ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 347.822.4 (045)

КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ СОЦИОДИНАМИКИ

© **В. А. Касьянов**

В настоящей работе ставится задача построения теории социодинамики по аналогии с кинетической теорией газов. Вцелом развиваемая модель является гибридной, так как она использует идеи статистической механики, в частности, уравнения типа Больцмана и энтропийный принцип оптимальности Джейнса, примененный к распределениям предпочтений первого и второго рода.

Ключевые слова: принцип максимума субъективной энтропии, субъективный анализ, рейтинговые и предметные предпочтения.

Present work aims to build a theory of social dynamics, similar to the kinetic theory of gases. In general, given model is hybrid because off static mechanics ideas. In particular, Boltsman equation, Jaynes's principle of entropy optimality have been applied to preference distribution first and second type.

Keywords: principle of subjective entropy maximum, subjective analisys, range and subject preferences.

1. Введение

Предлагается модель, определяющая распределение субъектов в социуме в пространстве предметных и рейтинговых предпочтений, аналогичные кинетическим уравнениям физики: Больцмана в теории газов, Голдмана в теории коагуляции. Рассматриваются существующие вопросы, в частности, относительно особенностей модели информационного взаимодействия. Распределения получаются на основе принципа максимума субъективной энтропии, в связи с этим модели носят гибридный характер.

Ценные плоды приносят исследования в гибридных научных направлениях. Примерами могут служить «психофизика», «экофизика», теория искусственных нейронных сетей и др. Если в первом случае имеет место проникновение физических идей и методов в психологию, т. е. в «нематематическую» или слабо-математизированную область, во втором – проникновение высоко-математизированной физики в другую высоко-математизированную область – экономику, то в третьем случае мы имеем дело с проникновением физиологии в математику и теорию информации.

Было бы большим упущением не использовать аналогии, возникающие на стыке наук.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

В настоящей работе предлагается подход к исследованию динамики распределения предпочтений основанный на аналогии с кинетической теорией газов, принципе максимума субъективной энтропии, теорией коагуляции.

В модели предпочтений, которая является основой «субъективного анализа» [1–3], рассматривается принцип максимума субъективной энтропии в математической «упаковке» энтропийного принципа Джейнса [4, 5], предложенного в свое время для физической кинетики и использованного в дальнейшем в других областях (биологии, демографии, синергетике, логистике и т.д.). Суть этого принципа в применении к психологии сводится к следующему: предполагается, что субъект (или актор) активной системы находится в многоальтернативной проблемной ситуации и распределяет свои предпочтения π_i на множество альтернатив $\sigma;\in S_a;(i\in 1,\bar{N})$. Постулируется, что актор – субъект распределяет свои предпочтения на S_a таким образом, что критерий

$$\Phi = H_{\pi} + E_{\pi} + N_{\pi} \qquad (1)$$

принимает максимальное значение. Здесь H_{π} — энтропия предпочтений.

$$H_{\pi} = -\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)\ln\pi(\sigma_i), \qquad (2)$$

E_{π} — функция эффективности

$$E_{\pi} = \pm\beta\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i)F_i, \qquad (3)$$

N_{π} — член, учитывающий условие нормировки

$$N_{\pi} = \gamma\cdot\sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i): \qquad \sum_{i=1}^{N}\pi(\sigma_i) = 1; \qquad (4)$$

Таким образом, постулируется вариационный принцип в применении к распределению предпочтений субъекта. Функцию F_i удобно назвать когнитивной функцией.

Решая вариационную задачу

$$\pi_i\left(\sigma_i\right) = \arg extr...\Phi_{\pi}, \qquad (5)$$

мы находим явные количественные представления распределений предпочтений на S_a. H_π – называется субъективной энтропией и легко подсчитывается для каждого распределения $\pi(\sigma_i)$.

Процедуру решения вариационной задачи (5) можно считать действием оператора (А), который каждой когнитивной функции $F_i \in F$, где F – множество функций определенного класса, ставит в соответствии распределение предпочтений $\pi_i \in \Pi$. Предполагается, что все π_i положительны и $0 \le \pi(\sigma_i) \le 1; (i \in 1,\overline{N})$,причем π_i не являются вероятностями $A: F_i \Rightarrow \pi(\sigma_i)$,или, символически: $AF_i = \pi(\sigma_i)$. С учетом нормировки находим, что

$$\pi(\sigma_i) = \frac{e^{\pm\beta F_i}}{\sum_{q=1}^{N} e^{\pm\beta F_q}} \tag{6}$$

Обратная задача: $\overline{A}\pi_i \approx F_i$ не имеет единственного решения.

Проблема существования, единственности и устойчивости решения (6) связывается с постановкой аналогичных вопросов в отношении функции F_i. Если в качестве F_i выступает полезность $U_i(\sigma_i)$, или негативная полезность (вредность) $L_i(\sigma_i)$, или ожидаемая полезность, то вопрос о существовании решения сводится к проверке системы аксиом «теории полезности» [6, 7, 8] (Нейман-Моргентрегн, де-Гроот, Фишберн, …).

В дополнение к основной гипотезе (1) вводятся вспомагательные гипотезы: Гипотеза об «индивидуальном носителе», Гипотеза о наличии «энтропийных порогов». (Гипотеза об индивидуальном носителе не исключает признания существования «коллективного разума» или «виртуального N+1 субъекта»).

Наряду с «предметными предпочтениями» в субъктивном анализе рассматриваются рейтинговые предпочтения, относительно которых также применяется вариационный принцип. В действительности, повидимому формирование предметных и рейтинговых предпочтений нельзя рассматривать раздельно, однако в первом приближении может быть принята гипотеза «о разделимости» двух этих процессов.

Сумма сформулированных предположений (гипотез) позволяет говорить о «принципе максимума субъективной энтропии» как о самостоятельном принципе.

