

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.37412

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ РЕЖИМЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО СЛОЯ, КОТОРЫЙ КОНТАКТИРУЕТ С ИДЕАЛЬНОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ

© А. А. Бабаев, В. Ф. Кришталь, Т. Н. Можаровская

Данная статья посвящена нестационарным режимам излучения акустических волн пьезокерамическим слоем, который контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью и ограничен жесткой поверхностью. Выполнена постановка и метод решения задачи. Задача решалась с использованием интегрального преобразования Лапласа по времени.

Получены формулы для определения физических характеристик исследуемого переходного процесса, таких как гидродинамическое давление, механическое напряжение, волновой потенциал, перемещения пьезокерамического слоя и электрического потенциала

Ключевые слова: пьезокерамический слой, преобразование по Лапласу, электроупругость, акустическая среда

This article is devoted to the non-stationary modes of radiation of acoustic waves by piezoceramic layer that contacts with an ideal compressible liquid and limited to the hard surface. The statement of problem and method of task solution is executed. A task is solved with the use of Laplace time integral time transformation.

Formulas are obtained for determination of physical descriptions of the investigated \ transient process, such as hydrodynamic pressure, mechanical tension, wave potential, moving of piezoceramic layer and electric potential
Keywords: piezoceramic layer, Laplace transformation, electric elasticity, acoustic environment

1. Введение

Технический прогресс в современном этапе возможен лишь при совершенствовании средств и методов научных исследований динамических процессов при взаимодействии деформированных конструктивных элементов со средой.

Нестационарная гидроэлектроупругость принадлежит к одной из отраслей этого направления.

Электромеханические преобразователи энергии приобрели широкое приложение в разнообразных технических устройствах, принцип работы которых базируется на явлении пьезоэффекта, которые используются в гидроакустике, медицине, приборостроении диагностического назначения и других практических сферах деятельности.

Разнообразие явлений, присущих гидроэлектроупругим системам, требует совершенствования математических моделей, способных достаточно полно учесть физические особенности реальных динамических процессов, создания эффективных методов решения сформулированных задач и на их основе определения путей повышения эффективности существующих, и разработки принципиально новых технических изделий.

2. Постановка задачи

Рассматривается бесконечно длинный в продольном направлении пьезокерамический слой, который контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью и возбуждается нестационарными электрическими импульсами, которые подводятся

непосредственно на токопроводящие поверхности. Считается, что пьезокерамический слой (рис. 1) поляризован в радиальном направлении и имеет толщину h_1 , контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью толщиной h_2 плотностью ρ и скоростью звука c .

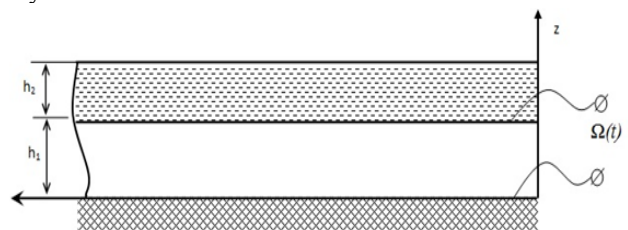


Рис. 1. Пьезокерамический слой

При описании переходных процессов в данной гидроэлектроупругой системе используется соотношение линейной теории связанной электроупругости и акустического приближения. С учетом сделанных предположений исходная система включает в себя уравнение движения пьезокерамического слоя

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} - a^2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

где $a^2 = \frac{\rho_m \epsilon_{33}^s c^2}{C_{33}^E \epsilon_{33}^s + e_{33}^2}$

уравнение вынужденной электростатики (уравнение Максвелла)

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{e_{33}}{\epsilon_{33}^s} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} = 0, \quad (2)$$

механического напряжения, которое возникает в пьезокерамическом слое

$$\sigma_z = C_{33}^E \frac{\partial u_z}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (3)$$

волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}, \quad (4)$$

соотношения между гидродинамическим давлением и волновым потенциалом

$$p = -\rho_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (5)$$

где ϕ – потенциал скорости.

Напряженность E_z , индуктивность D и перемещения U_z , которые возникают в пьезокерамическом слое связаны следующими соотношениями

$$E_z = -\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad (6)$$

$$D_z = -\epsilon_{33}^s \frac{\partial \Psi}{\partial z} + e_{33} \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (7)$$

Постановку задачи (1)–(7) необходимо дополнить граничными условиями.

