ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 517.951
DOI: 10.15587/2313-8416.2014.27535

ПОСТРОЕНИЕ ТРАНСЛЯЦИОННЫХ МАТРИЦ ДЛЯ НЕОДНОРОДНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

© Л. Б. Лерман, Л. В. Породько

На примере уравнения Пуассона в сферических координатах излагается алгоритм построения трансляционных матриц для неоднородных дифференциальных операторов. С их помощью получены расчетные формулы для нахождения неизвестных полей в отдельных слоях многослойного шара и окружающей среде. Этот метод позволяет переносить условия совместности со слоя на слой, исключая ненужные произвольные постоянные без решения дополнительных алгебраических систем достаточно высокого порядка.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения, трансляционные матрицы, уравнение Пуассона, разделение переменных, слоистый шар.

The constructing algorithm of transfer matrice for nonhomogeneous differential operators on example of Poisson equation in spherical coordinates is presented. The calculating formulas to finding of unknown fields in separate slabs of laminated sphere are obtained. This method allows to transfer the compatibility conditions with layer upon layer, eliminating unnecessary arbitrary constants without additional solutions of algebraic systems of high order sufficiently.
Keywords: differential equations, transfer matrices, Poisson equation, variables separation, laminated sphere.

1. Введение

При рассмотрении слоисто-неоднородных объектов, таких как, многослойные покрытия твердого тела, слоистые цилиндры, шары и эллипсоиды, когда физические характеристики слоев зависят от одной пространственной координаты, удобным аппаратом является аппарат трансляционных матриц (ТМ). Такой аппарат оказывается чрезвычайно удобным, особенно в тех задач, когда исследователя интересует только отклик объекта на внешнее возмущение. Метод позволяет переносить условия совместности со слоя на слой, исключая ненужные произвольные постоянные без решения дополнительных алгебраических систем достаточно высокого порядка.

Построенные к настоящему времени ТМ соответствуют однородным дифференциальным операторам, т. е. предполагается, что источники в слоях отсутствуют. При наличии источников задача усложняется, и к настоящему времени такие матрицы, по-видимому, не построены. Предлагаемая работа посвящена ликвидации этого упущения. Задача решается на примере достаточно простого уравнения Пуассона, но разработанный алгоритм легко переносится и на другие, более сложные линейные дифференциальные операторы.

2. Постановка проблемы

Рассмотрим шар (рис. 1), состоящий из n концентрических слоев, внешние радиусы которых обозначим через r_j (j − номер слоя и $j = 1,2,...,n$). Для внешнего радиуса шара также используется обозначение $a = r_n$. Нумерация слоев начинается от центра, т. е. для ядра шара $j = 1$, а для внешней среды $j = n+1$. Слои характеризуются разными физическими характеристиками: коэффициентами теплопроводности λ_j, удельными теплоемкостями $c_{p,j}$, плотностями ρ_j. Характеристики внешней среды обозначаются через $\lambda_m = \lambda_{n+1}$, $c_{p,m} = c_{p,n+1}$, $\rho_m = \rho_{n+1}$, $\varepsilon_m = \varepsilon_{n+1}$. Задачу будем решать в сферических координатах r, θ, φ, связанных с центром шара.

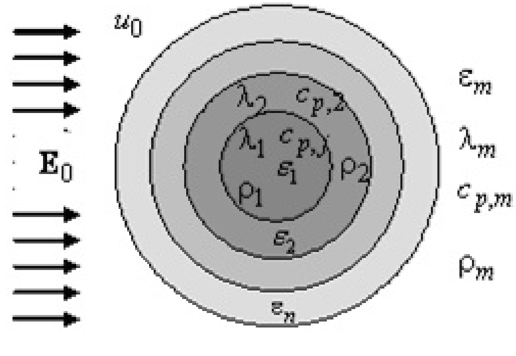

Рис. 1. Расчетная схема слоистого шара

Распределение температурных полей $u_j = T_j = T_j(r,\theta,\varphi)$, $j = 1,2,...,n$ при наличии внутренних источников в каждом j- м слое шара описывается уравнением Пуассона $\Delta_r T_j + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} T_j = \frac{1}{\lambda j} f_j(r,\theta,\varphi)$,

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}), \qquad \Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}, \tag{1}$$

где $f_j(r,\theta,\varphi)$ − функция внутренних источников.