В этом случае математический формализм принципа Джейнса можно рассматривать как математическую «упаковку» для другого, существенно отличного, содержания.

Взгляд на проблему с точки зрения теории категорий развивается в работе [12].

Дополнительно требуется, чтобы сумма в знаменателе (6) была конечной.

3. Модели кинетических уравнений

3.1. Модели кинетических уравнений в физике

Одна из физических аналогий, которая может быть принята в субъективном анализе, состоит в использовании основной схемы построения функции распределения в кинетической теории газов (например – уравнение Больцмана), а также уравнения Голдмана в теории коагуляции.

Проведем краткий экскурс в указанные области. Кинетическое уравнение Больцмана для функции распределения координат и импульсов молекул однокомпонентного газа имеет вид:

$$\frac{\partial f(\vec{q}_1\vec{p}_1 t)}{\partial t} = -\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{q}} - \vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + +S_{(2)}(\vec{q}', \vec{q}-\vec{q}', \vec{p}', \vec{p}-\vec{p}'), \tag{7}$$

где $f(\vec{q},\vec{p},t)$ – одночастичная функция распределения, $\vec{q}$ – векторная координата частицы, $\vec{p}$ – импульс частицы, $\vec{F}$– сила, приложенная к частице. Потенциал взаимодействия учитывается в «столкновительном члене» $S_{(2)}$. В простейшем случае в уравнении (7) учитываются только парные взаимодействия. Кроме того, при столкновении двух частиц (упругих шаров) сохраняются суммарная масса, суммарный импульс и суммарная кинетическая енергия**.** В случае неупругих столкновений кинетическая энергия не сохраняется. Тройные столкновения и столкновения большего числа частиц в модели (7) игнорируются как чрезвычайно редкие. Применительно к социодинамике, к взаимодействию субъектов такое допущение излишне обременительно, так как априорно ясно, что коллективные взаимодействия играют существенную роль.

Кроме того очевидно, что подобные «механическому» случаю условия сохранения в применении к предпочтениям отсутствуют и должны быть заменены другими условиями, которые, как будет видно из дальнейшего, имеют вид неравенств.

Итак, наиболее существенные отличия кинетической теории газов сводятся к следующему:

– кроме «парных» взаимодействий существенную роль должны играть «тройные» («соображение на троих») … «*n*-ичные» коллективные взаимодей-ствия;

– «эффект толпы». Каким-то образом должны быть учтены «законы толпы»;

– даже при парных взаимодействиях отсутствуют сохраняющиеся величины («масса», «импульс», «энергия»). Взаимодействия носят «неупругий характер» и должны быть найдены модели информационного взаимодействия субъектов.

– существуют как «близкодействующие» так и «дальнодействующие» взаимодействия с учетом существующих средств коммуникации, информационных средств и т.д.

При этом следует учитывать, что в данном случае взаимодействия носят как материальный, так и, в первую очередь информационный характер $(\vec{\pi}_i, \vec{\xi}_i)_{befor} \to (\vec{\pi}_i, \vec{\xi}_i)_{aftor}$.

– не может быть применен принцип «детального равновесия». Он должен быть заменен другой моделью.

Одно из обобщений уравнения Больцмана относится к случаю, когда частицы «газа» имеют различные массы, т. е. существует также распределение по массам и функция распределения имеет еще один аргумент – массу частицы:

$$f = f(\vec{q}, \vec{p}, m, t).$$

Соответствующая теория возникла в связи с изучением кинетики аэрозольных систем, капельных облаков, в астрофизике туманностей.

Соответствующее кинетическое уравнение имеет вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\vec{q},\vec{p},m,t)}{\partial t} &= -\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial f}{\partial \vec{q}} - \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \\ &+\xi(m)\frac{\partial}{\partial \vec{p}}\left[\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} + \beta\cdot\left(\frac{\vec{p}}{m} - \vec{U}_r\right)\cdot f\right] + \\ &+\left(\frac{3}{4\bar{n}\rho_o}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot\int_0^m\ldots\int f_n(\vec{q},\vec{p}\,',m',t)\,f(\vec{q},\vec{p}-\vec{p},m-m',t)\cdot \\ &\cdot\left|\frac{\vec{p}\,'}{m'} - \frac{\vec{p}-\vec{p}\,'}{m-m'}\right|\cdot\left[m'^{\frac{1}{3}} + (m-m')^{\frac{1}{3}}\right]^2 d\vec{p}\,'dm' - \\ &-\left(\frac{3}{4\bar{n}_{\rho o}}\right)^{\frac{2}{3}}\int_0^\infty\int f(\vec{q},\vec{p},m,t)\times \\ &\times f(\vec{q},\vec{p}\,',m',t)\left|\frac{\vec{p}}{m} - \frac{\vec{p}\,'}{m'}\right|\cdot\left[m^{\frac{1}{3}} + m'^{\frac{1}{3}}\right]^2 d\vec{p}\,'dm'\end{aligned} \tag{8}$$

Третий член справа описывает эффект, обусловленный релеевской диссипацией и диффузией, четвертый член описывает пополнение фракции частиц с параметрами ($\vec{f}, \vec{p}, m$), точнее, в малой окресности этих параметров в результате парных столкновений, пятый член описывает «скорость» покидания частицами данной фракции также в результате парных столкновений.

