зумовленне тим що був розглянутий випадок трішини відрива (1 моди деформації).

6. Висновки

У результаті проведених досліджень:

– запропоноване рішення задачі лінійного спряження для тріщини в анізотропному просторі;

– розглянутий вплив швидкості руху тріщини на напруження, які виникають перед її фронтом;

– проведено дослідження тріщини в анізотропному однорідному просторі;

– розроблений алгоритм, за допомогої якого можна провести числову реалізацію даної задачі.

Література

1. Yoffe, E. H. LXXV. The moving griffith crack [Text] / E. H. Yoffe // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1951. – Vol. 42, Issue 330. – P. 739–750. doi: 10.1080/14786445108561302

2. Черепанов, Г. П. Механика хрупкого разрушения [Текст] / Г. П. Черепанов. – М.: Наука, 1974. – 640 с.

3. Radok, J. R. M. On the solution of problems of dynamic plane elasticity [Text] / J. R. M. Radok // Quarterly of Applied Mathematics. – 1956. – Vol. 14, Issue 3. – P. 289–298. doi: 10.1090/qam/81075

4. Баренблатт, Г. И. О расклинивании хрупких тел [Текст] / Г. И. Баренблатт, Г. П. Черепанов // ПММ. – 1960. – № 24. – С. 4–10.

5. Craggs, J. W. On the propagation of a crack in an elastic-brittle material [Text] / J. W. Craggs // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1960. – Vol. 8, Issue 1. – P. 66–75. doi: 10.1016/0022-5096(60)90006-5

6. Лехницкий, С. Г. Теория упругости анизотропного тела [Текст] / С. Г. Лехницкий. – М.: Наука, 1977. – 416 с.

7. Lekhnitsky, S. G. Anisotropic plates [Text] / S. G. Lekhnitsky. – New York: Gordon and Breach, Science Publishers, 1984. – 546 p.

8. Stroh, A. N. Steady State Problems in Anisotropic Elasticity [Text] / A. N. Stroh // Journal of Mathematics and Physics. – 1962. – Vol. 41, Issue 1-4. – P. 77–103. doi: 10.1002/sapm196241177

9. Herrmann, K. P. Contact zone assessment for a fast growing interface crack in an anisotropic biomaterial [Text] / K. P. Herrmann, V. V. Loboda, A. V. Komarov // Archive of Applied Mechanics. – 2004. – Vol. 74, Issue 1-2. – P. 118–129. doi: 10.1007/s00419-004-0342-9

10. Мусхелишвили, Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости [Текст] / Н. И. Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966. – 707 с.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Лобода В. В.
Дата надходження рукопису 23.10.2017

Білий Дмитро Володимирович, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, Україна, 49010
E-mail: biliy.dmitry@gmail.com

Комаров Олександр Вікторович, кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра теоретичної та комп'ютерної механіки, Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, пр. Гагаріна, 72, м. Дніпро, Україна, 49010
E-mail: avikomarov@gmail.com

УДК 517.928.2
DOI: 10.15587/2313-8416.2017.118874

ІНТЕГРУВАННЯ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ ЗА ДОПОМОГОЮ ПОДВІЙНИХ РЯДІВ

© О. В. Чорненька, А. С. Гусак

Представлено короткий історичний аналіз питання про побудову асимптотичних розв'язків лінійних диференціальних рівнянь та систем з малим параметром. Розроблено метод інтегрування сингулярно збурених диференціальних рівнянь другого порядку за допомогою подвійних розвинень. Даний підхід ґрунтується на зведенні досліджуваного рівняння до відповідної сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь. Наголошено на перевагах застосування теорії подвійних рядів

***Ключові слова**: диференціальне рівняння, подвійні ряди, малий параметр, формальні розв'язки, асимптотичні розв'язки*

1. Вступ

Ряд задач з різних галузей знань зводяться до математичних моделей, що описуються звичайними лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Побудова розв'язків таких рівнянь залежить від особливостей визначення їх коефіцієнтів. Досить часто, приймаючи до уваги постановку прикладної задачі, доводиться у відповідній математичній моделі вводити малий параметр. При цьому більш складним є випадок сингулярного збурення, тобто наявність малого параметра при похідній другого порядку.