Считается, что шар размещен в среде без источников. На поверхностях раздела слоев $r = r_j$ и на внешней поверхности $r = r_j = a$ примем условия идеального теплового контакта

$$T_j = T_{j+1}, \ \ \lambda_j \frac{\partial}{\partial r} T_j = \lambda_{j+1}\frac{\partial}{\partial r} T_{j+1}, \qquad j = 1,2,...,n. \tag{2}$$

Температура внешней среды $T_{med} = T_{n+1}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta_r T_{med} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\theta,\varphi} T_{med} = 0. \tag{3}$$

К условиям (2) добавляются условия ограниченности решений в начале координат и на бесконечности: должно быть

$$\text{при } r \to 0 \ \ T = T_1 < \infty, \text{ при } \mathrm{r} \to \infty \ \ T_{med} < \infty. \tag{4}$$

Решения и правые части представляются в виде разложений по сферическим функциям $Y_{lm}(\theta,\varphi)$ $u_j(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} R_{lm}^{(j)}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)$, $\qquad f_j(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n} f_{lm}^{(j)}(r) Y_{lm}(\theta,\varphi)$.

Функции $f_{lm}^{(j)}(r)$ известны, как коэффициенты разложений заданных функций f_j, а функции $R_{lm}^{(j)}(r)$ необходимо определить. Разделение переменных обеспечивает соотношение $\Delta_{\theta,\varphi} Y_{lm} = -l(l+1)Y_{lm}$. В результате получим семейство независимых обыкновенных неоднородных дифференциальных уравнений (для внешней среды $f_{lm}^{(n+1)} = 0$)

$$\frac{dR_{lm}^{(j)}}{dr}(r^2\frac{dR_{lm}^{(j)}}{dr}) - l(l+1)r^2 R_{lm}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_j} r^2 f_{lm}^{(j)}(r). \tag{5}$$

Выпишем решения однородных уравнений (1), (3)

$$u_j(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{lm}^{(j)}\left(r/a\right)^l + D_{lm}^{(j)}\left(a/r\right)^{l+1}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ \ j = 2,3,...,n-1. \tag{6}$$

Для ядра шара следует принять $D_{lm}^{(1)} = 0$, а для окружающей среды при $r > r_n = a$ будет $C_{lm}^{(n+1)} = 0$:

$$u_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[C_{lm}^{(1)}\left(r/a\right)^l\right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ \ 0 < r < r_1, \tag{7}$$

$$u_{n+1}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}\left[D_{lm}^{(n+1)}\left(a/r\right)^{l+1}\right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ \ r_{n1} < r < \infty. \tag{8}$$

Далее находим частные решения $v_{lm}^{(j)}(r)$ неоднородных уравнений (1). При их построении для функций источников $f_{lm}(r)$ следует различать два случая: $l = m = 0$ и случаи, когда один из индексов или оба отличны от нуля. В первом случае имеем радиальную симметрию и уравнение

$$\frac{\partial v_{00}^{(1)}}{\partial r}(r^2\frac{\partial v_{00}^{(1)}}{\partial r}) = \frac{1}{\lambda_1} r^2 f_{00}^{(1)}(r), \ \ 0 < r < r_1. \tag{9}$$