Приведенное обобщенное уравнения Больцмана может быть свернуто, если предположить, что $f' = \nu(m,t)\cdot\varphi^{(0)}(\vec{p},m,t)$, где $\varphi^{(0)}(\vec{p},m,t)$ – распределение Максвелла по импульсам. Это допущение соответствует случаю броуновской коагуляции. Из уравнения (8) в этом случае получается уравнение коагуляции Голдмана:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \nu(m,t)}{\partial t} &= \frac{1}{2}\int_0^m K(m', m-m')\cdot\nu(m',t)\nu(m-m',t)\,dm' - \\ &-\int_0^\infty K(m,m')\nu(m,t)\cdot\nu(m',t)\,dm'\end{aligned} \quad ,(9)$$

где ядро $K(m_1, m_2)$ представляется формулой:

$$\begin{aligned}K(m_1,m_2) &= 2\pi\left(\frac{3}{4\pi_{\rho o}}\right)^{\frac{2}{3}}\frac{\left[m_1^{\frac{1}{3}} + m_2^{\frac{1}{3}}\right]^2}{\sqrt[3]{m_1^{\frac{3}{2}}\cdot m_2^{\frac{3}{2}}}}\times \\ &\times\iint_{\vec{p}_1\vec{p}_2}\exp\left[-\frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1\theta_r} - \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2\theta_r}\right]\cdot\left|\frac{\vec{p}_1}{m_1} - \frac{\vec{p}_2}{m_2}\right|\cdot d\vec{p}_1 d\vec{p}_2\end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части представляет собой секундный вклад коагуляцитивного процесса во фракцию частиц с массой в диапазоне $(m, m+dm)$, второй – убыль числа частиц из фракции с массой в указанном диапазоне в результате «соединения с частицами с другой массой m' ».

Заметим еще, что при достаточно строгом выводе уравнение Больцмана получается как последний шаг свертывания «цепочки Боголюбова», вначале которой находится уравнение Лиувилля (для системы с фиксированным числом частиц). С переходом к уравнениям типа (8), в котором допускается изменение числа частиц в результате коагуляции, возникают чисто теоретические трудности. В этом случае, более адэкватными были бы схемы, подобные схемам квантовой электродинамики, где число частиц может не сохраняться.

3. 2. Кинетическое уравнение социо-динамики в субъективном анализе

Аналогия, которую мы хотим применить, состоит в следующем. Имеется социум, общее число субъектов – *M*, $\pi_j(\sigma_i)$ – распределение предпочтений у *j*-го субъекта, или $\vec{\pi}_j$ – вектор распределения предпочтений на S_{aj} – множестве альтернатив *j*-го субъекта, $S_a = \bigcup_{j=1}^{M} S_{aj}\,(j\in\overrightarrow{1,m})$ – мажорирующее множество альтернатив. Введем функцию плотности распределения числа субъектов на множестве векторов $\vec{\pi}_i$: $\nu(t,\vec{\pi}_i)$.

Это означает, что во фракции $\vec{\pi}, \vec{\pi} + d\vec{\pi}$ содержатся $dn(t,\vec{\pi})$ субъектов и

$$dn(t,\vec{\pi}) = \nu(t,\vec{\pi})d\vec{\pi} \tag{10}$$

Здесь $\vec{\pi}_j$,(σ_i) играют роль координат и могут изменяться в определенных пределах. В соответствии с условиями нормировки $\sum_{i=1}^{N}\pi_j(\sigma_i) = 1(\forall j\in 1,M)$, откуда следует, что $\forall i\in\overrightarrow{1,N}$ и $\forall j\in\overrightarrow{1,m}$ и $0 \le \pi_j(\sigma_i) \le 1$.

При «встрече» субъектов *j* и *k* происходит изменение распределения предпочтений обеих субъектов в большей или меньшей степени.

Пусть имеется некоторый закон взаимодействия субъектов при встрече $Int_{ik}(\vec{\pi}_j, \vec{\pi}_k) \Rightarrow \vec{\pi}$, такой, что в результате «столкновения» распределений $\vec{\pi}_j$ и $\vec{\pi}_k$ у одного из субъектов или у обеих возникает распределение $\vec{\pi}$.

Если принять допущение ординарности, то следует считать, что только у одного из субъектов в результате «стокновения» возникает распределение $\vec{\pi}$. В отличие от физической задачи коагуляции в случае «обмена» предпочтениями сумма предпочтений не сохраняется. Выполняется только условие, что $0 \le \pi_j(\sigma_k) \le 1$, как до, так и после «столкновения» и, соответственно $0 \le \pi_i(\sigma_k) + \pi_j(\sigma_k) \le 2$.

Аналог уравнения Голдмана можно представить в виде:

$$\frac{\partial v(t,\vec{\pi})}{\partial t} = +\dot{\vec{\pi}} \cdot \left(\underset{\pi}{\overrightarrow{grad\, v}} \right) = \frac{1}{2} \int\limits_{(\vec{\pi}_1,\vec{\pi}_2)}^{1} \int\limits_{0}^{1} K^{+} \left(Int_1(\vec{\pi}_1,\vec{\pi}_2) = \vec{\pi} \right) v(\vec{\pi}_i,t) \cdot$$
$$\cdot v(\vec{\pi}_2,t)\, d\vec{\pi}_1 d\vec{\pi}_2 - \int\limits_{\substack{0 \\ (\pi')}}^{1} K^{-}(Int_2(\overrightarrow{\pi},\overrightarrow{\pi'}) = \overrightarrow{\pi}'' \ne \overrightarrow{\pi}) \cdot v(\vec{\pi},t) \cdot v(\vec{\pi}',t)\, d\vec{\pi}' \qquad (11)$$

В этом уравнении:

$$\dot{\vec{\pi}}_1 = \left(\dot{\pi}_t(\sigma_1), \dot{\pi}(\sigma_2), ..., \dot{\pi}(\sigma_N) \right),$$

$$d\vec{\pi}_i = d\pi_i(\sigma_1) d\pi_i(\sigma_2) ... d\pi_i(\sigma_N); (i \in \overrightarrow{1,2})$$

$$d\vec{\pi}' = d\pi'(\sigma_1) d\pi'(\sigma_2) ... d\pi'(\sigma_N),$$

В случае если предпочтения не изменяются во времени в результате изменения эндогенных и экзогенных факторов: $\vec{\pi} \equiv 0$, то функция распределения $v(t,\pi)$ меняется только в результате взаимодействий субъектов («встреч», «столкновений»): $\dfrac{\partial v(\vec{\pi},t)}{\partial t} = S$.