Протягом останніх десятиліть досить активно застосовується теорія подвійних рядів до асимптотичного інтегрування лінійних сингулярно збурених систем звичайних диференціальних рівнянь з особливими точками, що дозволяє виявити особливості запису параметра та незалежної змінної у відповідних розвиненнях. Задача побудови асмптотики розв'язків лінійних диференціальних рівнянь другого порядку з малим параметром при старшій похідній досліджена в значно меншій мірі. Тому питання про побудову асимптотичного розв'язку лінійного сингулярно збуреного звичайного диференціального рівняння другого порядку у вигляді подвійних рядів є актуальним, та потребує додаткового дослідження та обґрунтування.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

Подвійні степеневі ряди досить вдало були застосовані до дослідження систем лінійних диференціальних рівнянь з малим параметром у випадку іррегулярної особливої точки [1]

$$\varepsilon^h \frac{dz}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z. \qquad (1)$$

У роботі [1] проілюстровано розв'язання задачі про асимптотичне розщеплення систем (1) на підсистеми меншої розмірності. Отримані результати не дозволяли побудувати розв'язки систем (1), але сприяли подальшому їх дослідженню.

В роботах [2, 3] вивчається лінійна неоднорідна система диференціальних рівнянь

$$\varepsilon^h \frac{dz(x,\varepsilon)}{dx} = x^g A(x,\varepsilon) z(x,\varepsilon) + + f(x,\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \frac{\theta x^{g+1}}{g+1} \right), \qquad (2)$$

де ε – малий комплексний параметр, x – незалежна комплексна змінна, $z(x,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, $h \geq 0$, g≥0, $A(x,\varepsilon)$ – $(n\times n)$-матриця, $f(x,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, які зображуються у вигляді подвійних розвинень за недодатними степенями незалежної змінної x та невід'ємними степенями малого параметра ε, θ – комплексне число. Розглядаються випадки кратного спектра головного оператора системи (2).

Зокрема, встановлено, що лінійно незалежні формальні розв'язки системи (2) можна побудувати у вигляді подвійних розвинень за дробовими степенями параметра та відношення незалежної змінної й параметра.

У роботі [4] вивчається питання побудови розв'язків лінійної системи вигляду

$$\varepsilon z^{r+1} \frac{dx}{dz} = A(z,\varepsilon) x - f(z,\varepsilon),$$

де $x(z,\varepsilon)$ – шуканий; ν – вимірний вектор; r – натуральне число, $(\nu\times\nu)$ – матриця $A(z,\varepsilon)$ та вектор $f(z,\varepsilon)$ в комплексній області $|z|<\rho$, $|\varepsilon|<\rho$ ($\rho>0$) задаються у вигляді подвійного розвинення за степенями z та ε.

Припускається, що матриця $A(0,0)$ не вироджена, тобто не має простих нульових власних значень. Розв'язки такої системи запропоновано шукати у вигляді подвійного розвинення

$$x(z,\varepsilon) = \sum_{k,n=0}^{\infty} x_{kn} z^k \varepsilon^n,$$

для визначення коефіцієнтів якого виведено рекурентні формули та знайдено відповідні оцінки

У роботі [5] проілюстровано особливості застосування теорії подвійних рядів до нелінійних систем вигляду

$$\varepsilon^\sigma x^{r+1} \frac{dy}{dx} = f(x,\varepsilon,y), \quad f(0,0,0)=0,$$