Частные решения находятся повторным интегрированием

$$\frac{dv_{00}^{(j)}}{dr} = \frac{1}{\lambda_j}\frac{1}{r^2}\int r^2 f_{00}^{(j)}(r)]dr, \quad v_{00}^{(j)}(r) = \frac{1}{\lambda_j}\int\frac{1}{r^2}dr\int r^2 f_{00}^{(j)}(r)dr. \tag{10}$$

В остальных случаях имеем линейные неоднородные уравнения второго порядка

$$r^2 \frac{d^2 v_{lm}^{(j)}}{dr^2} + 2r \frac{dv_{lm}^{(j)}}{dr} - l(l+1) r^2 v_{lm}^{(j)} = \frac{1}{\lambda_j} r^2 f_{lm}^{(j)}(r) , \tag{11}$$

и частные решения можно найти, например, методом вариации произвольных постоянных, исходя из решений однородных уравнений $C_{lm}^{(j)} \left(r/a \right)^l + D_{lm}^{(j)} \left(a/r \right)^{l+1}$.

Общие решения неоднородных уравнений запишутся в виде

$$u_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[C_{lm}^{(1)} \left(r/a \right)^l + v_{lm}^{(1)} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ 0 < r < r_1 , \tag{12}$$

$$u_j(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[C_{lm}^{(j)} \left(r/a \right)^l + D_{lm}^{(j)} \left(a/r \right)^{l+1} + v_{lm}^{(j)} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ r_{j-1} < r < r_j , \ j = 2,3,...,n , \tag{13}$$

$$u_{n+1}(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[D_{lm}^{(n+1)} \left(a/r \right)^{l+1} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ r_n < r < \infty . \tag{14}$$

Выпишем частные производные решений по r , которые необходимы при записи граничных условий

$$\frac{\partial}{\partial r} u_1(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[\frac{l}{a} C_{lm}^{(1)} \left(r/a \right)^{l-1} + \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(1)} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ 0 < r < r_1 , \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_j(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[\frac{l}{a} C_{lm}^{(j)} \left(r/a \right)^{l-1} - \frac{l+1}{a} D_{lm}^{(j)} \left(a/r \right)^{l+2} + \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(j)} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), r_{j-1} < r < r_j , \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} u_{n+1}(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{a} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-n}^{n} \left[(l+1) D_{lm}^{(n+1)} \left(a/r \right)^{l+2} \right] Y_{lm}(\theta,\varphi), \ r_n < r < \infty . \tag{17}$$

Задача состоит в определении неизвестных коэффициентов из граничных условий: для нахождения ($2n-2$) произвольных постоянных будем иметь ($2n-2$) алгебраических линейных уравнений. Для уменьшения порядка системы будем использовать трансляционные матрицы.

3. Литературный обзор

Как отмечалось во введении, построенные к настоящему времени ТМ соответствуют однородным дифференциальным операторам. Впервые этот метод ввел в рассмотрение Абель [1] при рассмотрении прохождения света через слоистые среды, и к настоящему времени метод получил широкое распространение в научно-исследовательской практике [2–5]. Работы с участием авторов [6–10], в которых рассмотрены операторы Лапласа и Гельгольца в задачах электростатики и электродинамики, а также плоской теории упругости, свидетельствуют о больших возможностях применения метода ТМ при рассмотрении различных прикладных задач. Вместе с тем, на практике приходится рассматривать слоистые объекты с внутренними источниками, как, например, при исследовании воздействия лазерного излучения на слоистые сферические наночастицы [10] или облучении многослойных нанопокрытий твердого тела. В этом случае построение ТМ значительно усложняется и требует дополнительных исследований.