K_1^{+} и K^{-} ядра, представляющие собой вероятности «столкновения» двух субъектов и отражающие механизм преобразования предпочтений в результате «информационной» встречи субъектов.

Этот механизм можно связать с правилами агрегирования предметных предпочтений [2], в которых существенную роль играют рейтинговые предпочтения (или просто – рейтинги). В [2] рассматриваются абсолютные рейтинги $\xi(j)$, где j – номер субъекта в «социуме» и условные рейтинги $\xi(j|k)$. В первом случае мы имеем дело с рейтингами, признаваемыми всеми членами «социума» – все субъекты имеют одинаковое распределение рейтинговых предпочтений на множестве S_ξ субъектов. Во втором случае каждый субъект $k \in 1\vec{M}$ имеет свое индивидуальное «мнение» относительно остальных членов «социума» – группы, включая и саморейтинг. Можно сказать, что $\xi(j|k)$ представляет собой рейтинг субъекта "j"глазами субъекта "k", а весь набор. $\xi(j|k)$ – распределение условных рейтингов.

В обоих случаях вводятся условия нормировки

$$\sum_{j=1}^{M} \xi(j) = 1; \sum_{j=1}^{M} \xi(j|k) = 1 (\forall k \in \overrightarrow{1,m}). \qquad (12)$$

Механизмы агрегирования могут быть различными, и требуется ряд допущений для принятия определенного правила. В качестве наиболее простого правила агрегирования рассмотрим следующее:

$$\pi_k^{(a)}(\sigma_i) = \sum_{j=1}^{M} \pi_j(\sigma_i) \cdot \xi(j|k), \qquad (13)$$

где $\pi_k^{(a)}(\sigma_i)$ – агрегированное предпочтение альтернативы (σ_i) субъекта «k». Правило (13) означает, что субъект «k» при формировании «своего» предпочтения σ_i учитывает предпочтения других членов группы с весами равными условным рейтингам. Видим, что определенные таким образом агрегированные предпочтения нормированы на множестве альтернатив S_a:

$$\sum_{n=1}^{M} \pi_j^{(a)}(\sigma_k) = 1 \qquad (14)$$

Заметим, что, если при агрегировании используются абсолютные рейтинги, то формула (13) приводит к одинаковым агрегированным предпочтениям для всех субъектов, то есть, агрегирование выравнивает предметные предпочтения.

Возникновение агрегированных предпочтений не есть мгновенный акт, не является процессом, развивающимся во времени. Поэтому приведенные ниже модели ядер K^{+} и K^{-} соответствуют еще одному допущению: – процесс агрегирования протекает достаточно быстро, характерное время выработки агрегированных предпочтений много меньше характерного времени изменения функции распределения $v(\vec{\pi},t)$.

Возвращаясь к уравнению (11) и рассматривая, соответственно, лишь парные взаимодействия, представим ядра K^{+} и K^{-} соответствующим образом:

$$K^{+} = \alpha \cdot S(\vec{\pi} - \left(\vec{\pi}_1 \cdot \xi |1,|1 \right) + \vec{\pi}_2 \cdot (\xi(2|1)), \qquad (15)$$

где α вероятность встречи двух субъектов (речь идет об информационном обмене). $\delta(\cdot) - \delta$ – формула Дирака. Если нет перекрестного влияния предпочтений, то:

$$K\Pi = \alpha \cdot \sum_{j=1}^{N} \delta\left(\pi(\sigma_k) - (\pi_1(\dot{\varphi}_i)\xi(1| \ ) + \pi_2(\dot{\sigma}_i)\xi(2| \ ) \right) \qquad (16)$$

Во фракцию с распределением $\vec{\pi}$ попадают в результате «встречи» только те субъекты, для которых выполняется условие:

$$\pi(\sigma_i) = \pi_1(\sigma_i)\xi_1 + \pi_2(\sigma_i)\xi_2; \left(\forall_i \in 1, \bar{N} \right). \qquad (17)$$

Фракцию покинут субъекты, для которых будет выполняться условие:

$$\pi_1(\sigma_i) = \pi(\sigma_i)\xi + \pi_2(\sigma_i)\xi_2; \left(\forall i \in 1, \bar{N} \right) \qquad (18)$$

Это соответствует ядру в виде:

$$K\Pi(\vec{\pi}_1 \vec{\pi}_2) = \alpha \sum_{i=1}^{N} \delta\left(\pi_1(\sigma_i) - (\pi(\sigma_i)\xi + \pi_2(\sigma_i)\xi_2) \right), \qquad (19)$$

а соответствующий член в правой части принимает вид:

$$\dots \underset{(\pi_1)}{\int_0^1} \underset{(\pi_2)}{\int_0^1} \alpha \prod_{I=1}^{N} \delta(\pi_1(\sigma_i) - (\pi(\sigma_i)\xi + \pi_2(\sigma_i)\xi_2)) \cdot$$
$$\cdot v(\vec{\pi}, \xi, t) v(\vec{\pi}_2, \xi_2 t) d\vec{\pi}_2, d\xi \cdot d\xi_2 \qquad (20)$$

Множитель $\frac{1}{2}$ в уравнении (11) обусловлен симметрией ядра K^+ относительно $\vec{\pi}_1, \xi_1$ и $\vec{\pi}_2, \xi_2$. Соответствующая δ функция обращается в бесконечность при перестановке индексов «*1*» и «*2*».

Приведенное уравнение (11) требует определенных комментариев.

