

УДК 514.747

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.35876

## ПРОЕКТУВАННЯ ГОДОГРАФА ВЕКТОР-ФУНКЦІЇ ЩІЛЬНОГО РОЗПОДІЛУ

© Т. М. Гаврилов

*В даній роботі поставлена математична задача суміщення фігур за умови їх взаємного неперетину. Для вирішення цього завдання була розглянута детальна методика побудови годографа вектор-функції щільного розподілу двох фігур. Проілюстровані основні властивості годографа вектор-функції щільного розподілу. Наведено поетапний алгоритм розрахунку координат годографа. Приведено деякі приклади необхідності побудови годографа для промислових потреб*

**Ключові слова:** побудова, годограф, вектор-функція щільного розподілу, координатні осі, напрямок руху, розкрій

*The mathematical problem of combining figures with its mutual nonintersection is shown in this article. It is considered the detail method of hodograph construction of dense distribution vector function of two figures to solve this problem. It is illustrated the basic properties of hodograph vector function of dense distribution. It is shown the incremental algorithm for calculating hodograph coordinates. Some examples of the need for hodograph construction for industrial needs are given*

**Keywords:** construction, hodograph, dense distribution vector function, coordinate axes, movement direction, cutting

## 1. Вступ

Однією з основних вимог, яку слід враховувати при проектуванні на ПК схем суміщення фігур, є їх взаємний неперетин. Для створення математичної моделі слід формалізувати умови взаємного неперетину фігур [1] у вигляді аналітичних співвідношень. Формулювання та перевірка умов взаємного неперетину плоских геометричних об'єктів складної конфігурації являється непростою задачею.

Для науково-обґрунтованого чисельного вирішення технологічних задач, створення теоретичної основи для розробки прикладного програмного забезпечення слід математично сформулювати поставлену задачу.

## 2. Постановка задачі

Математична постановка задачі розміщення деталей взуття в комбінованих схемах розкрою наступна: для заданого асортименту плоских геометричних об'єктів  $S_i$  і заданої кількості цих об'єктів  $Q_i$ , де  $i=1..k$ , з множини допустимих схем розміщення на напівнескінченній смузі, шириною  $D$ , знайти таку схему, в якій деталі можуть бути розташовані під кутом  $\alpha$  і  $\pi+\alpha$  відносно основної орієнтації деталей та з міжшаблонним містком  $\Delta$ , щоб довжина розкрійної схеми була мінімальною, тобто  $L=\min\{L^q\}$ , де  $L^q$  – довжина  $q$ -ої розкрійної схеми,  $q=1..p$  і  $p$  – кількість допустимих варіантів розкрою.

Ця задача при даній постановці являється мультиекстремальною, тобто має безліч екстремумів. Потому не існує методів пошуку точного рішення цієї зада-

чі. Відповідно, далі йтиметься про раціональне розміщення плоских геометричних об'єктів на напівнескінченній смузі.

Виходячи з практики розкрою в легкій промисловості, проаналізуємо спрощену математичну постановку даної задачі: на напівнескінченній смузі, шириною  $D$  для заданого асортименту плоских геометричних об'єктів  $S_i$  і заданої кількості цих об'єктів  $Q_i$ , де  $i=1..k$ , знайти набір таких областей прямокутної форми  $\Omega_k$  розміром  $D \times L_k$ , ( $L > L_k > 0$ )  $k=1..m$ , на яких будуть раціонально розміщені задані плоскі геометричні об'єкти так, щоб сумарна довжина областей  $\sum_{k=1}^m L_k$  була

найменшою.

Для цього скористаємось введеною Ю. Г. Стояном [2, 3] спеціальною функцією – вектор-функцією щільного розподілу геометричних фігур для реалізації умов її взаємного неперетину.