4. Трансляционные матрицы для уравнения Пуассона

Из условий сопряжения (2) для каждого члена разложений получаем системы

$$C_{lm}^{(1)} \left(r_1/a \right)^l + v_{lm}^{(1)}(r_1) = C_{lm}^{(2)} \left(r_1/a \right)^l + D_{lm}^{(2)} \left(a/r_1 \right)^{l+1} + v_{lm}^{(2)}(r_1) ,$$

$$\left[(\lambda_1 l) C_{lm}^{(1)} \left(r_1/a \right)^{l-1} + a\lambda_1 \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(1)}(r_1) \right] = \left[(\lambda_2 l) C_{lm}^{(2)} \left(r_1/a \right)^{l-1} - \lambda_2 (l+1) D_{lm}^{(2)} \left(a/r_1 \right)^{l+2} + a\lambda_2 \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(2)}(r_1) \right],$$

$$C_{lm}^{(2)} \left(r_2/a \right)^l + D_{lm}^{(2)} \left(a/r_2 \right)^{l+1} + v_{lm}^{(2)}(r_2) = C_{lm}^{(3)} \left(r_2/a \right)^l + D_{lm}^{(3)} \left(a/r_2 \right)^{l+1} + v_{lm}^{(3)}(r_2) ,$$

$$\lambda_2 l C_{lm}^{(2)} \left(r_1/a \right)^{l-1} - \lambda_2 (l+1) D_{lm}^{(2)} \left(a/r_2 \right)^{l+2} + a\lambda_2 \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(2)}(r_2) =$$

$$= (l\lambda_3) C_{lm}^{(3)} \left(r_2/a \right)^{l-1} - \lambda_2 (l+1) D_{lm}^{(2)} \left(a/r_2 \right)^{l+2} + a\lambda_3 \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(3)}(r_2) ,$$

…………………………………………………………………………………….

$$\lambda_j l C_{lm}^{(j)} \left(r_j/a \right)^{l-1} - \lambda_j (l+1) D_{lm}^{(j)} \left(a/r_j \right)^{l+2} + a\lambda_j \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(j)}(r_j) =$$

$$= (l\lambda_{j+1}) C_{lm}^{(j+1)} \left(r_{j+1}/a \right)^{l-1} - \lambda_{j+1} (l+1) D_{lm}^{(j+1)} \left(a/r_{j+1} \right)^{l+2} + a\lambda_{j+1} \frac{\partial}{\partial r} v_{lm}^{(3)}(r_{j+1}) ,$$

……………………………………………………………………………………

$$C_{lm}^{(n)} + D_{lm}^{(n)} + v_{lm}^{(n)}(r_n) = D_{lm}^{(n+1)} ,$$

$$\lambda_n\left[lC_{lm}^{(n)}-(l+1)D_{lm}^{(n)}+a\frac{\partial}{\partial r}v_{lm}^{(n)}(r_n)\right]=-\lambda_{n+1}(l+1)D_{lm}^{(n+1)}.$$

Введем в рассмотрение матрицы $S_{l,j}^{(0)}$, $S_{l,j}^{(1)}$, независящие от индекса m

$$S_{l,j}^{(0)}=\begin{bmatrix}\left(\frac{r_j}{a}\right)^{l} & \left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+1}\\ \lambda_j l\left(\frac{r_j}{a}\right)^{l-1} & -\lambda_j(l+1)\left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+2}\end{bmatrix},\ S_{l,j}^{(1)}=\begin{bmatrix}\left(\frac{r_j}{a}\right)^{l} & \left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+1}\\ \lambda_{j+1} l\left(\frac{r_j}{a}\right)^{l-1} & -\lambda_{j+1}(l+1)\left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+2}\end{bmatrix},\tag{18}$$

векторы произвольных постоянных $\gamma_{lm}^{(j)}$ и частных решений $q_{lm}^{(j)}$

$$\gamma_{lm}^{(j)}=\begin{bmatrix}C_{lm}^{(j)}\\ D_{lm}^{(j)}\end{bmatrix},\qquad q_{lm}^{(j)}=\begin{bmatrix}q_{11,lm}^{(j)}\\ q_{21,lm}^{(j)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}v_{lm}^{(j)}(r_j)\\ (a\lambda_j)v_{lm}^{(j)}(r_j)\end{bmatrix}.\tag{19}$$