1. В модели предполагается, что число субъектов в группе достаточно велико, так, что приближенно можно дискретное распределение заменить непрерывным $n_k(\vec{\pi}_k, \xi_k, t) \Rightarrow v(\vec{\pi}, \xi, t)$.

2. Учитываются только парные взаимодействия, тройные взаимодействия и одновременные встречи большего числа субъектов игнорируются. Приближенно их роль можно учесть в левой части, через производную $\dot{\pi}_i$. При этом предполагается «ординарность» процесса: в течении короткого времени Δt может произойти только одна «результативная встреча» – такая встреча, когда обмен информацией между субъектами приводит к изменению распределения предпочтений и, соответственно, переходу субъекта из одной фракции в другую. Понятно, что это допущение весьма обременительно. Действительно, влияние агитации, пропаганды, рекламы через средства массовой информации, влияние преподавателя в аудитории и пр. – примеры коллективного взаимодействия. В данной модели эти эффекты через столкновительный член не учитываются.

Все, что происходит в процессе взаимодействия, характер и форма взаимодействия скрыто в коэффициенте – α (15). Соответствующие модели требуют детализации. α есть вероятность «встречи» и эффективность обмена информацией. «Встреча» в данном случае понимается не как пространственное сближение, хотя и это обстоятельство должно играть определенную роль, но, прежде всего, как информационная «встреча». Мы можем говорить о встрече в буквальном смысле, когда два субъекта встречаются «геометрически» и обмениваются информации, но «встреча» может иметь характер «дальнодействия», когда обмен информацией происходит на расстоянии, может быть значительном с помощью электронных или других средств.

При этом можно рассматривать:

а) полный взаимный обмен информацией о предпочтениях обеих сторон (без «манипуляций» и утайки) – будем говорить о «детерминированном» обмене;

б) обмен с качественным (не количественным) описанием предпочтений;

в) обмен с уменьшенным искажением (с «манипуляцией»);

г) неполный обмен (не по всему спектру предпочтений относительно некоторого подмножества $S'_a \subset S_a$);

д) обмен с различным уровнем полноты и достоверности информаций с каждой из сторон.

Построение соответствующих моделей представляет важную задачу.

Выше мы говорим об «информационном» взаимодействии, «информационной» встрече. В монографиях [1, 2] рассмотрены примеры, когда обмен располагаемыми ресурсами между двумя субъектами приводит к одновременному изменению распределений их предпочтений. Поэтому при построении ядер «столкновительного» члена в кинетическом уравнении социодинамики (11) следует учитывать и этот фактор. Другими словами, можно утверждать, что изменение индивидуальных распределений предпочтений обусловлено как «информационным» так и «материальным» (точнее – «ресурсным») обменом.

Продолжим сравнительный анализ развиваемой аналогии и, главным образом, существенных отличий от кинетической теории газа. Справедливость модели Больцмана требует достаточно высокой температуры (т.е. кинетической энергии хаотического движения молекул) и достаточно низкой плотности так, чтобы локализованные волновые пакеты, соответствующие молекулам были много меньше среднего расстояния между молекулами (необходимо, чтобы длина т.н. волны де Бройля была много меньше, чем среднее расстояние между частицами):

$$\frac{\Pi}{\sqrt{2\pi kT}} \cdot \left(\frac{M}{V}\right)^{\frac{1}{3}} \langle\langle 1, \qquad (21)$$

где Π – постоянная Планка, V – объем сосуда, в котором находится газ, M – число молекул.

Каким образом можно было бы определить степень «разреженности» субъектов – индивидуумов в их фазовом информационном пространстве, которое мы определяем как пространство Π векторов $\vec{\pi}$ индивидуальных предпочтений (учитывая дополнительно, что $(\vec{\pi}| \le 1)$).

Следующий вопрос состоит в существовании или несуществовании аналога H – теоремы Больцмана.

Если ввести энтропию для распределения $v(\vec{\pi}, t)$:

$$H_v = -\int \dots \int_{(\vec{\pi})} v(\vec{\pi}, t) \ln v(\vec{\pi}, t) d\vec{\pi}, \qquad (22)$$

то H – теорема Больцмана в данном случае обозначала бы что

$$\frac{dH_v}{dt} \ge 0, \qquad (23)$$

т. е. в утверждении, что на основании уравнения для $v(\vec{\pi}, t)$ энтропия распределения индивидуальных распределений всегда возрастает.

В данный момент точного ответа на этот вопрос нет. Больше того, из общих соображений следует, что таким свойством социум не обладает и энтропия в определенные промежутки времени может уменьшиться, то есть $v(\vec{\pi},t)$ может приближаться к сингулярному распределению, а социум при этом повышает свою самоорганизацию. Случай системы с убывающей энтропией, изолированной в материальном и энергетическом смысле будет рассмотрена в специальной статье.

С H – теоремой Больцмана в свое время были связаны два парадокса «парадокс обратимости» и «парадокс возврата». Последний связан с теоремой Пуанкаре о возвращении системы через достаточно большой промежуток времени в сколь угодно малую окрестность точки фазового пространства, которую она уже посетила ранее. В свою очередь эта теорема базируется на теореме Лиувилля о сохранении фазового объема консервативной системы.

Естественно говорить о «парадоксе возврата» в нашем случае невозможно, поскольку речь идет об открытой системе с несохраняющимся фазовым объемом, однако с сохраняющимся числом субъектов – «частиц»:

$$\int \ldots \int v(\vec{\pi},t)\, d\vec{\pi} = 1 \tag{24}$$

Из теоремы Пуанкаре следует, что имеют место очень редкие большие флутуации энтропии и время «цикла Пуанкаре» оценивается величиной $\tau = e^{M}$, где M – число частиц в системе.

