0} = Q_{\phi0} = Q_{r1} = Q_{\phi1} = Q_{\phi2} = R_0 = 0,$$

$$M_r = -\frac{49\lambda_0 D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} (\nu - 1) [G_{0,0}(ar) - G_{1,1}(ar)],$$

$$M_\phi = -\frac{49\lambda_0 D_0 \Omega_0}{27\pi A_1 \Lambda_0} (\nu - 1) [G_{0,0}(ar) + G_{1,1}(ar)],$$

$$Q_{r2} = -\frac{G_{0,1}(ar)}{\pi r}, R_1 = \frac{98D_0\Omega_0}{27\pi A_1\Lambda_0} G_{0,0}(ar). \tag{4}$$

В формулах (2) – (4) использованы обозначения:

$$\lambda_0 = \frac{\nu'}{1-\nu} E^*, E^* = \frac{E}{E'}, B_0 = 3D_0 = \frac{2}{1-\nu^2},$$

$$\Omega_0' = \frac{25}{21} \Omega_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*},$$

$$A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega_0', A_1 = D_0 + \frac{1}{3} \lambda_0^2 \Omega_0,$$

$$\Lambda_0' = \frac{3}{4} \Lambda_0 = \frac{7}{5} \frac{1}{E/G'},$$

$$a_0^2 = \frac{B_0 \Omega_0'}{A \Lambda_0'}, a_1^2 = \frac{196 D_0 \Omega_0}{9 A_1 \Lambda_0}, r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

где E, E' – модули Юнга для растяжения-сжатия по направлениям в плоскости изотропии и перпендикулярно к этой плоскости; ν, ν', G, G' – соответствующие этим направлениям и плоскостям коэффициенты Пуассона и модули сдвига; $C = \ln \gamma = 0,5772\dots$ – константа Эйлера; $G_{n,m}(z)$ – специальная G-функция [10], по своим свойствам подобная функции Макдональда.

5. Результаты исследования и их обсуждение

Численные исследования проведены для трансверсально-изотропной пластины при таких значениях параметров: $E^* = 5; \nu = 0,3; \nu' = 0,07$. Также рассмотрена пластина из изотропного материала, для которого $E^* = 1; E/G' = 2,6; \nu = \nu' = 0,3$. На рис. 1–5 представлены графики изменения внутренних силовых факторов $R_1, Q_{ri} (i=0,2)$ в зависимости от параметра сдвиговой податливости E/G' . При этом рис. 1–3 соответствуют случаю II ($q_4^* = 1, q_3^* = q_5^* = 0$), а рис. 4, 5 – случаю III ($q_5^* = 1, q_3^* = q_4^* = 0$). На всех рисунках кривые под номером 1 отвечают изотропному материалу, а кривые под но-

мерами 2, 3 и 4 демонстрируют поведение внутренних силовых факторов трансверсально-изотропной пластины в зависимости от таких значений параметра сдвиговой податливости $E/G' : 40; 80; 120$.

В качестве примера рассмотрено действие силы, равномерно распределенной ($W \equiv 1$) по области Ω , представляющей собой отрезок длины $2a$, расположенный вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат. Формула свёртки (1) для области Ω примет вид

$$P(x_1, x_2) = \int_{-a}^a E(x_1 - t_1, x_2) W(t_1) dt_1.$$

Для рассматриваемой области рассчитаны значения внутренних силовых факторов вдоль оси ординат при $a = 3$. Ввиду сложной структуры выражений для внутренних силовых факторов их значения получены путём численного интегрирования. При этом удерживалось десять членов бесконечного ряда, что вполне достаточно для проведения практических расчётов.

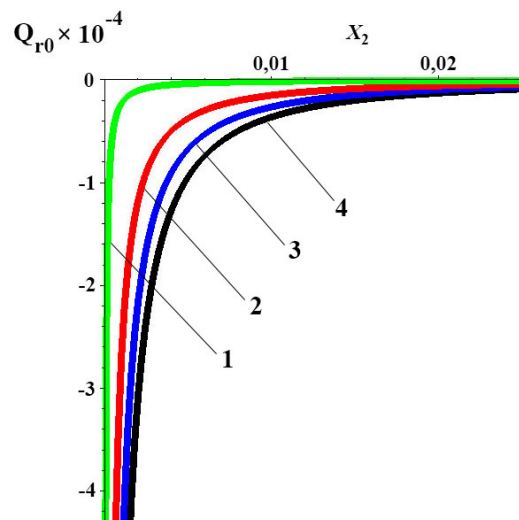


Рис. 1. Внутренний силовой фактор Q_{r0} (случай II)