## 3. Огляд літератури

Розглянемо фігури  $S_1$  і  $S_2$ , які розміщені на площині і зберігають постійну взаємну орієнтацію. Точки  $O_1$  і  $O_2$  є полюсами відповідних фігур. Фігура  $S_1$  нерухомо закріплена на площині, а фігура  $S_2$  може рухатися. Будемо пересувати другу фігуру  $S_2$  навколо першої  $S_1$  (нерухомої) так, щоб в будь-якому положенні фігури  $S_2$  виконувалася умова дотикання контурів фігур  $S_2$  і  $S_1$ . Кожне таке положення характеризується вектором  $\vec{r}_{12} = \overline{O_1 O_2}$ , що з'єднує полюси фігур (рис. 1).

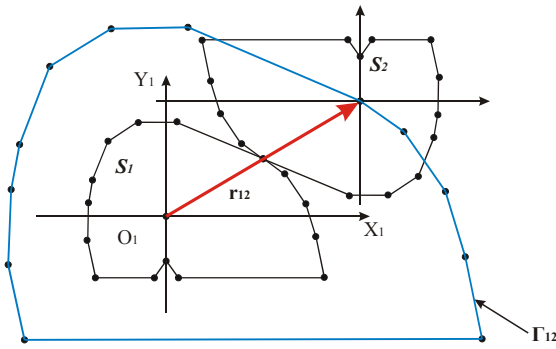


Рис. 1. Годограф вектор-функції щільного розміщення двох повернених одна відносно другої фігури

Припустимо, що фігура  $S_2$  знаходиться в початковому положенні і дотикається до нерухокої фігури  $S_1$ . Пересуваючи фігуру  $S_2$ , потрібно примусити її обійти навколо нерухокої фігури  $S_1$ , зберігаючи дотикання. При цьому  $S_2$  повинна зробити повний оберт і повернутися у вихідне положення.

Вектор-функцією щільного розміщення (в.-ф.щ.р.) фігури  $S_2$  відносно фігури  $S_1$  називається вектор-функція [4], яка ставить у відповідність кожному щільному розміщенню фігур  $S_1$  і  $S_2$  значення вектора  $\vec{r}_{12} = \overline{O_1O_2}$ , за умови, що  $S_1$  – нерухома (рис. 1).

Якщо позначити через  $\Theta$  – кут між  $\vec{r}_{12}$  і віссю  $O_1X_1$ , то

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{12}(\Theta), \quad \Theta \in [0, 2\pi). \quad (1)$$

При розв'язуванні задач щільного розміщення фігур (побудови укладки фігур) необхідно мати інформацію про те, як слід розміщувати полюс другої фігури, якщо розміщення першої уже виконане, щоб забезпечити взаємне неперетинання цих фігур і досягти їх щільного розміщення [5, 6].

Якщо фігура  $S_2$ , рухаючись навколо фігури  $S_1$ , повністю обійде її, то траєкторія руху полюсу  $O_2$  замкнеться. Траєкторія руху полюсу  $O_2$  називається *годографом*  $\Gamma_{12}$  в.-ф.щ.р. двох фігур (надалі просто *годограф*). Навколо нерухокої фігури  $S_1$  виникає деяка область  $\Phi_{12}$ , обмежена цією траєкторією.

Ця область має важливі властивості [7]:

- якщо полюс  $O_2$  рухокої фігури  $S_1$  розмістити всередині області  $\Phi_{12}$ , обмеженої *годографом*  $\Gamma_{12}$ , то фігури  $S_1$  і  $S_2$  мають спільні внутрішні точки, тобто фігури  $S_1$  і  $S_2$  перетинаються;

- якщо полюс  $O_2$  фігури  $S_2$  розмістити зовні області  $\Phi_{12}$ , обмеженої *годографом*  $\Gamma_{12}$ , то фігури  $S_1$  і  $S_2$  не мають спільних точок, тобто фігури  $S_1$  і  $S_2$  не дотикаються;

- якщо полюс  $O_2$  фігури  $S_2$  розмістити на границі області  $\Phi_{12}$ , то фігури  $S_1$  і  $S_2$  розміщенні щільно, тобто мають спільні граничні точки;

- *годограф*  $\Gamma_{12}$  двох однакових і однаково орієнтованих фігур має центральну симетрію.