В качественном смысле можно предполагать, что и в социальных процессах в больших социумах могут иметь место редкие большие флуктуации энтропии H_v и некоторое подобие «циклов Пуанкаре». Во всяком случае, нечто подобное в действительности наблюдается: социальные потрясения, революции, войны… и было бы весьма заманчивым выяснить возможность прогнозировать большие социальные флуктуации, глубинной причиной которых являются циклы типа Пуанкаре.

Следующее существенное отличие нашей системы от однокомпонентного газа состоит в том, что мы фактически имеем дело с многокомпонентным «газом», когда характеристикой индивидуума является его рейтинг.

В схеме, предложенной выше, функция плотности $v(\vec{\pi},t)$ зависит только от вектора $\vec{\pi}$, рейтинговые распределения существуют отдельно и остаются заданными.

Более общий вариант – рассмотрение функции $v\left(\pi_i;\xi(j|i)\right)$, где $\vec{\xi}(j|i)$ – рейтинговые предпочтения субъекта i в отношении членов группы j (социума). Данный субъект «i» имеет два типа предпочтений: предметные $\vec{\pi}_i$ и рейтинговые $\vec{\xi}(j|i)$.

При парных взаимодействиях субъекты формируют агрегированные предпочтения по формулам, показанным выше. Соответствующее «кинетическое уравнение» имеет вид:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},(\cdot)\vec{\xi}(\cdot|\cdot)\cdot t}{\partial t} + \dot{\vec{\pi}}\frac{(\cdot)\partial v}{\partial\vec{\pi}(\cdot)} + \dot{\vec{\xi}}(\cdot|\cdot)\frac{\partial v}{\partial \xi} = \\ = S\left(\vec{\pi}_1(\cdot),\vec{\pi}_2(\cdot),\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot)\xi_2(\cdot|\cdot)\right) \tag{25}$$

В частности, мы можем рассмотреть случай, когда v зависит от рейтинговых предпочтений и не зависит от предметных предпочтений, то есть

$$v = v(\vec{\xi}(\cdot|\cdot),t) .$$

«Кинетическое уравнение» в этом случае принимает вид:

$$\frac{\partial v(\vec{\xi}(\cdot|\cdot),t)}{\partial t} + \dot{\vec{\xi}}(\cdot|\cdot)\frac{\partial v}{\partial \xi(\cdot|\cdot)} = S\left(\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot),\vec{\xi}_2(\cdot|\cdot)\right) \tag{26}$$

Расшифровка столкновительного члена $S\left(\vec{\xi}_1(\cdot|\cdot),\vec{\xi}_2(\cdot|\cdot)\right)$ требует дополнительных гипотез.

Возможная схема агрегирования рейтинговых предпочтений такова: относительный рейтинг "j в глазах i" тем выше, чем ближе распределения их предметных предпочтений (два субъекта «единомышленники», если коэффициент кореляции $\rho(\pi_i,\pi_{vj})=1$ и наоборот, «разномышленники», если $\rho(\pi_i,\pi_j)=-1$). Положим, что если у изолированных субъектов распределение относительных рейтингов есть $\vec{\xi}(j|i)$, то распределение агрегированных рейтингов:

$$\xi^{(a)}(j|i) = \frac{\xi(j|i)\frac{1}{2}(1+\rho(i,j))}{\sum_{q=1}^{M}\xi(q|i)\frac{1}{2}(1+\rho(i,j))} . \tag{27}$$

Функция

$$\varphi(j|i) = \frac{1}{2}\left(1+\rho(i,j)\right) = \begin{cases} 1, if\ \rho(i,j)=1 \\ \in[0,1], if\ \rho(i,j)\in[-1,+1] \\ 0, if\ \rho(i,j)=-1 \end{cases} \tag{28}$$

Трудно представить себе, что субъект способен произвести вычисления в соответствии с формулой (27) и тем самым определить свое собственное распределение рейтингов между остальными членами группы, однако он попрежнему в состоянии дать нечеткую оценку систем «единомыслия» или «идейной конфронтации».

Другие схемы агрегирования приведены в [2]. Одна из них названная «схемой круговой поруки» приводит к абсолютному выравниванию рейтинговых предпочтений:

$$\xi(j|i) = \frac{1}{N}; \forall (i,j)\in\overline{1,M} \tag{29}$$

Это означает, что исчезает различие между относительными и абсолютными предпочтениями:

$$\xi(j|i) = \xi(j) = \frac{1}{N} \tag{30}$$

Вспомним, что в кинетической теории газов в качестве одной из самых простых моделей принимается кинетическое уравнение в приближении Греда:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\frac{\partial t}{\partial\vec{v}}+\vec{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}=\alpha(f^{*}-f)\,, \qquad (31)$$

где f^{*} – некоторая равновесная функция, к которой со временем стремится функция f.

Аналог этого приближения в нашем случае выглядит так, если предполагать, что $\vec{F}=0$:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},t)}{\partial t}+\dot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\vec{\pi}}=\alpha(v^{*}-v)\,. \qquad (32)$$

Предположим далее, что $\dot{\vec{\pi}}\equiv 0$, тогда имеем:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},t)}{\partial t}=\alpha(v^{*}-v)\,. \qquad (33)$$

Легко проверить, что решение этого уравнения есть:

$$v=(v_0-v^{*})e^{-\alpha t}+v^{*}\,, \qquad (34)$$

где v^{*} – некоторое «равновесное» распределение, независящее явно от *t*. Мы видим, что при $t\to\infty; v\to v^{*}$.