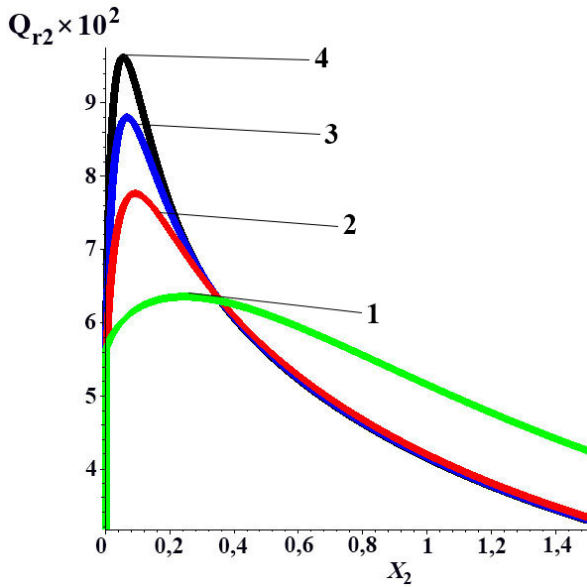


Рис. 2. Внутренний силовой фактор Q_{r_2} (случай II)

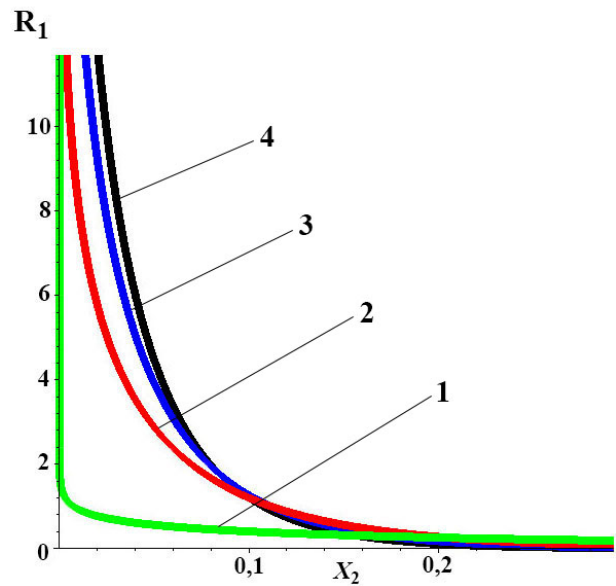


Рис. 5. Внутренний силовой фактор R_1 (случай III)

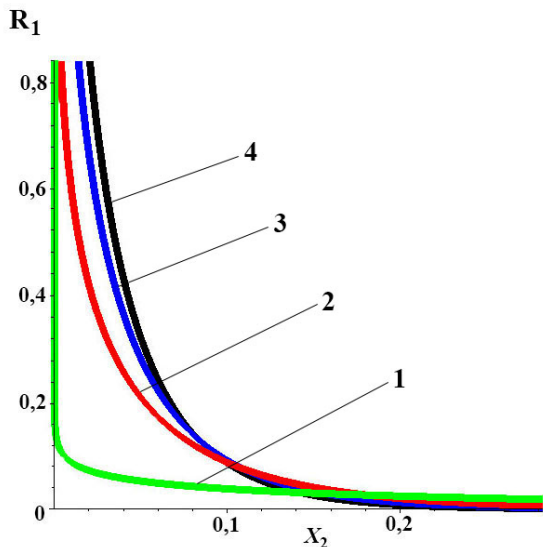


Рис. 3. Внутренний силовой фактор R_1 (случай II)

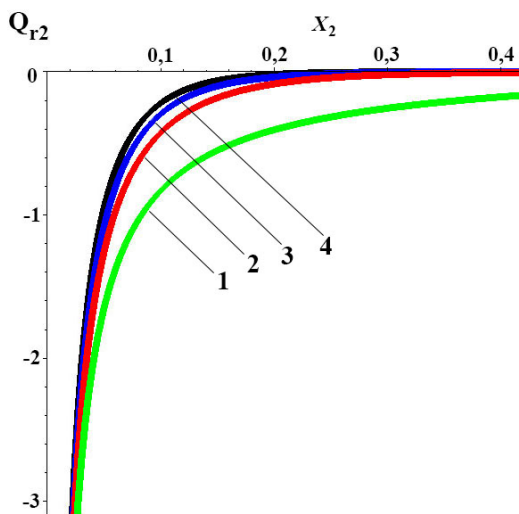


Рис. 4. Внутренний силовой фактор Q_{r_2} (случай III)

