

ної величини, що ускладнює визначення часової затримки, внаслідок чого перевагу має ВКФ.

2. Взаємна кореляційна обробка, з застосуванням перетворення Гільберта до однієї з прийнятих акустичних хвиль, дозволяє досить точно визначати часову затримку за наявності завад. Зміна знаку функції на про-

тилежний, в момент який дорівнює величині часової затримки, дає можливість використання алгоритму в диференційних схемах пеленгування.

3. Алгоритм визначення часової затримки бажано мати адаптивним до діючої величини акустичної завади.

Література

1. Митько, В. Б. Гидроакустические средства связи и наблюдения [Текст] / В. Б. Митько, А. П. Евтютов, С. Е. Гуштин. – Л.: Судостроение, 1982. – 200 с.
2. Евтютов, А. П. Справочник по гидроакустике [Текст] / А. П. Евтютов, А. Е. Колесников и др. – Л.: Судостроение, 1982. – 344 с.
3. Горбатов, А. А. Акустические методы измерения расстояний и управления [Текст] / А. А. Горбатов, Г. Е. Рудашевский. – М.: Энергоиндуст, 1981. – 208 с.
4. Новиков, А. К. Статистические измерения в судовой акустике [Текст] / А. К. Новиков. – Л.: Судостроение, 1985. – 272 с.
5. Damarla, T. Battlefield Acoustics [Text] / T. Damarla. – Cham: Springer International Publishing, 2015. – 262 p. doi: 10.1007/978-3-319-16036-8
6. Reid, W. P. Microphone array location from sounding made by a passing projectile [Text] / W. P. Reid // Technical Report, NASA Langley Research Center. – Langley, 1975.
7. Gervaslo, P. An acoustic sniper localization system [Text] / P. Gervaslo, D. Dhaliwal, O. M. Philip // Proceedings of the SPIE, Command, Control, Communications, and Intelligence Systems for Law Enforcement. – Boston, 1997. – P. 318–325.
8. Козерук, С. О. Визначення координат джерела пострілу по акустичним хвилям [Текст] / С. О. Козерук, Д. В. Мазніченко // Electronics and Communications. – 2017. – С. 45–49.
9. Maher, R. C. Modeling and Signal Processing of Acoustic Gunshot Recordings [Text] / R. C. Maher // Proceedings of IEEE Signal Processing Society 12th DSP Workshop. – Wyoming, 2006. – P. 257–261. doi: 10.1109/dspws.2006.265386
10. Бендат, Дж. Прикладной анализ случайных данных [Текст] / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М.: Мир, 1989. – 540 с.
11. Сергиенко, А. Б. Цифровая обработка сигналов [Текст] / А. Б. Сергиенко. – СПб.: Питер Принт, 2003. – 606 с.

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Продеус А. М.
Дата надходження рукопису 27.10.2017*

Козерук Сергій Олександрович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра акустики та акустоелектроніки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
E-mail: so.kozeruk@aae.kpi.ua

Сергієнко Олексій Володимирович, кафедра акустики та акустоелектроніки, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056
E-mail: sfeara86@gmail.com

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.117676

ДОСЛІДЖЕННЯ РУХОМОЇ ТРІЩИНИ В АНІЗОТРОПНОМУ МАТЕРІАЛІ

©Д. В. Білий, О. В. Комаров

Розв'язано задачу про визначення напруженого стану в околі тріщини Іоффе, що рухається з усталеною швидкістю в пружному однорідному анізотропному просторі під дією зосередженого навантаження, прикладеного до її берегів, яке рухається разом із тріщиною. За допомогою методу узагальнених комплексних потенціалів отримано систему задач лінійного спряження, які розв'язано аналітично за відповідним алгоритмом

Ключові слова: рухома тріщина, анізотропний простір, напруження, задача лінійного спряження, комплексний потенціал

1. Вступ

В сучасному будівництві, машинобудуванні літако- та ракетобудуванні анізотропні матеріали набувають дедалі ширшого застосування завдяки відповідним фізичним характеристикам. Як наслідок, виникає загроза появи і розповсюдження дефектів, які найчастіше являють собою тріщини. Досліджен-

ню особливостей пружно-деформівного стану в околі рухомої тріщини в анізотропному матеріалі останнім часом приділяється багато уваги як актуальній і складній проблемі.