Рассмотрим вариант:

$$v(...)=v(\vec{\pi},\dot{\vec{\pi}},t)\,. \qquad (35)$$

Тогда аналог кинетического уравнения есть:

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\dot{\vec{\pi}}_2\frac{\partial v}{\vec{\pi}_1}+\ddot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\dot{\vec{\pi}}}=S(...)\,. \qquad (36)$$

В работе [9] было показано, что для смеси, состоящей из молекул двух типов сильно отличающимися массами, кинетическое уравнение для функции распределения «тяжелых» молекул можно приближенно представить уравнением, в котором больцмановский столкновительный член заменен оператором типа Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{v}\frac{\partial f}{\partial\vec{x}}+\vec{F}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}=\beta\frac{\partial}{\partial\vec{v}}\Big[(\vec{v}-\vec{u})f\Big]+\xi\frac{\partial^2 t}{\partial\vec{v}^2}\,, \qquad (37)$$

где $\vec{F}$ – внешняя сила, приложенная к тяжелой частице; $\beta=km^{-1}$; k – коэффициент стоксовского сопротивления частицы, ξ – коэффициент диффузии в пространстве скоростей. При получении уравнения (37) было сделано много предположений, большинство из которых не могут быть далее сформулированы и, тем более, обоснованы, когда речь идет о распределении предпочтений и в качестве переменных выступают предпочтения $\vec{\pi}$ и их скорости изменения $\dot{\vec{\pi}}$.

Тем не менее, можно представить себе, что предпочтения субъекта, имеющего высокий рейтинг («общественный вес») будут подвергаться флуктуациям под действием большого числа «соударный» с малыми «частицами» – субъектами со значительно меньшим весом – рейтингом. При этом может возникать явление флуктуаций предпочтений – нечто подобное броуновскому движению и, следовательно, фоккер-планковское приближение может служить моделью таких психических флуктаций, обусловленных взаимодействием с «несущей компонентой» (с «народом»). При этом базовым распределением предпочтений является каноническое распределение, которое получается на основе энтропийного вариационного принципа.

Приходится предположить, что предпочтения складываются из «консервативной» канонической составляющей и из ремнантной составляющей, которая не подчиняется вариационному принципу $\pi'(\sigma_i)$:

$$\pi'(\sigma_i)=\pi_o(\sigma_i)+\pi'(\sigma_i)\,. \qquad (38)$$

Пусть $\vec{C}_\pi=\frac{d\vec{\pi}}{dt}$; и пусть имеет место уравнение:

$$\frac{d\vec{C}_\pi}{dt}=-\beta\vec{C}_\pi+\vec{F}_\pi+\beta\vec{u} \qquad (39)$$

Рассмотрим следующее уравнение:

$$\frac{\partial v(\vec{\pi},\vec{C}_\pi,t)}{\partial t}+\dot{\vec{\pi}}\frac{\partial v}{\partial\vec{\pi}}+\vec{F}_\pi\frac{\partial v}{\partial\vec{C}_\pi}=\beta\frac{\partial}{\partial\vec{C}_\pi}\Big[(\vec{C}_\pi-\vec{u})\cdot v\Big]+\xi\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{C}_\pi^2}\,, \qquad (40)$$

где $\vec{u}$ – постоянный дрейф всех скоростей изменения предпочтений.

Рассмотрим случай $\vec{F}_\pi=const;\vec{u}=0.$

Формальное решение дополнительной системы Лагранжа имеет вид:

$$\vec{C}_\pi=\vec{C}_0\cdot e^{-\beta t}+\frac{1}{\beta}\vec{F}_\pi\cdot(1-e^{-\beta t})\,, \qquad (41)$$

$$\vec{\pi}=\vec{\pi}_0+\frac{1}{\beta}\vec{C}_0-\frac{1}{\beta}\vec{C}_\pi+\frac{1}{\beta}\cdot t\vec{F}_\pi\,. \qquad (42)$$

Перейдем к новым переменным – интегралам движения:

$$\vec{\rho}=\vec{C}_0=\vec{C}_\pi\cdot e^{\beta t}-\frac{1}{\beta}\vec{F}(e^{\beta t}-1):$$

$$\vec{\sigma}=\vec{\pi}_0+\frac{1}{\beta}\vec{C}_0=\vec{\pi}+\frac{1}{\beta}\vec{C}-\frac{1}{\beta}\vec{F}:. \qquad (43)$$

$$t^{*}=t$$

В новых переменных уравнение (40) выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial v}{\partial t}-3\beta v-\xi\left(\frac{1}{\beta}\right)^2\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{\sigma}^2}-2\frac{\xi}{\beta}e^{\beta t}\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{\sigma}\partial\vec{\rho}}-\xi e^{\beta t}\frac{\partial^2 v}{\partial\vec{\rho}^2}=0\cdot \qquad (44)$$

Новая подстановка : $W=v\cdot\exp(-3\rho t)$ приводит это уравнение к виду:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=\xi\left\{e^{2\beta t}\frac{\partial^2 W}{\partial\vec{p}^{\,2}}+\frac{2}{\beta}\cdot e^{\beta t}\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial\vec{\sigma}\partial\vec{p}}+\frac{1}{\beta^2}\cdot\frac{\partial^3 W}{\partial\vec{\sigma}^{\,2}}\right\} \qquad (45)$$

3. 3. Случай Чандрасекхара

К этому уравнению применима вторая лемма Чандрасекхара [10]. Используя эту лемму, найдем решение типа мгновенного источника при *t=0* в точке $(\vec{\rho}_0,\vec{\sigma}_0)$. Если $\vec{\pi}$ имеет 3 компонента $\left(\pi(\sigma_1),\pi(\sigma_2),\pi(\sigma_3)\right)$,

то:

$$v(\vec{\pi},t)=\frac{1}{8\pi^3\Delta^{\frac{3}{2}}}\times$$
$$\times\exp\left\{-\frac{a(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)^2+2h(\vec{\rho}-\vec{\rho}_0)(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}_0)+8(\vec{\sigma}-\vec{\sigma}_0)^2}{2\Delta}+3\beta t\right\}, \qquad (46)$$

$$\Delta = 2\xi^2\beta^{-3}t(e^{2\beta t}-1)-4\xi^2\beta^{-4}(e^{2\beta t}-2e^{\beta t}+1);$$