Запишем условия сопряжения в матричном виде

$$S_{l.j-1}^{(0)}\gamma_{lm}^{(j-1)}+q_{lm}^{(j-1)}=S_{l,j}^{(1)}\gamma_{lm}^{(j)}+q_{lm}^{(j)},\ j=2,3,\dots,n.\tag{20}$$

По аналогии с однородными задачами [6-10] введем в рассмотрение матрицы $T_{l,j}$, связывающие произвольные постоянные граничащих слоев при переходе через j - ю поверхность раздела

$$T_{l,j}=\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}S_{l,j}^{(0)},\tag{21}$$

где обратные матрицы и матрицы $T_{l,j}$ имеют вид

$$\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}=\begin{bmatrix}s_{11,l}^{(j)} & s_{12,l}^{(j)}\\ s_{21,l}^{(j)} & s_{11,l}^{(j)}\end{bmatrix}=\frac{1}{\Delta_l}\begin{bmatrix}-\lambda_{j+1}(l+1)\left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+2} & \lambda_{j+1}l\left(\frac{r_j}{a}\right)^{l-1}\\ \left(\frac{a}{r_j}\right)^{l+1} & \left(\frac{r_j}{a}\right)^{l}\end{bmatrix},\tag{22}$$

$$\Delta_l^{(j)}=-\lambda_{j+1}(2l+1)(a/r_j)^2,$$

$$T_l^{(j)}=\begin{bmatrix}t_{11,l}^{(j)} & t_{12,l}^{(j)}\\ t_{21,l}^{(j)} & t_{22,l}^{(j)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\lambda_{j+1}(l+1)(a/r_j)^2+(a/r_j)^{2l+2} & \lambda_{j+1}l(r_j/a)^{2l-1}+(a/r_j)\\ -\lambda_j(l+1)\left[\lambda_{j+1}l(a/r_j)^3+(a/r_j)^3\right] & \lambda_j\lambda_{j+1}l^2(r_j/a)^{2l-2}-\lambda_j(l+1)(a/r)^2\end{bmatrix}.\tag{23}$$

Тогда связь между постоянными соседних слоев дается формулой

$$\gamma_{lm}^{(j+1)}=\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}S_{l,j}^{(0)}\gamma_{lm}^{(j)}+\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j)}-q_{lm}^{(j+1)}\right]=T_l^{(j)}\gamma_{lm}^{(j)}+\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j)}-q_{lm}^{(j+1)}\right].\tag{24}$$

Полагая в (24) $j=j+1$, получим

$$\gamma_{lm}^{(j+2)}=\left\{T_l(r_j,r_{j+1})\gamma_{lm}^{(j)}+T_l^{(j+1)}\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j)}-q_{lm}^{(j+1)}\right]\right\}+\left[S_{l,j+1}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j+1)}-q_{lm}^{(j+2)}\right],\tag{25}$$

а при использовании соответствующего выражения для $\gamma_{lm}^{(j)}$ будет

$$\gamma_{lm}^{(j+2)}=T_l(r_j,r_{j+1})\gamma_{lm}^{(j)}+\left\{T_l^{(j+1)}\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j)}-q_{lm}^{(j+1)}+\left[S_{l,j+1}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j+1)}-q_{lm}^{(j+2)}\right]\right]\right\},\tag{26}$$

где $T_l(r_j,r_{j+1})=T_{l,j+1}\cdot T_{l,j}$ – матрица перехода от j -й к ($j+1$)-й поверхности раздела.