Таким чином можна зробити висновок, що проблема дефектів проникла у всі галузі, які зв'язані з роботою над відомими матеріалами.

Цим обґрунтовується актуальність проведення даних досліджень.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Рух тріщини вперше був розглянутий в роботі [1], де була запропонована модель рухомої тріщини кінцевої довжини що рухається з усталеною швидкістю в ізотропному матеріалі. Шляхом введення рухомої разом із тріщиною системи координат отримані рівняння, які формально повністю аналогічні рівнянням для статичного випадку при умові, що швидкість руху тріщини не перевищує швидкість поверхневих хвиль Релея. Це дало можливість використати методи, аналогічні статичному випадку, і отримати розв'язок поставленої задачі. Далі в монографії [2] було детально проаналізовано даний підхід і доведено правомірність його використання при усталених швидкостях. В роботі [3] було запропоновано використання підходу узагальнених комплексних потенціалів щодо розв'язання задач усталеного руху тріщини. Випадок існування тертя між берегами рухомої тріщини досліджено в роботі [4]. Дослідження для напівнескінченої тріщини, що рухається в нескінченному ізотропному просторі проведено в роботі [5]. У випадку, коли прямолінійність руху тріщини забезпечується заздалегідь, гранична швидкість тріщини в однорідному матеріалі дорівнює швидкості поверхневих хвиль Релея.

3. Мета та задачі дослідження

Мета дослідження – розробити метод для визначення напружень перед фронтом рухомої в анізотропному матеріалі тріщини та проаналізувати їх залежність від швидкості для найбільш загального випадку.

Для досягнення поставленої мети необхідно було вирішити наступні основні задачі:

1. Представлення напружень в анізотропному просторі через узагальнені комплексні потенціали;
2. Зведення поставленої задачі до системи задач лінійного спряження.
3. Знаходження узагальнених комплексних потенціалів;

4. Рішення поставленої задачі методом зведення до системи задач лінійного спряження

Розглянемо тріщину скінченної довжини, яка рухається з усталеною швидкістю $v < v_R$, де v_R – швидкість хвиль Релея з фронтом, паралельним фронту тріщини. Тріщина знаходиться в ортотропному просторі, осі пружної симетрії якого орієнтовані довільним чином, під дією зосередженого навантаження прикладеного до її берегів (P_1, P_2, P_3) (рис. 1). Пружні властивості простору визначаються елементами матриці коефіцієнтів податливості $(a_{ij}; i, j = \overline{1,6})$.

Рівняння руху для ортотропного матеріалу в нерухомій системі координат (X_1, X_2, X_3) мають наступний вигляд:

$$C_{ijst} \frac{\partial^2 u_s}{\partial X_i \partial X_j} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \quad i, j, s, l = 1, 2, 3, \quad (1)$$

де C_{ijkl} – компоненти тензора пружних сталей, а ρ – густина матеріалу. Тут і в подальшому по індексах, що повторюються, проводиться додавання.

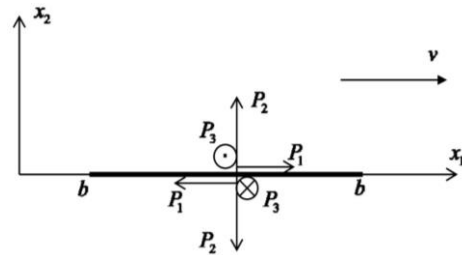


Рис. 1. Схема розташування тріщини в просторі. v – швидкість тріщини; a, b – ліва і права границя тріщини відповідно; P_1, P_2, P_3 – компоненти вектора навантажень

Визначальні співвідношення для анізотропного матеріалу задаються узагальненим законом Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \frac{\partial u_k}{\partial X_l}, \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \quad (2)$$

До системи рівнянь додаємо співвідношення Коші:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3)$$

і граничні умови на берегах тріщини:

$$\sigma_{2i} = -P_i \delta(X_1 - c), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4)$$

де $X_1 \in [a, b]$.