Приведені властивості *годографа* проілюстровано на рис. 2.

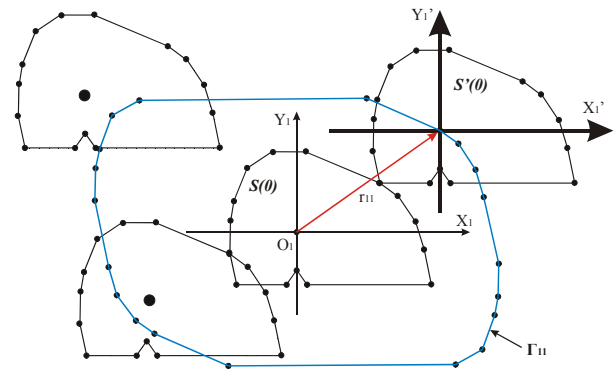


Рис. 2. Властивості *годографа* вектор-функція щільного розміщення двох однакових і однаково орієнтованих фігур

Оскільки, геометричні фігури можуть бути дуже різноманітними за формою, тому процедура обчислення значень в.-ф.щ.р. в загальному випадку є досить складною, особливо, у випадку, коли складним є контур фігур, що розміщуються. Тому далі детально розглянемо випадок лише для опуклих багатокутників [8, 9].

#### 4. Розрахунок координат

При побудові *годографа* в.-ф.щ.р. багатокутника фактично реалізується процедура руху одного багатокутника навколо іншого за умови, що в кожному момент руху контури, які їх обмежують, дотикаються.

Можливі три випадки :

- вершина багатокутника  $S_2$  рухається по стороні багатокутника  $S_1$ ;
- сторона багатокутника  $S_2$  рухається по вершині багатокутника  $S_1$ ;
- сторона багатокутника  $S_2$  рухається по стороні багатокутника  $S_1$ .

Оскільки всі внутрішні точки фігури при прямо-лінійно-поступальному русі без повороту рухаються однаково, то, прослідкувавши за траєкторією руху полюса, можемо описати рух всієї фігури. Фрагменти руху – це є рух полюса фігури по відрізках прямих. З цього випливає, що траєкторія руху полюса складається з відрізків, які послідовно з'єднані між собою. Початкова і кінцева точки траєкторії руху співпадають. Отже, траєкторія руху фігури, що є багатокутником навколо іншого багатокутника є замкненою ламаною лінією, тобто *годограф*  $\Gamma_{12}$  є замкнена ламана лінія [8].

Оскільки в кожному момент руху рухома і нерухома фігури дотикаються, то *годограф*  $\Gamma_{12}$  несе в собі інформацію про взаємне розташування фігур, при якому досягається їх щільне розміщення.

#### 5. Апробація результатів досліджень

Розглянемо схему обчислення координат вершин *годографа* двох опуклих багатокутників.

Зафіксуємо на площині фігуру  $S_1$ . Розташуємо фігуру  $S_2$  так, щоб вона дотикалася до  $S_1$ . З кожною з цих фігур зв'яжемо їх власні системи координат:  $X_1O_1Y_1$  з  $S_1$  та  $X_2O_2Y_2$  з  $S_2$ . Інформацію про кожен з фігур задамо у вигляді послідовності координат вершин у власних системах координат. Позначимо послі-

довність вершин фігури  $S_1$  як  $A'_i(x'_i, y'_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$ , а фігури  $S_2 - A''_j(x''_j, y''_j)$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

В будь-який момент руху фігури  $S_2$ , відповідні координатні осі координатних систем  $X_1O_1Y_1$  та  $X_2O_2Y_2$  мають однаковий напрямок. Початком траєкторії руху будемо вважати взаємне розташування фігур, при якому деяка вершина  $A'_i(x'_i, y'_i)$  фігури  $S_1$  суміщена з деякою вершиною  $A''_j(x''_j, y''_j)$  фігури  $S_2$  і фігури не перетинаються. Такому розміщенню фігур відповідає вершина  $G_k(x_k, y_k)$  годографа  $\Gamma_{12}$ :

$$G_k(x_k, y_k): \begin{cases} x_k = x'_i - x''_j \\ y_k = y'_i - y''_j \end{cases} \quad (2)$$

Для того, щоб обчислити координати наступної вершини годографа необхідно визначити напрямок переміщення фігури  $S_2$  відносно фігури  $S_1$ .