Повторяя эту процедуру, при переходе от 1-й к n -й поверхности раздела будем иметь

$$\gamma_{lm}^{(n)}=T_l(r_n,r_1)\gamma_{lm}^{(1)}+Q_{lm},\tag{27}$$

где

$$T_l(r_n,r_1)=\prod_{j=1}^{n-1}T_l^{(n-j)}=\begin{bmatrix}t_{11}^{(l)} & t_{12}^{(l)}\\ t_{21}^{(l)} & t_{22}^{(l)}\end{bmatrix},\ Q_{lm}=\sum_{j=1}^{n-1}\left[S_{l,j}^{(1)}\right]^{-1}\left[q_{lm}^{(j)}-q_{lm}^{(j+1)}\right],\tag{28}$$

$$Q_{lm}=\begin{bmatrix} q_{lm,1} \\ q_{lm,2} \end{bmatrix}=\sum_{j=1}^{n-1}\begin{bmatrix} s_{11,l}^{(j)}\left[v_{lm}^{(j)}(r_j)-v_{lm}^{(j+1)}(r_{j+1})\right]+s_{21,l}^{(j)}\left[(a\lambda_{j+1})v_{lm}^{(j+1)}(r_{j+1})\right] \\ s_{21,l}^{(j)}\left[v_{lm}^{(j)}(r_j)-v_{lm}^{(j+1)}(r_{j+1})\right]+s_{22,l}^{(j)}\left[(a\lambda_j)v_{lm}^{(j)}(r_j)-(a\lambda_{j+1})v_{lm}^{(j+1)}(r_{j+1})\right] \end{bmatrix}. \quad (29)$$

Так как $\gamma_{lm}^{(1)}=\left[C_{lm}^{(1)},0\right]^T$, то все произвольные постоянные выражаются через постоянную $A_{lm}^{(1)}$. В частности, для последнего слоя будем иметь

$$\begin{bmatrix} C_{lm}^{(n)} \\ D_{lm}^{(n)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} t_{11,l}C_{lm}^{(1)}+q_{lm,1} \\ t_{21,l}C_{lm}^{(1)}+q_{lm,2} \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Таким образом, трансляционные матрицы $T_l(r_n,r_1)$ для уравнения Пуассона построены. Ее элементы находятся при перемножении матриц перехода и суммировании частных решений по формулам (28). Имея выражение (30) и условия совместности на внешней поверхности шара, получаем систему для нахождения неизвестных постоянных.

5. Апробация результатов исследований

Запишем граничные условия на поверхности шара при $r_n=a$

$$C_{lm}^{(1)}\left[t_{11}^{(l)}+t_{21}^{(l)}\right]+q_{lm,1}+q_{lm,2}+v_{lm}^{(n)}(r_n)=C_{lm}^{(n+1)}, \quad (31)$$

$$C_{lm}^{(1)}\lambda_n\left[lt_{11}^{(l)}-(l+1)t_{21}^{(l)}\right]+\lambda_n\left[lq_{lm,1}^{(1)}-(l+1)q_{lm}^{(l)}\right]+\lambda_n a\frac{\partial}{\partial r}v_{lm}^{(n)}(r_n)=-\lambda_{n+1}(l+1)D_{lm}^{(n+1)}. \quad (32)$$

Из системы (31), (32) находим

$$C_{lm}^{(1)}=\frac{-\lambda_n\left[lq_{lm,1}^{(l)}-(l+1)q_{lm,2}^{(l)}\right]-\lambda_n a\frac{\partial}{\partial r}v_{lm}^{(n)}(r_n)}{\left\langle\lambda_n\left[lt_{11}^{(l)}-(l+1)t_{21}^{(l)}\right]+\lambda_{n+1}(l+1)\left\{\left[t_{11}^{(l)}+t_{21}^{(l)}\right]+q_{lm,1}^{(l)}+q_{lm,2}^{(l)}+v_{lm}^{(n)}(r_n)\right\}\right\rangle}, \quad (33)$$