Представлення напружень в анізотропному просторі. Розглянемо тріщину в анізотропному просторі, що рухається усталено зі швидкістю $v < v_R$, де v_R – швидкість хвиль Релея з фронтом, паралельним фронту тріщини (рис. 1). Рухомі тріщина, в даному випадку, є ідеалізацією запропонованою в роботі [1]. Ця ідеалізація є доцільною при вивченні локальних особливостей напружено-деформівного стану біля вершини усталено рухомої тріщини, це детально показано в дослідженні [2].

Рівняння руху для ортотропного матеріалу в нерухомій системі координат (X_1, X_2, X_3) мають вигляд (1). Визначальні співвідношення для анізотропного матеріалу задаються узагальненим законом Гука (2).

Зробимо заміну координат

$$x_1 = X_1 - vt, \quad x_2 = X_2, \quad x_3 = X_3.$$

Тоді рівняння (1) набуває наступного вигляду

$$c_{ijsl}(v) \frac{\partial^2 u_s}{\partial x_i \partial x_j} = 0, \quad i, j, s, l = 1, 2, 3, \quad (5)$$

де $c_{ijsl}(v) = C_{ijsl} - \rho v^2 \delta_{1j} \delta_{1l} \delta_{is}$, δ_{mn} – символ Кронекера.

Вважаємо справедливими наступні рівності:

$$\sigma_{21}^+ = \sigma_{21}^-, \sigma_{22}^+ = \sigma_{22}^-, \sigma_{23}^+ = \sigma_{23}^-, \quad (6)$$

які справедливі для більшості типів навантаження.

При виконанні умови $v < c_R$ для швидкості руху тріщини рівняння (5) є системою однорідних рівнянь в частинних похідних еліптичного типу, тому для її розв'язку можна застосувати підхід узагальнених комплексних потенціалів, запропонований в роботі [6]. Для розв'язання плоских задач підхід було розвинуто в монографії [7]. Аналогічний метод, але з постановкою задачі в переміщеннях, викладено автором [8]. Припустимо, що поле переміщень не залежить від координати x_3 , що справедливо для більшої навантаженості, що не залежать від x_3 . Представимо вказане поле переміщень через довільну функцію $f(x_1, x_2)$ у вигляді

$$\bar{u} = \bar{a} f(x_1 + p x_2), \tag{7}$$

де \bar{a} – довільний вектор, p_j – невідомі поки що постійні. Далі підставимо (7) в (6), звідки отримаємо систему однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно компонент вектора \bar{a} .

$$(c_{i1k1} + (c_{i1k2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2)a_k = 0 \tag{8}$$

Не тривіальне рішення цієї системи буде існувати тільки у випадку, коли визначник матриці коефіцієнтів дорівнює нулю

$$\det [c_{i1k1} + (c_{i1k2} + c_{i2k1})p + c_{i2k2}p^2] = 0, \tag{9}$$

$i, k = 1, 2, 3.$

Отриманий вираз представляє собою рівняння шостого порядку відносно p , рішенням якого, в загальному випадку, є три пари комплексно спряжених коренів, які необхідно знайти чисельно. Обравши три корені з додатною уявною частиною, можна записати загальний розв'язок системи (8) в наступному вигляді:

$$\bar{u} = A\vec{f}(z) + \bar{A}\bar{\vec{f}}(\bar{z}) \tag{10}$$

де $A = (a_1, a_2, a_3)$ – матриця власних векторів системи (8), $\vec{f}(z) = (f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3))$ – вектор-функція узагальнених комплексних змінних

$$z_i = x_1 + p_i x_2 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Щоб знайти напруження, що діють на площі інтерфейсу введемо в розгляд вектор $t = (\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23})$, вираз для якого через похідну від функції $f(z)$ отримаємо підставивши (10) в (2)

$$\vec{t} = B\vec{f}'(z) + \bar{B}\bar{\vec{f}}'(\bar{z}), \tag{11}$$

де

$$B = (c_{i2j1} + p_k c_{i2j2})A_{jk}, \quad i, j, k = 1, 2, 3, \\ \vec{f}'(z) = (f'(z_1), f'(z_2), f'(z_3)).$$