за умови, що якобіан

$$\frac{df(0,0,0)}{dy} \neq 0.$$

У роботі [6] вивчається питання про побудову загального асимптотичного розв'язку лінійної системи диференціальних рівнянь вигляду

$$x\frac{dy}{dx} = A(x,\varepsilon) y, \qquad (3)$$

з регулярною особливою точкою $x=0$; ε – малий параметр, $0<\varepsilon\leq\varepsilon_0$; x – незалежна змінна, $0<x<x_0$; $y(x,\varepsilon)$ – шукана вектор-функція, $A(x,\varepsilon)$ – квадратна матриця n-го порядку, яка задається асимптотичним розвиненням $A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{sk}\varepsilon^k x^s$. Зокрема вивчається випадок, коли головна матриця A_{00} системи (3) має одне власне значення λ_0 кратності n, якому відповідає один елементарний дільник такої ж самої кратності. Запропоновано розв'язки системи (3) будувати у вигляді вектор-функції $y(x,\varepsilon) = x^{\lambda_0+\lambda(\varepsilon)} \cdot u(x,\varepsilon)$, де n-вимірний вектор $u(x,\varepsilon)$ та скалярна функція $\lambda(\varepsilon)$ визначаються у вигляді подвійних розвинень.

Саме застосування теорії подвійних рядів до систем (3) дозволяє узагальнити результати, отримані у роботах [7, 8]. Автори цих робіт пропонують дослідження систем (3) у вигляді звичайних степеневих рядів з функціональними коефіцієнтами. У цих роботах припускається, що квадратна матриця n-го порядку $A(t,\varepsilon)$ задається у вигляді розвинення за степенями малого параметра ε

$$A(t,\varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r A_r(t).$$

У роботі [8] доведено, що розв'язки системи (3) можна знайти у вигляді вектора

$$x(t,\varepsilon)=u(t,\varepsilon)t^{\frac{a^2(\varepsilon)}{\varepsilon^h}}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda(t,\varepsilon)dt\right),$$

де $u(t,\varepsilon)$ n – вимірний вектор, $\lambda(t,\varepsilon)$; $a(\varepsilon)$ – скалярні функції, які мають вигляд

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u_r(t),\ \ \lambda(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda_r(t),$$

$$a(\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r a_r.$$

Теорію подвійних рядів було вдало застосовано до дослідження лінійних вироджених систем диференціальних рівнянь з двома малими параметрами. А саме, у роботі [9] проведено аналіз системи диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{h_1}\mu^{h_1}B(t,\varepsilon,\mu)\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon,\mu)x, \tag{4}$$

де $x(t,\varepsilon,\mu)$ – шуканий n-вимірний вектор, $t\in[0;T]$, $T<\infty$; ε, μ – малі, дійсні параметри; h_1, h_2 – невід'мні цілі числа такі, що $h_1+h_2\geq 1$; $A(t,\varepsilon,\mu)$, $B(t,\varepsilon,\mu)$ – $(n\times n)$-матриці, які на відрізку $[0;T]$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення

$$A(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^k\mu^s A_{ks}(t),$$

$$B(t,\varepsilon,\mu)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^k\mu^s B_{ks}(t).$$

Було встановлено, що структура розв'язків систем (4) та методи їх побудови суттєво залежать від поведінки спектра граничної регулярної в'язки матриць $L(t,\lambda)=A_{00}(t)-\lambda B_{00}(t)$. Було досліджено як простий, так і кратний спектр в'язки. Зокрема, у випадку кратних скінченних та нескінченних елементарних дільників в'язки $L(t,\lambda)$ формальні розвинення шуканих розв'язків потрібно будувати за дробовими степенями параметра ε та відношення параметрів $\frac{\mu}{\varepsilon}$.

Задача про побудову асимптотичних розв'язків для систем

$$\varepsilon^h\frac{dx}{dt}=A(t,\varepsilon)x, \tag{5}$$

з малим параметром ε при похідних вивчалась за умови, що матриця системи (5) задається розвиненням

$$A(t,\varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r A_r(t).$$

У роботі [10] досліджено особливості побудови розв'язків системи (5) в залежності від кратності головного оператора цієї системи, а самі розв'язки будуються у вигляді звичайних степеневих рядів з функціональними коефіцієнтами.