$$D_{lm}^{(n+1)}=\frac{-\left\{\lambda_n\left[lq_{lm,1}^{(l)}-(l+1)q_{lm,2}^{(l)}\right]+\lambda_n a\frac{\partial}{\partial r}v_{lm}^{(n)}(r_n)\right\}\left[t_{11}^{(l)}+t_{21}^{(l)}\right]}{\left\langle\lambda_n\left[lt_{11}^{(l)}-(l+1)t_{21}^{(l)}\right]+\lambda_{n+1}(l+1)\left\{\left[t_{11}^{(l)}+t_{21}^{(l)}\right]+q_{lm,1}^{(l)}+q_{lm,2}^{(l)}+v_{lm}^{(n)}(r_n)\right\}\right\rangle}+q_{lm,1}^{(l)}+q_{lm,2}^{(l)}+v_{lm}^{(n)}(r_n). \quad (34)$$

Теперь нетрудно найти все произвольные постоянные для каждого слоя, выражая их с помощью матриц перехода через постоянные $C_{lm}^{(1)}$, $D_{lm}^{(n+1)}$, после чего остается просуммировать ряды (12)–(14).

6. Выводы

В заключение следует отметить, что разработанная методика построения трансляционных матриц легко алгоритмизуется и программируется. Для построения частных решений в слоях можно использовать стандартные программы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений. Заметим, что задача существенно упрощается, когда источники определяются однонаправленным электрическим полем. В этом случае, как показано в [10], разложение функции источников будет содержать всего два члена, и соответственно столько же членов останется и в представлении решений.

Литература

1. Борн, М. Основы оптики [Текст] / М. Борн, Э. Вольф. – М.: Наука, 1970. – 856 с.

2. He, B. Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System [Text] / He, B., X. Rui, H. Zhang // Mathematical Problems in Engineering. − 2012. – P. 1–19. doi:10.1155/2012/393204

3. Moroz, A. A recursive transfer-matrix solution for a dipole radiating and outside a stratified sphere [Text] / A. Moroz // Annals of Physics. – 2005. – Vol. 315, Issue 2. – P. 352–418. doi:10.1016/j.aop.2004.07.002

4. Wu, Z. S. Electromagnetic scattering for multi-layered sphere: recursive algorithm [Text] / Z. S. Wu, Y. P. Wang // Radio Sci. – 1991. – Vol. 26, Issue 6. – P. 1393–1401. doi:10.1029/91rs01192

5. Gurwich, I. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure [Text] / I. Gurwich, M. Kleiman, N. Shiloah and other //Applied optics. –2000. – Vol. 39, Issue 3. – P. 470–477.

6. Гречко, Л. Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатошаровій кулі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. – 2004. – № 3. – С. 376–384.

7. Гречко, Л. Г. Багатошаровий еліпсоїд в електричному полі [Text] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода [Текст] // Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2004. – № 1. – С. 386–394.

8. Лерман, Л. Б. Применение уравнений плоской задачи теории упругости к исследованию колебаний протяженных слоистых плит с внутренними линейными опорами [Текст] / Л. Б. Лерман // Прикл. механика, 1994. – Т. 30, № 6. – С. 66–69.

9. Гречко, Л. Г. Поверхневі моди в багатошарових частинках еліпсоїдальної форми [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Л. М. Білокриницька та ін. // Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: Фіз.-мат. науки. – 2006. – № 4. – С. 416–425.

10. Породько, Л. В. Электродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах [Текст] / Л. В. Породько, Л. Б. Лерман // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – Т. 6, № 1 (14). – С. 41–44.