где: $a = 2\xi\beta^{-2}t; b = \xi\beta^{-1}(e^{2\beta t}-1);$

$$h = 2\xi\beta^{-2}(e^{\beta t}-1).$$

Асимптотическая формула при $t \to \infty$ имеет вид:

$$v_{h\to\infty} = \frac{1}{8\pi^3\cdot(2\xi^2\beta^{-3}t)^{\frac{3}{2}}}\cdot \exp\left\{-\left[\vec{c}_\pi + \beta^{-2}\vec{F}^2 - (\frac{\xi}{2}\beta\vec{c}_\pi + \frac{1}{2}\vec{\pi} - \frac{1}{2}\vec{\pi}_0 - \frac{1}{2\beta}\vec{c}_0)\vec{F}\right]\cdot(2\xi\beta^{-1})^{-1}\right\} \quad (47)$$

4. Выводы

В настоящей работе по существу только ставится задача построения теории социодинамики по аналогии с кинетической теорией газов. Как показано, полная аналогия отсутствует, и трудности сводятся к учету ряда существенных различий и особенностей, отмеченных ранее.

Очевидно также, что избранный путь может быть весьма продуктивным. Вцелом развиваемая модель является гибридной, так как она использует идеи статистической механики, в частности, уравнения типа Больцмана и энтропийный принцип оптимальности Джейнса, примененный к распределениям предпочтений первого и второго рода.

Существует большое количество других моделей, в частности, моделей, представленных в работе [11], где автор также вводит в рассмотрение «мнения» и «предпочтения», а также скорости их изменения, связанные с полезностями.

Предлагаемый в настоящей работе подход к построению моделей социодинамики имеет существленные отличия и может рассматриваться как альтернативный.
На этом пути важнейшей задачей является построение моделей информационного и ресурсного взаимодействия субъектов, парного и коллективного.

Литература

1. Касьянов, В. А. Элементы субъективного анализа [Текст] / В. А. Касьянов. – К.: НАУ, 2003 – 224 с.

2. Касьянов, В. А. Субъективный анализ [Текст] / В. А. Касьянов. – К.: НАУ, 2007 – 512 с.

3. Касьянов, В. Субъективный анализ и безопасность активных систем [Текст] / В. Касьянов, А. Гончаренко // Кибернетика и вычислительная техника ПК НАНУ. – 2004. – Вып. 142. – С. 41-56.

4. Jaynes, E. Information theory and statistical mechanics I [Text] / E. Jaynes // Phys. Rev. – 1957. – № 2.

5. Jaynes, E. Information theory and statistical mechanics II [Text] / E. Jaynes // Phys. Rev. – 1957. – № 4.

6. Нейман, Дж. Теория игр и экономическое поведение [Текст] / Дж. Нейман, О. Моргенштерн. – М.: Наука, 1970. – 707 с.

7. Де Гроот, М. Оптимальные статистические решения [Текст] / М. Де Гроот. – М.: Мир, 1974. – 491 с.

8. Фишберн, П. Теория полезности для принятия решений [Текст] / П. Фишберн. – М.: Наука, 1978. – 351 с.

9. Касьянов, В. По поводу приближенного представления интеграла столкновений Больцмана оператором типа Фоккера-Планка [Текст] / В. Касьянов // Украинский физический журнал. – 1969. –Т. 14, Вып. 5.

10. Чандрасекхар, С. Ш. Принципы звездной динамики [Текст] / С. Чандрасекхар. – М., 1947 г.

11. Вайдлих, В. Социодинамика: системный подход к математическому моделированию в социальных науках [Текст] / В. Вайдлих. – М.: Эдиториал УРСС, 2005. – 480 с.

12. Левич, А. П. Теория множеств, язык теории категорий и их применение в теоретической биологии [Текст] / А. Левич. – М.: МГУ, 1981. – 189 с.

References

1. Kas'janov, V. A. (2003). Jelementy sub’ektivnogo analiza. Kiev NAU, 224.

2. Kas'janov, V. A. (2007). Sub’ektivnyj analiz. Kiev NAU, 512.

3. Kas'janov, V. A., Goncharenko, A. V. (2004). Sub’ektivnyj analiz i bezopasnost' aktivnyh sistem. Kibernetika i vychislitel'naja tehnika PK NANU, 142, 41–56.

4. Jaynes, E. (1957). Information theory and statistical mechanics I. Phys. Rev. 2.

5. Jaynes, E. (1957). Information theory and statistical mechanics I I. Phys. Rev. 4.

6. Nejman, Dzh., Morgenshtern, O. (1970). Teorija igr i ekonomicheskoe povedenie. Moscow Nauka, 707.

7. De Groot, M. (1974). Optimalnyie statisticheskie resheniya. Moscow World, 491.

8. Fishbern, P. (1978) Teorija poleznosti dlja prinjatija reshenij. Moscow Nauka, 351.

9. Kas'janov, V. A. (1969). Po povodu priblizhennogo predstavlenija integrala stolknovenij Bol'cmana operatorom tipa Fokkera-Planka. Kiev Ukrainskiy fizicheskiy zhurnal, 14/5.

10. Chandrasekhar, S. Sh. (1947). Principy zvezdnoj dinamiki, Moscow.

11. Vajdlih, V. (2005). Sociodinamika: sistemnyj podhod k matematicheskomu modelirovaniju v social'nyh naukah. Moscow Editorial URSS,480.

12. Levich, A. P. (1981). Teorija mnozhestv, jazyk teorii kategorij i ih primenenie v teoreticheskoj biologii. Moscow MGU, 189

Касьянов Владимир Александрович, доктор технических наук, профессор, кафедра механики
Национальный авиационный университет, пр. космонавта Комарова, 1, г. Киев, Украина, 03058
E-mail: vakasyanov@mail.ru