Зведення до лінійно спряженої задачі. Вираз (11) запишемо покомпонентно:

$$\sigma_{2j} = B_{jk}f_k^{++} + \bar{B}_{jk}f_k^{--}. \tag{12}$$

Введемо в розгляд коефіцієнти m_1 та m_2 на які помножимо перший і третій вираз (12) [9], і додамо всі три вирази. Отримаємо представлення наступного вигляду:

$$m_1\sigma_{21} + \sigma_{22} + m_2\sigma_{23} = \\ = (B_{11}m_1 + B_{21} + B_{31}m_2)f_1^{++} + \\ + (B_{12}m_1 + B_{22} + B_{32}m_2)f_2^{++} + \\ + (B_{13}m_1 + B_{23} + B_{33}m_2)f_3^{++} - \\ - (\bar{B}_{11}m_1 + \bar{B}_{21} + \bar{B}_{31}m_2)f_1^{--} - \\ - (\bar{B}_{12}m_1 + \bar{B}_{22} + \bar{B}_{32}m_2)f_2^{--} - \\ - (\bar{B}_{13}m_1 + \bar{B}_{23} + \bar{B}_{33}m_2)f_3^{--}. \tag{13}$$

Після відповідних алгебраїчних перетворень одержимо:

$$T_j (F_j^+ + g_j F_j^-) = m_{1j}\sigma_{21} + \sigma_{22} + m_{2j}\sigma_{23}, \tag{14}$$

де

$$F_j = f_1' S_{1j} + f_2' + f_3' S_{2j}, \tag{15}$$

$$T_j = B_{12}m_{1j} + B_{22} + B_{32}m_{2j}, \tag{16}$$

$$g_j = \frac{m_{1j}\bar{B}_{12} + \bar{B}_{22} + m_{2j}\bar{B}_{32}}{m_{1j}B_{12} + B_{22} + m_{2j}B_{32}}, \tag{17}$$

$$S_{1j} = \frac{m_1\bar{B}_{11} + \bar{B}_{21} + m_2\bar{B}_{31}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}} = \frac{m_1B_{11} + B_{21} + m_2B_{31}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}}, \tag{18}$$

$$S_{2j} = \frac{m_1\bar{B}_{13} + \bar{B}_{23} + m_2\bar{B}_{33}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}} = \frac{m_1B_{13} + B_{23} + m_2B_{33}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}}, \tag{19}$$

$$j = 1, 2, 3.$$

Необхідно щоб коефіцієнти при f_j^{++} та f_j^{--} , ($j = 1, 2, 3$) були рівними, для цього знайдемо коефіцієнти m_1 та m_2 при яких ця умова буде виконуватись. Знайти можемо чисельно, з наступних рівнянь :

$$\begin{cases} \frac{m_1B_{11} + B_{21} + m_2B_{31}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}} = \frac{\bar{m}_1\bar{B}_{11} + \bar{B}_{21} + \bar{m}_2\bar{B}_{31}}{\bar{m}_1\bar{B}_{12} + \bar{B}_{22} + \bar{m}_2\bar{B}_{32}} \\ \frac{m_1B_{13} + B_{23} + m_2B_{33}}{m_1B_{12} + B_{22} + m_2B_{32}} = \frac{\bar{m}_1\bar{B}_{13} + \bar{B}_{23} + \bar{m}_2\bar{B}_{33}}{\bar{m}_1\bar{B}_{12} + \bar{B}_{22} + \bar{m}_2\bar{B}_{32}} \end{cases} \tag{20}$$

При рішенні рівняння (20) виникають три пари коренів m_1 та m_2 . А це означає що можна записати три задачі лінійного спряження напружень, з яких

можна визначити напруження. Система рівнянь матиме такий вигляд:

$$T_i(F_i^+(x_1, 0) + g_i F_i^-(x_1, 0)) = m_{1i} P_1 \delta(x_1 - c) + P_2 \delta(x_1 - c) + m_{2i} P_3 \delta(x_1 - c), \quad (21)$$

де $i = 1, 2, 3$.