References

1. Born, M., Wolf, E. (1999). Principles of Optics: 7th Edition. Cambridge University Press, 987.
2. He, B., Rui, X., Zhang, H. (2012). Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System. Mathematical Problems in Engineering, 1–19. doi:10.1155/2012/393204
3. Moroz, A. (2005). A recursive transfer-matrix solution for a dipole radiating inside and outside a stratified sphere. Annals of Physics, 315 (2), 352–418. doi:10.1016/j.aop.2004.07.002
4. Wu, Z. S., Wang, Y. P. (1991). Electromagnetic scattering for multilayered sphere: Recursive algorithms. Radio Science, 26 (6), 1393–1401. doi:10.1029/91rs01192
5. Gurwich, I., Kleiman, M., Shiloah, N., Cohen, A. (2000). Scattering of Electromagnetic Radiation by Multilayered Spheroidal Particles: Recursive Procedure. Appl. Opt., 39 (3), 470–477.. doi:10.1364/ao.39.000470
6. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Scattering of electromagnetic waves on multilayered sphere. Bulletin of Kyiv University. Series: Physics & Mathematics, 3, 376–384.
7. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Multi-layered ellipsoid in electric field. Bulletin of Kyiv University. Series: Physics & Mathematics, 1, 386–394.
8. Lerman, L. B. (1994). Oscillation of flat layered shells with local elastic supports. Int. Appl. Mech, 30 (2), 129−134.
9. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Bilokrinizna, L. M. (2006). Surfaces modes in ellipsoidal multi-layered small particles. Bulletin of Kyiv University. Series: Physics & Mathematics, 4, 416–425.
10. Porodko, L. V., Lerman, L. B. (2013). Electrodynamic energy in layered spherical nanoparticles. Technology audit and production reserves, 1 (14), 41–44.

Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Розенбаум В. М.
Дата надходження рукопису 11.09.2014

Лерман Леонид Борисович, кандидат технических наук, с. н. с., Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко НАН Украины, ул. Генерала Наумова, 17, г. Киев, Украина, 03164
e-mail: llerman@yandex.ru

Породько Лилия Владимировна, аспирант, Институт химии поверхности им. А. А. Чуйко НАН Украины, ул. Генерала Наумова, 17, г. Киев, Украина, 03164
e-mail: lilphys@mail.ru

УДК 519.711
DOI: 10.15587/2313-8416.2014.27392

АДАПТИВНАЯ СИСТЕМА КЛАССИФИКАТОРОВ МГУА

© Н. В. Кондрашова, Ал. В. Павлов, Ан. В. Павлов, В. А. Павлов

Показано, что модели самоорганизации, построенные обобщенным релаксационным итерационным алгоритмом (ОРИА), являются наиболее точными при проверке классификаторов на новых данных. Максимальная точность классификации зависит от целевой выборки, вида модели и внешнего критерия МГУА и состава системы классификаторов. Известный многорядный алгоритм с комбинаторной селекцией обобщенных переменных (МАКСО), имеет более гибкую настройку точности на рабочей выборке по сравнению с ОРИА, но гораздо меньшее быстродействие при решении задачи классификации.
Ключевые слова: обобщенный релаксационный итерационный алгоритм (ОРИА), многорядный алгоритм с комбинаторной селекцией обобщенных переменных (МАКСО).

It is shown that the self-organization models, built by Generalized Relaxation Iterative Algorithm (GRIA), are the most accurate when examining the classifiers on new data. The maximum classification accuracy depends on the target sample, the type of model and external criterion of GMDH and classifiers system. Known Multilayer Algorithm with Combinatorial Selection of Variables (MACSoV) has more flexible accuracy adjustment on different parts of sample compared with GRIA, but much lower speed operation in solving the classification problem.
Keywords: generalized relaxation iterative algorithm (GRIA), multilayer algorithm with combinatorial selection of variables (MACSoV).

1. Введение

Самоорганизация регрессионных моделей или метод группового учета аргументов (МГУА) в бóльшей степени относится к детерминированным методам. Входные и выходные данные, как правило, представляют собой зашумленные, непрерывные переменные, представленные дискретно. Наличие помехи приводит к построению адекватной шуму – неистинной модели [1]. С помощью МГУА, на основании значений признаков (категориальных и метрических переменных) объект может быть причислен к одному из нескольких заданных заранее классов, которые атрибутируются, как категориальные переменные. Тип переменной определяется в