Перемещения, которые возникают на жесткой поверхности равны нулю ($z=0$)

$$u_z|_{z=0} = 0. \quad (8)$$

Также выполняется условие равенства скоростей в пьезокерамическом слое и идеальной сжимаемой жидкости (на поверхности пьезокерамического слоя $z=h_1$)

$$\left. \frac{\partial u_z}{\partial t} \right|_{z=h_1} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1}. \quad (9)$$

Равенство механического напряжения в пьезокерамическом слое и гидродинамического давления в месте контакта с жидкостью ($z=h_1$)

$$\sigma_z|_{z=h_1} = -p|_{z=h_1}, \quad (10)$$

и условие которое обеспечивает равенство нулю на жесткой поверхности скорости ($z=h_1+h_2$) которая распространяется в жидкость

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=h_1+h_2} = 0. \quad (11)$$

На токопроводящие покрытия пьезокерамического слоя подается нестационарный электрический сигнал (t).

$$\Psi|_{z=0} = -\Omega(t)H(t), \quad \Psi|_{z=h_1} = \Omega(t)H(t), \quad (12)$$

где $H(t)$ – единичная функция Хевисайда.

Начальные условия – нулевые.

3. Литературный обзор

Современные достижения в области гидроупругости и гидроэлектроупругости стали возможны благодаря трудам Г. Н. Савина, А. Н. Гузя, А. К. Перцева, В. Д. Кубенко, Е. И. Григолюка, А. Г. Горшкова, В. Т. Гринченко, Н. А. Шульги и других ученых.

В развитие отмеченного направления механики значительный взнос разработан современной украинской школой и в первую очередь такими специалистами, как А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко, И. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко [1–4].

Среди широкого круга вопросов из проблем нестационарного взаимодействия элементов конструкций со средой наиболее полноизученная дифракция акустических волн на жестких телах. Работы А. К. Перцева, Е. И. Григолюка, А. Н. Гузя, В. Д. Кубенко, А. Г. Горшкова [2, 4].

Много публикаций посвящено изучению закономерностей движения недеформированных и упругих тел в идеальной сжимаемой жидкости под действием нестационарных волн.

4. Метод решения задачи

Решение задачи находилось с применением интегрального преобразования Лапласа по времени. В пространстве изображений исходная система уравнений (1)–(7) и граничные условия (8)–(12) принимают вид (отметим, что в дальнейшем постановка задачи и ее решение было выполнено с учетом безразмерных коэффициентов, согласно которым величины u_z , h_1 , h_2 , z отнесены к толщине слоя жидкости h_1 : u , Ψ – kh_2/d_{33} ; p , σ_z – ρc^2 ; ϕ , V_z – kh_2c ; E – $\rho_0 l/d_{33}$; t – kh_2/c ; D_z – ϵ_{33}^s/d_{33}):

$$\frac{\partial^2 u_z^L}{\partial z^2} - a^2 s^2 u_z^L = 0, \quad (13)$$

$$\frac{\partial^2 \Psi^L}{\partial z^2} - b \frac{\partial^2 u_z^L}{\partial t^2} = 0, \quad (14)$$

где $b = \frac{e_{33} d_{33}}{s^3}$.

$$\sigma_z^L = \frac{C_{33}^E}{\rho c^2} \frac{\partial u_z^L}{\partial z} + \frac{e_{33}}{\rho c^2 d_{33}} \frac{\partial \Psi^L}{\partial z} \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^L}{\partial z^2} - s^2 \phi^L = 0, \quad (16)$$

$$u_z^L|_{z=0} = 0, \quad (17)$$

$$s u_z^L|_{z=h_1} = \left. \frac{\partial \phi^L}{\partial z} \right|_{z=h_1}, \quad (18)$$

$$\sigma_z^L|_{z=h_1} = -p^L|_{z=h_1}, \quad (19)$$

$$\left. \frac{\partial \phi^L}{\partial z} \right|_{z=h_1+h_2} = 0, \quad (20)$$

$$\Psi|_{z=0} = -\Omega^L(s), \quad \Psi|_{z=h_1} = \Omega^L(s). \quad (21)$$

Тут индексом L обозначены соответствующие трансформанты, s – параметр преобразования по Лапласу. Из системы уравнений (13)–(21) получим формулы для:

– нормального перемещения пьезокерамического слоя

$$u_z^L = C_1^L(s) \frac{1}{s} e^{-asz} + C_2^L(s) \frac{1}{s} e^{-as(h_1-z)}, \quad (22)$$

– электрического потенциала

$$\Psi^L = b \left[C_1^L(s) \frac{1}{s} e^{-asz} + C_2^L(s) \frac{1}{s} e^{-as(h_1-z)} + C_5^L(s) z + C_6^L(s) \right], \quad (23)$$

– механического напряжения пьезокерамического слоя

$$\sigma_z^L = -maC_1^L(s)e^{-asz} + maC_2^L(s)e^{-as(h-z)} + nC_5^L(s), \quad (24)$$

где $m = \frac{C_{33}^E \epsilon_{33}^s + e_{33}^2}{\rho c^2 \epsilon_{33}^s}$, $n = \frac{e_{33}^2}{\rho c^2 \epsilon_{33}^s}$

– волнового уравнения

$$\phi^L = C_3^L(s) \frac{1}{s} e^{-s(z-h_1)} + C_4^L(s) \frac{1}{s} e^{-s(h_1+h_2-z)}, \quad (25)$$