Данные, представленные на рис. 1–5, свидетельствуют о том, что обобщенные усилия R_1 , Q_{r_i} ($i = 0, 2$) (а, следовательно, и поперечные касательные напряжения τ_{xz} , τ_{yz} и нормальное напряжение σ_z) зависят от параметра сдвиговой податливости E/G' . С его увеличением Q_{r_0} и R_1 возрастают по абсолютной величине. Модуль Q_{r_2} в случае III с ростом E/G' убывает, а в случае II возрастает в непосредственной близости от области локального силового воздействия.

6. Выводы

В данной работе было сделано следующее:

1. Рассмотрена задача о действии на трансверсально-изотропную пластину локальной силовой нагрузки. Получены выражения для внутренних силовых факторов в полярной системе координат в различных случаях действия компоненты объемной силы F_z ;

2. Проанализировано поведение полученных выражений в зависимости от упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и геометрии области локального нагружения, в виде отрезка, расположенного вдоль оси абсцисс симметрично относительно начала координат.

Проведенные исследования позволили заключить, что при расчете тонкостенных элементов конструкций, изготовленных из современных композитных материалов, обладающих трансверсальной изотропией упругих свойств, на сосредоточенные и локальные силовые воздействия необходимо использовать уточненные теории. Это позволит оценить напряжения, связанные с учетом поперечных сдвигов и обжатия.

Литература

1. Пелех, Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений [Текст] / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько. – К.: Наукова думка, 1982. – 296 с.
2. Шевченко, В. П. Динамика ортотропной пластины под действием локальных внезапно приложенных нагрузок [Текст] / В. П. Шевченко, О. С. Ветров // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Т. 22. – С. 207–215.
3. Ветров, О. С. Динамика тонких оболочек с учетом демпфирования под действием локальных нагрузок [Текст] / О. С. Ветров, В. П. Шевченко, В. Ф. Русаков // Вестник Запорожского национального университета. – 2015. – № 2. – С. 28–36.
4. Воробьев, Ю. С. Локальное импульсное воздействие на оболочечные элементы конструкций [Текст] / Ю. С. Воробьев, М. В. Чернобрышко, Л. Крушка // Авиационно-космическая техника и технология. – 2005. – № 9 (25). – С. 181–184.
5. Луговой, П. З. Исследование деформированного состояния цилиндрической оболочки при действии локальных импульсных нагрузок [Текст] / П. З. Луговой, Ю. В. Скосаренко // Проблемы вычислительной механики и прочности конструкций. – 2015. – № 24. – С. 152–163.
6. Гольцев, А. С. Задачи термоупругости для ортотропных цилиндрических оболочек при локальном температурном воздействии [Текст] / А. С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. – 2001. – № 33. – С. 139–144.
7. Гольцев, А. С. Исследование влияния условий теплообмена для локально нагретых ортотропных сферических оболочек [Текст] / А. С. Гольцев // Динамические системы. – 2001. – № 17. – С. 76–82.
8. Шевченко, В. П. Методы фундаментальных решений в теории ортотропных оболочек. Концентрация напряжений. Механика композитов. Т. 7 [Текст] / В. П. Шевченко; ред. А. Н. Гузь, А. С. Космодамианский, В. П. Шевченко. – К.: А. С. К., 1998. – С. 159–196.
9. Bokov, I. Analysis of fundamental solutions to the equations of statics constructed for transversal-isotropic plates [Text] / I. Bokov, N. Bondarenko, E. Strelnikova // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 2, Issue 7 (86). – P. 4–12. doi: 10.15587/1729-4061.2017.96508
10. Хижняк, В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек [Текст]: уч. пос. / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.

Дата надходження рукопису 27.07.2017

Боков Игорь Петрович, аспирант, отдел гидроаэромеханики энергетических машин, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046
E-mail: igr.bokov@gmail.com

Бондаренко Наталья Сергеевна, кандидат физико-математических наук, Украина
E-mail: Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com

Стрельникова Елена Александровна, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Отдел гидроаэромеханики энергетических машин, Институт проблем машиностроения им. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарского, 2/10, г. Харьков, Украина, 61046
E-mail: elena15@gmx.com