Рішення цієї задачі лінійного спряження представлено в [10] в наступному вигляді:

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)} + X_0(z) P(z), \quad (22)$$

де $P(z)$ – довільний поліном. У випадку, який розглядається в даному дослідженні, за відсутності сил інерції, розв'язок (22) набуде наступного вигляду

$$F(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{f(t) dt}{X_0^+(t)(t-z)}, \quad (21)$$

Запишемо часткові розв'язки $X_0(z)$ і $X_0^+(x_1)$ в загальному вигляді, так як отримані γ – комплексні числа:

$$X_0(z) = (z-a)^{-\gamma} (z-b)^{\gamma-1},$$

$$X_0^+(x_1) = -(x_1-a)^{-\gamma} (b-x_1)^{\gamma-1} e^{i\pi\gamma}. \quad (22)$$

Підставляючи (4) і (22) в (21) отримаємо

$$F(z) = \frac{(z-a)^{-\gamma} (z-b)^{1-\gamma}}{2\pi i} \times \int_a^b \frac{f(x_1) dx_1}{(x_1-a)^{-\gamma} (b-x_1)^{1-\gamma} e^{i\pi\gamma} (x_1-z)}, \quad (23)$$

де

$$f(x_1) = P_1 m_1 \delta(x_1 - c) + P_2 \delta(x_1 - c) + P_3 m_2 \delta(x_1 - c).$$

Для запису кінцевого результату, необхідно обчислити інтеграл у виразі (23). Так як підінтегральна функція є дельта-функцією, рішення набуде такого вигляду:

$$F(z) = \frac{P_1 m_1 + P_2 + P_3 m_3}{2\pi i T e^{i\pi\gamma} (c-a)^{-\gamma} (b-c)^{\gamma-1}} \frac{(z-a)^{-\gamma} (z-b)^{\gamma-1}}{z-c}, \quad (24)$$

де T – постійна отримана за формулою (16). Визначимо, тепер, значення функцій $F_i^{\pm}(x_1)$ перед фронтом тріщини:

$$F_i(x_1) = \frac{P_1 m_{1i} + P_2 + P_3 m_{i3}}{2\pi i T e^{i\pi\gamma} (c-a)^{-\gamma} (b-c)^{\gamma-1}} \times \frac{(x_1-a)^{-\gamma} (x_1-b)^{\gamma-1}}{x_1-c}. \quad (25)$$

Після чого розв'язуючи систему (14) відносно $\sigma_{2i} (i=1, 2, 3)$ отримуємо напруження.

5. Результати досліджень напруженого стану в околі вершини тріщини

Проведена чисельна реалізація по представленому вище алгоритму і отримані результати для анізотропного простору. Розрахунки були виконані для вуглепластику при різних значеннях швидкості.

На наведених графіках (рис. 2–4) зображено залежність напружень на площинці з нормаллю x_2 від відстані до фронту тріщини.