Теорія подвійних рядів до систем (5) вперше була застосована у роботі [11]. Основна ідея досліджень полягала у розробці методу, що дозволяє будувати розв'язки системи (5) у вигляді збіжних подвійних розвинень за степенями малого параметра та відношення незалежної змінної та параметра.

Наведений короткий історичний огляд вказує на переваги застосування теорії подвійних рядів: розроблені методи залежать від кратності спектра граничної скалярної матриці, не вимагають стабільності спектра функціональної матриці та приводять до відшукання числових коефіцієнтів відповідних розвинень. В цілому питання про побудову асимптотичних розв'язків системи (5) та звичайних диференціальних рівнянь, що до них зводяться, у вигляді подвійних розвинень є мало дослідженим та потребує додаткових досліджень та обґрунтувань.

3. Мета та задачі дослідження

Основною метою даного дослідження є розробка методів та підходів, що дозволяють будувати асимптотичні розв'язки рівняння

$$\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}+a(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+c(t,\varepsilon)x=0 \tag{6}$$

у вигляді подвійних степеневих рядів.

Для досягнення мети були вирішені наступні задачі:

1. Зведення рівняння (6) до сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній.

2. Вибір вигляду вектора-розв'язку для отриманої системи диференціальних рівнянь.

3. Визначення коефіцієнтів подвійних розвинень шуканих векторної та скалярної функцій.

4. Встановлення умов, що накладаються на коефіцієнти розвинення шуканої скалярної функції, що дозволяють обґрунтувати асимптотичний характер побудованих лінійно-незалежних розв'язків.

4. Методи дослідження

У даній роботі вивчається рівняння вигляду

$$\varepsilon\frac{d^2x}{dt^2}+a(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+c(t,\varepsilon)x=0, \tag{6}$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий n-вимірний вектор, $t\in[0;T]$, $T<\infty$; ε – малий дійсний параметр; $a(t,\varepsilon)$, $c(t,\varepsilon)$ – функції, які на відрізку $[0;T]$ допускають розвинення

$$a(t,\varepsilon)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}a_{sk}\varepsilon^k t^s,\ \ c(t,\varepsilon)\sim\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}c_{sk}\varepsilon^k t^s. \tag{7}$$

Зокрема, розглянемо випадок, коли числові коефіцієнти (7) задовольняють умову $c_{00}^2 + a_{00}^2 \neq 0.$

Основна ідея дослідження ґрунтується на зведенні рівняння (6) до сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній. Ввівши заміну $\frac{dx}{dt} = y(t,\varepsilon)$, отримаємо систему

$$\varepsilon \frac{dz}{dt} = A(t,\varepsilon) z, \tag{8}$$

де $z = colon(x, y)$ – вектор-стовпець, перша координата якого є шуканою функцією. Матриця $A(t,\varepsilon)$ має запис

$$A(t,\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -c(t,\varepsilon) & -a(t,\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Відповідно, враховуючи розвинення (7), цю матрицю можна подати у вигляді

$$A(x,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} A_{sk}\varepsilon^k x^s. \tag{9}$$

Головна матриця системи (8) має запис

$$A_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -c_{00} & -a_{00} \end{pmatrix},$$

де $c_{00}^2 + a_{00}^2 \neq 0$.

У даній роботі вивчається випадок, коли $c_{00} = 0,\ \ a_{00} \neq 0.$

Розв'язок системи (8) будемо шукати у вигляді вектора

$$z(t,\varepsilon) = u(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{10}$$

де $u(t,\varepsilon)$, $\lambda(t,\varepsilon)$ – двовимірний вектор-функція та скалярна функція відповідно, які подано у вигляді розвинень

$$u(t,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} u_{sk}\varepsilon^k t^s,\ \ \lambda(t,\varepsilon) \sim \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{sk}\varepsilon^k t^s, \tag{11}$$

коефіцієнти яких – вектори u_{sk} та числа λ_{sk} – потрібно визначити.