Щоб зберегти щільне розміщення фігур на наступному етапі повинна реалізуватися одна з двох можливостей [9]:

- або вершина  $A''_j$  фігури  $S_2$  буде рухатися по прилеглий стороні  $A'_i A'_{i+1}$  нерухомої фігури  $S_1$ ;
- або прилегла сторона  $A''_j A''_{j+1}$  фігури  $S_2$  повинна рухатися по вершині  $A'_i$  нерухомої фігури  $S_1$ .

Основним при виборі напрямку руху є забезпечення умови, щоб в процесі руху внутрішня частина фігури  $S_2$  не накладалася на внутрішню частину нерухомої фігури  $S_1$ , тобто щоб фігури не перетиналися.

При обраній орієнтації контурів фігур внутрішня частина кожної з фігур прилягає до її контуру з лівого боку. Необхідно обрати такий напрямок руху, при якому рухома фігура буде знаходитися з іншого боку від контура нерухомої фігури на ділянці дотику фігур. Коли вершина  $A'_i(x'_i, y'_i)$  фігури  $S_1$  суміщена з вершиною  $A''_j(x''_j, y''_j)$  фігури  $S_2$ , то подальший рух фігури  $S_2$  буде відбуватися:

- або вздовж прямої на якій лежить сторона  $A'_i A'_{i+1}$  фігури  $S_1$ ;
- або вздовж прямої, на якій лежить сторона  $A''_j A''_{j+1}$  фігури  $S_2$ .

Щоб при цьому фігури  $S_1$  і  $S_2$  не перетиналися, слід обрати ту з прямих, для якої всі вершини фігури  $S_1$  знаходяться з лівого боку від прямої, а всі вершини фігури  $S_2$  - з правого боку від неї.

Введемо спеціальну функцію  $Z_{ij}$

$$Z_{ij} = \begin{vmatrix} x'_{i+1} - x'_i & y'_{i+1} - y'_i \\ x''_{j+1} - x''_j & y''_{j+1} - y''_j \end{vmatrix}, \quad (3)$$

за знаком якої можна встановити напрямок руху фігури  $S_2$ . Обчисливши її значення при індексах суміщених вершин, отримаємо один з випадків:

- якщо  $Z_{ij} > 0$ , то напрямок руху фігури  $S_2$  вказує вектор  $\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}$ ;

- якщо  $Z_{ij} < 0$ , то напрямок руху фігури  $S_2$ , вказує вектор  $\overrightarrow{A''_j A''_{j+1}}$ ;

- якщо  $Z_{ij} = 0$ , то маємо випадок, коли вектори  $\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}$  і  $\overrightarrow{A''_j A''_{j+1}}$  колінеарні і напрямок руху фігури  $S_2$  визначається вектором  $\overrightarrow{A'_i A'_{i+1}}$ .

На кожному кроці координати вершин годографа обчислюються за формулами (2).

В загальному випадку не має значення, які дві вершини ми сумістимо на першому етапі обчислень. Тому за початкове оберемо таке розташування фігур  $S_1$  і  $S_2$ , при якому вершина фігури  $S_1$  з максимальною абсцисою [10] співпадає з вершиною фігури  $S_2$  з мінімальною абсцисою.

Обчислення закінчуються, коли годограф  $\Gamma_{12}$  "замкнеться", тобто координати чергової знайденої вершини годографа співпадуть з координатами його першої вершини. В результаті обчислень отримуємо масив  $G_k(x_k, y_k)$   $k = \overline{1, m}$  координат послідовних вершин годографа  $\Gamma_{12}$ .