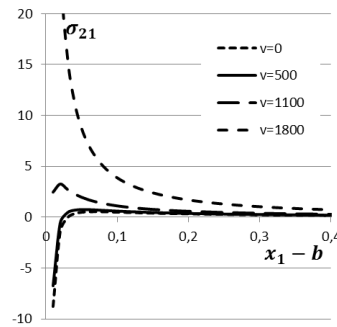


Рис. 2. Зміна напружень σ_{21} із ростом швидкості руху тріщини

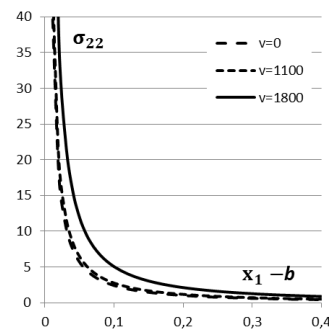


Рис. 3. Зміна напружень σ_{22} із ростом швидкості руху тріщини

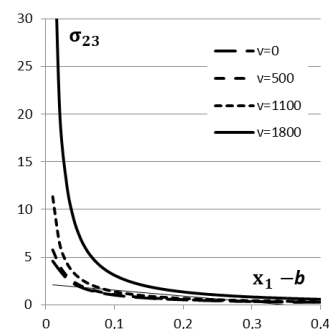


Рис. 4. Зміна напружень σ_{23} із ростом швидкості руху тріщини

Кожна з кривих показує значення напружень при різних швидкостях руху тріщини, як і можна було очікувати, з зростанням швидкості руху тріщини, зростають і напруження, безпосередньо перед фронтом тріщини до нескінченності. Також можна помітити, що напруження σ_{21} від'ємними безпосередньо перед самим фронтом тріщини, це може бути обумовленим анізотропною структурою простору. Інші два напруження, не мають такої особливості і вони завжди додатні. Найбільшими напруженнями є σ_{22} , це

зумовлене тим що був розглянутий випадок тріщини відрива (1 моди деформації).

6. Висновки

У результаті проведених досліджень:

– запропоноване рішення задачі лінійного спряження для тріщини в анізотропному просторі;

– розглянутий вплив швидкості руху тріщини на напруження, які виникають перед її фронтом;

– проведено дослідження тріщини в анізотропному однорідному просторі;

– розроблений алгоритм, за допомогою якого можна провести числову реалізацію даної задачі.

Література

1. Yoffe, E. H. LXXV. The moving griffith crack [Text] / E. H. Yoffe // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1951. – Vol. 42, Issue 330. – P. 739–750. doi: 10.1080/14786445108561302
2. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
3. Radok, J. R. M. On the solution of problems of dynamic plane elasticity [Text] / J. R. M. Radok // Quarterly of Applied Mathematics. – 1956. – Vol. 14, Issue 3. – P. 289–298. doi: 10.1090/qam/81075
4. Баренблатт, Г. И. О расклинивании хрупких тел [Текст] / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // ПММ. – 1960. – № 24. – С. 4–10.
5. Craggs, J. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material [Text] / J. W. Craggs // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1960. – Vol. 8, Issue 1. – P. 66–75. doi: 10.1016/0022-5096(60)90006-5
6. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.
7. Lekhnitsky, S. G. Anisotropic plates [Text] / S. G. Lekhnitsky. – New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1984. – 546 p.
8. Stroh, A. N. Steady State Problems in Anisotropic Elasticity [Text] / A. N. Stroh // Journal of Mathematics and Physics. – 1962. – Vol. 41, Issue 1-4. – P. 77–103. doi: 10.1002/sapm196241177
9. Herrmann, K. P. Contact zone assessment for a fast growing interface crack in an anisotropic biomaterial [Text] / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, A. V. Komarov // Archive of Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 74, Issue 1-2. – P. 118–129. doi: 10.1007/s00419-004-0342-9
10. Мухелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мухелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

*Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Лобода В. В.
Дата надходження рукопису 23.10.2017*

Білий Дмитро Володимирович, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, Україна, 49010
E-mail: bilyi.dmitry@gmail.com

Комаров Олександр Вікторович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, Україна, 49010
E-mail: avikomarov@gmail.com

УДК 517.928.2

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.118874

ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ

© **О. В. Чорненька, А. С. Гусак**

Представлено короткий історичний аналіз питання про побудову асимптотичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та систем з малим параметром. Розроблено метод інтегрування сингулярно збурених диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою подвійних розвинень. Даний підхід ґрунтується на зведенні досліджуваного рівняння до відповідної сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь. Наголошено на перевагах застосування теорії подвійних рядів

Ключові слова: диференціальне рівняння, подвійні ряди, малий параметр, формальні розв'язки, асимптотичні розв'язки

1. Вступ

Ряд задач з різних галузей знань зводяться до математичних моделей, що описуються звичайними лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Побудова розв'язків таких рівнянь залежить від особливостей визначення їх коефіцієнтів.

Досить часто, приймаючи до уваги постановку прикладної задачі, доводиться у відповідній математичній моделі вводити малий параметр. При цьому більш складним є випадок сингулярного збурення, тобто наявність малого параметра при похідній другого порядку.