Для відшукання розв'язку (8) підставимо вектор (10) з розвиненнями (11) та (9) в систему (8) та прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях параметра ε та змінної t. Відповідно отримаємо алгебраїчні системи рівнянь

$$(A_{00} - \lambda_{00}E)u_{00} = 0$$

$$(A_{00} - \lambda_{00}E)u_{sk} = b_{sk},\ \ s \geq 0,\ \ k \geq 1, \tag{12}$$

де

$$b_{sk} = \lambda_{sk}u_{00} - g_{sk},\ \ s + k \geq 1, \tag{13}$$

$$g_{sk} = A_{sk}u_{00} + \sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k} A_{ij}u_{s-i,k-j} + \sum_{i=1}^{k-1} A_{si}u_{0,k-i} + \sum_{i=1}^{k} A_{0i}u_{s,k-i} -$$
$$-\sum_{i=1}^{s-1}\sum_{j=0}^{k} \lambda_{ij}u_{s-i,k-j} - \sum_{i=1}^{k-1}\lambda_{si}u_{0,k-i} - \sum_{i=1}^{k}\lambda_{0i}u_{s,k-i} - (s+1)u_{s+1,k-1},$$
$$s \geq 0,\ \ k \geq 1,$$

Вектор u_{00} – власний вектор матриці A_{00}, що відповідає власному значенню λ_{00}. Якщо виконується умова розв'язності системи (12)

$$(b_{sk}, \psi) = 0,\ \ s \geq 0,\ \ k \geq 1, \tag{14}$$

тобто скалярний добуток векторів b_{sk}, ψ рівний нулю, $s \geq 0$, $k \geq 1$, то вектори u_{sk} та числові коефіцієнти λ_{sk}, $s \geq 0$, $k \geq 1$ можна визначати за формулами

$$u_{sk} = Hb_{sk},\ \ \lambda_{sk} = (g_{sk}, \psi),\ s + k \geq 1. \tag{15}$$

Символом H позначено напівобернену матрицю до матриці $(A_{00} - \lambda_{00}E)$, для відшукання якої застосовано методи [12], а вектор ψ – елемент нуль-простору для матриці, спряженої до $(A_{00} - \lambda_{00}E)$.

Враховуючи задання матриці A_{00}, легко визначити, що $\lambda_{00}^{(1)} = 0$, $\lambda_{00}^{(2)} = -a_{00}$, відповідно вектори мають вигляд

$$u_{00}^{(1)} = colon(1, 0),\ \ u_{00}^{(2)} = colon(0, 1),$$

$$\psi^{(1)} = colon(1, 0),\ \ \psi^{(2)} = colon(0, 1).$$

Напівобернені матриці згідно [12] визначаються відповідно

$$H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{a_{00}} \end{pmatrix},\ \ H_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{00}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Побудовані розв'язки (10), (11), (15) є формальними розв'язками системи (8). Асимптотичний характер цих розв'язків визначається умовою $\operatorname{Re} a_{00} > 0$.

Виписуючи першу координату $x(t,\varepsilon)$ для вектора (10), отримаємо розв'язок рівняння (6).

5. Результати дослідження

Теорема. Лінійно незалежні асимптотичні розв'язки рівняння (6) з коефіцієнтами (7) за умови $\operatorname{Re} a_{00} > 0$ можна побудувати у вигляді функцій

$$x_1(t,\varepsilon) = \exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda_1(\tau,\varepsilon)d\tau\right),$$

$$x_2(t,\varepsilon)=\tilde{u}_2(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-1}\int_{t_0}^{t}\lambda_2(\tau,\varepsilon)\,d\tau\right),$$

де $\tilde{u}_2(t,\varepsilon)$ – перша координата вектора $u_2(t,\varepsilon)$, а $\lambda_1(t,\varepsilon)$ та $\lambda_2(t,\varepsilon)$ скалярні функції, що визначаються формулами (15), (13).

6. Висновки

Для досягнення мети даного дослідження було виконано ряд задач.

1. Зведено рівняння (6) до сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з малим параметром при похідній (8), матриця якої задається розвиненням (9).

2. Підібрано вигляд (10), (11) вектора-розв'язку для системи (8).