Записавши в параметричному вигляді рівняння відрізків, що є ребрами годографа, отримаємо аналітичний опис годографа  $\Gamma_{12}$  у вигляді системи:

$$\begin{cases} x(\tau_i) = x + (x_{i+1} - x)\tau_i \\ y(\tau_i) = y + (y_{i+1} - y)\tau_i \end{cases} \quad i = \overline{1, m}, \quad (4)$$

де  $(x_i, y_i)$  координати вершин годографа  $\Gamma_{12}$ ,  $\tau_i$  - параметр,  $\tau_i \in [0; 1)$ .

## 6. Висновки

Побудова годографу вектор-функції щільного розподілу двох фігур є дуже відповідальним процесом, особливо в тих галузях, де з метою максимально щільного розміщення фігури суміщаються в єдину розкрійну схему. Для різних розкрійних матеріалів існують специфікації, згідно з якими фахівці мають проектувати розкрійні схеми. Спеціалістам-розкрійникам необхідно розробити таку схему розкрою [10], щоб з одного листа матеріалу розкрити максимальну кількість деталей і отримати мінімальну кількість відходів. Основою для проектування таких раціональних схем і являється годограф вектор-функції щільного розподілу.

## Література

1. Мореходов, Г. А. Рациональное использование текстильных и искусственных материалов при раскрое на детали обуви [Текст] / Г. А. Мореходов. - М.: ЦНИИТЭИлетпром, 1969. - 157 с.
2. Стоян, Ю. Г. Об оптимальном размещении геометрических объектов [Текст]: автореф. ... дис. д-ра техн. наук. / Ю. Г. Стоян. - М.: 1970. - 50 с.
3. Стоян, Ю. Г. Размещение геометрических объектов [Текст] / Ю. Г. Стоян. - К.: Наукова думка, 1975. - 175 с.
4. Выгодский, М. Я. Справочник по высшей математике [Текст] / М. Я. Выгодский. - М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956. - 786 с.
5. Залгаллер, В. А. Об одном необходимом признаке плотнейшего расположения фигур. Вып. 4 [Текст] / В. А. Залгаллер. - М.: УМН, 1953. - 47 с.
6. Канторович, Л. В. Расчет рационального раскроя промышленных материалов. [Текст] / Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер. - СПб.: Лениздат, 1951. - 128 с.

7. Майкл, Ласло Вычислительная геометрия и компьютерная графика на C++ [Текст] / Ласло Майкл; пер. с англ. – М.: «Издательство «БИНОМ», 1997. – 340 с.

8. Мухачева, Э. А. Рациональный раскрой прямоугольных листов на прямоугольные заготовки [Текст] / Э. А. Мухачева // Оптимальное планирование. – 1966. – Вып. 6. – С. 39–41.

9. Тот, Л. Ф. Расположение на плоскости, в сфере и пространстве [Текст] / Л. Ф. Тот; пер. с англ. – М.: Физматгиз, 1958. – 132 с.

10. Чупринка, В. И. Алгоритм построения опорной функции для плоских геометрических объектов [Текст] : междунар. сб. науч. тр. / В. И. Чупринка, В. С. Мурженко, П. В. Омелченко // Техническое регулирование: базовая основа качества товаров и услуг. – Шахты: ЮРГУЭС, 2010. – С. 137–141.

#### References

1. Morekhodov, G. A. (1969). Ratsionalnoe ispolzovanie tekstinykh i iskustvennykh materialov pri raskroie na detail obuvi. Moscow: TSNIITYEIllegprom, 157.

2. Stoyan, Yu. G. (1970). Ob optimal'nom razmeschenii geometricheskikh obyektov. Moscow: 50.

3. Stoyan, Yu. G. (1975). Razmeshcheniye geometricheskikh obyektov. K.: Naukova dumka, 175.

4. Maykl, Laslo (1997). Vychislitel'naya geometriya i kompyuternaya grafika na C++. M.: Izdatelstvo "BINOM", 340.

5. Vygodsky, M. Ya. (1956). Spravochnik po vysshey matematike. M., Hosudarstveniy izdatelskiy dom tekhnicheskoy i teoreticheskoy literatury, 786.

6. Zalgaller, V. A. (1953). Ob odnom neobkhodimom priznake plotneyshego raspolozheniya figur. Moscow: UMN, 4, 47.

7. Kantorovich, L. V., Zalgaller, V. A. (1951). Rastshet ratsionalnogo raskroya promyshlennykh materialov. Spb.: Lenizdat, 128.

8. Mukhacheva, Ye. A. (1966). Ratsionalnyy raskroy pryamougolnykh listov na pryamoougolnye zagotovki. Novosibirsk, Optimal planning, 6, 39–41.

9. Tot, L. F. (1958). Raspolozhenie na ploskosti, v sfere i prostranstve. Moscow: Fizmatiz, 132.

10. Chuprinka, V. I., Murzhenko, V. S., Omelchenko, P. V. (2010). Algoritm postroyeniya opornoj funktsii dlya ploskikh geometricheskikh obyektov. Mezhdunarodnyy zbornik nauchnykh trudov "Technicheskoe regulirovanie: bazovye osnovy kachestva materialov, tovarov i uslug", Shachty: YuRGUES, 137–141.

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Тимошенко А. Г.  
Дата надходження рукопису 10.12.2014*

**Гаврилов Тарас Миколайович**, аспірант, кафедра комп'ютерної інженерії, Відкритий Міжнародний Університет Розвитку Людини «Україна», вул. Львівська, 23, м. Київ, Україна, 03115

УДК 546.821-31:548.2

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.35865

## О ВОЗМОЖНОСТИ ПЕРЕКРИСТАЛЛИЗАЦИИ ДИСПЕРСНОГО РУТИЛА, РАСТВОРЕННОГО В РАСПЛАВЕ ГАЛОГЕНИДОВ ЩЕЛОЧНЫХ МЕТАЛЛОВ, В НИТЕВИДНЫЕ КРИСТАЛЛЫ

© В. П. Шапорев, А. В. Шестопапов, И. В. Питак

*В статье представлены теоретические и экспериментальные результаты практического получения нитевидных кристаллов путем перекристаллизации дисперсного рутила, растворенного в расплаве галогенидов щелочных металлов. Рассчитанные кинетические параметры позволяют организовать процесс с заданной скоростью протекания и необходимым выходом продукта. Установлена возможность перекристаллизации оксида титана в солевом расплаве при продувке газом и газом с восстановителем в виде нитевидных кристаллов волокнистой формы*

**Ключевые слова:** нитевидные кристаллы, оксид титана, кинетические параметры, кристаллизация, расплав солей

*In the article the theoretical and experimental results of practical receipt of threadlike crystals are represented by recrystallization of dispersible rutile saluted in fusion of halide of alkaline metals. The expected kinetic parameters allow to organize a process with the set speed of flowing and necessary output of product. Possibility of recrystallization of titanium oxide is set in molten salt at blowing out by gas and gas with a repairer as the threadlike crystals with fibred form*

**Keywords:** threadlike crystals, titanium oxide, kinetic parameters, crystallization, molten salt

### 1. Введение

Диоксид титана как белый пигмент широко применяется в промышленности, а также используется при изготовлении искусственных сапфиров и рубинов, для создания определенной структуры минералов в результате отложения игольчатых кристаллов рутила [1]. Игольчатые формы диоксида титана могут быть получены искусственно в результате окисления  $K_2TiCl_6$  или псевдоаморфной перестройкой гексатитаната калия [2], а также путем окисления  $TiCl_4$  кислородом воздуха [3].

В большинстве случаев основная задача заключается в выращивании достаточно тонких длинных монокристаллов, обладающих свойствами волокна, а не в получении обычно образующих тетрагональных игл [4]. При этом предпочтительно, чтобы монокристаллы, обладающие свойствами волокна имели внутренние полые каналы (поры), что позволяет их использовать в качестве армирующих наполнителей [5], катализаторов, теплоизоляции и т. п. [6].