3. Коефіцієнти подвійних розвинень шуканих векторної та скалярної функцій (11) визначено в результаті підстановки вектора (10) у систему (8), прирівнювання відповідних коефіцієнтів при однакових степенях незалежної змінної та параметра, розв'язання отриманих систем алгебраїчних рівнянь.

4. Визначено, що побудовані лінійно-незалежні розв'язки є асимптотичними за умови $\operatorname{Re} a_{00} > 0$.

Отже, у даній роботі обґрунтовано особливості застосування теорії подвійних рядів до асимптотичного інтегрування рівнянь (6) та показано, що лінійно незалежні розв'язки таких рівнянь визначаються через коефіцієнти розвинень (7).

Література

1. Сотниченко, Н. А. Асимптотическое интегрированние дифференциальных уравнений [Текст] / Н. А. Сотниченко, С. Ф. Фещенко. – К., 1980. – 48 с.
2. Яковець, В. П. Асимптотичні розв'язки сингулярно збуреної лінійної системи диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою [Текст] / В. П. Яковець, О. В. Головченко // Нелінійні коливання. – 2009. – Т. 12, № 3. – С. 417–432.
3. Головченко, О. В. Побудова розв'язків лінійних систем з особливою точкою та параметром [Текст] / О. В. Головченко, В. П. Яковець // Труды ИПММ НАН Украины. – 2007. – № 15. – С. 40–49.
4. Balser, W. Multisummability of Formal Solutions of Singular Perturbation Problems [Text] / W. Balser, J. Mozo-Fernandez // Journal of Differential Equations. – 2002. – Vol. 183, Issue 2. – P. 526–545. doi: 10.1006/jdeq.2001.4143
5. Canalis-Durand, M. Monomial summability and doubly singular differential equations [Text] / M. Canalis-Durand, J. Mozo-Fernandez, R. Schafke // Journal of Differential Equations. – 2007. – Vol. 233, Issue 2. – P. 485–511. doi: 10.1016/j.jde.2006.11.005
6. Чорненька, О. В. Асимптотичний аналіз лінійних систем диференціальних рівнянь з параметром та регулярною особливою точкою [Текст] / О. В. Чорненька // Вісник Черкаського університету. – 2016. – № 1. – С. 90–99.
7. Завизион, Г. В. Сингулярно возмущенная система дифференциальных уравнений с рациональной особенностью [Текст] / Г. В. Завизион // Дифференциальные уравнения. – 2007. – Т. 43, № 7. – С. 867–878.
8. Шкіль, М. І. Асимптотичне зведення сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з регулярною особливістю до діагонального вигляду [Текст] / М. І. Шкіль, Г. В. Завізіон // Доповіді Національної академії наук України. – 2000. – № 12. – С. 25–29.
9. Яковец, В. П. Методы возмущений в задаче асимптотического интегрирования вырождающихся сингулярно возмущенных линейных систем с двумя малими параметрами [Текст] / В. П. Яковец. – К., 1992. – 52 с.
10. Шкіль, М. І. Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях [Текст] / М. І. Шкіль. – К.: Вища школа, 1971. – 226 с.
11. Яковец, В. П. Интегрирование линейных сингулярно возмущённых систем дифференциальных уравнений с помощью двойных рядов [Текст] / В. П. Яковец // Наукові записки НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1 "Фізико-математичні науки". – 2007. – № 8. – С. 211–227.
12. Самойленко, А. М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями [Текст] / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Мельничук О. В.
Дата надходження рукопису 09.10.2017

Чорненька Олена Володимирівна, кандидат фізико-математичних наук, кафедра математики та економіки, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, вул. Графська, 2, м. Ніжин, Чернігівська область, 16600
E-mail: elenagolovch@rambler.ru

Гусак Анастасія Сергіївна, Навчально-науковий інститут точних наук і економіки, Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя, вул. Графська, 2, м. Ніжин, Чернігівська область, 16600
E-mail: anastasia.gusac@gmail.com