– гидродинамического давления

$$p^L = -C_3^L(s)e^{-s(z-h_1)} - C_4^L(s)e^{-s(h_1+h_2-z)}. \quad (26)$$

После подстановки полученных соотношений (22)–(26) в трансформированные по Лапласу [5] граничные условия (17)–(21) получим систему пяти уравнений относительно неизвестных функций $C_1^L(s)$, $C_2^L(s)$, $C_3^L(s)$, $C_4^L(s)$, $C_5^L(s)$

$$\begin{aligned} C_2^L(s) + C_3^L(s) &= C_4^L(s)e^{-ash_2} + C_2^L(s)e^{-2ash_1}, \\ maC_2^L(s) - C_3^L(s) + nC_5^L(s) &= \\ &= C_3^L(s)e^{-sh_2} - maC_2^L(s)e^{-2ash_1}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$C_4^L(s) = C_3^L(s)e^{-sh_2}, \quad C_6^L(s) = -\Omega^L(s),$$

$$C_2^L(s) \frac{1}{s} + C_5^L(s)h_1 + C_6^L(s) = \Omega^L(s) + bC_2^L(s) \frac{1}{s} e^{-2ash_1}.$$

При решении системы уравнений (27) и нахождения неизвестных функций $C_2^L(s)$, $C_3^L(s)$, $C_4^L(s)$, $C_5^L(s)$, $C_6^L(s)$ возникает необходимость раскрытия определителя в явном виде. Это связано с математическими трудностями принципиального характера. Предлагается выполнить инверсию каждого уравнения – непосредственно, и удовлетворить граничным условиям в пространстве оригиналов. В результате система уравнений (27) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} C_2(t) + C_3(t) &= C_4(t - ah_2) + C_2(t - 2ah_1), \\ maC_2(t) - C_3(t) + nC_5(t) &= \\ &= C_3(t - h_2) - maC_2(t - 2ah_1), \end{aligned} \quad (28)$$

$$C_4(t) = C_3(t - h_2), \quad C_6(t) = -\Omega(t),$$

$$\int_0^t C_2(\tau) d\tau + C_5(t)h_1 + C_6(t) = \Omega(t) + b \int_0^{t-2ah_1} C_2(\tau) d\tau.$$

Система уравнений (28) была получена с использованием теоремы про свертку оригиналов и таблиц операционного исчисления [5]. Полученная система интегральных уравнений (28) может быть решена численно путем разбиения временного интервала на отрезки и использования на каждом шаге по t методу квадратурных формул [3]. Сдвиг в аргументах у неизвестных, которые входят в правые части уравнений позволяют находить решения уравнений шаг за шагом, независимо. В результате находятся неизвестные функции $C_2(t)$, $C_3(t)$, $C_4(t)$, $C_5(t)$, $C_6(t)$. После их нахождения [3] определяются физические характеристики исследуемого переходного процесса, такие как:

– гидродинамическое давление

$$p(t) = -C_3(t - h_1 - h_2 + z) - C_4(t - z + h_1), \quad (30)$$

– перемещения пьезокерамического слоя

$$u(t, z) = \int_0^{t-az} C_1(\tau) d\tau + \int_0^{t-(ah_1-z)} C_2(\tau) d\tau, \quad (31)$$

– механического напряжения пьезокерамического слоя

$$\sigma(t, z) = -maC_1(t - az) + maC_2(t - a(h_1 - z)) + nC_5(t). \quad (32)$$

5. Выводы

Основные результаты и выводы состоят в следующем:

1. Выполнена постановка задачи и предложен метод решения отмеченной задачи, который базируется на использовании интегрального преобразования Лапласа по времени.

2. Получена, с учетом граничных условий в пространстве изображений, система 6 уравнений относительно неизвестных функций $C_1^L(s)$, $C_2^L(s)$, $C_3^L(s)$, $C_4^L(s)$, $C_5^L(s)$, $C_6^L(s)$ параметра преобразования s .

3. Предлагается аналитически провести инверсию каждого из уравнений и обеспечить выполнение граничных условий в пространстве оригиналов. В результате чего получаем систему, которая включает в себя 5 уравнений. Решение двух из этих уравнений сводится к решению интегральных уравнений Вольтера с запаздывающими аргументами.

4. Это позволяет проводить расчеты с контролируемой точностью при строгом, в рамках принятых постановок, механизме работы данной гидроэлектроупругой системы.

Литература

1. Верлань, А. Ф. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ [Текст] / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев.: Наукова думка, 1978. – 291 с.
2. Головчан, В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В шести т.–т.5. Динамика упругих тел [Текст] / В. Т. Головчан, В. Д. Кубенко, Н. А. Шульга, А. Н. Гузь, В. Т. Гринченко. – Киев: Наукова думка, 1986. – 286 с.
3. Градштейн, И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений [Текст] / И. С. Градштейн, И. М. Рыжик. – М.: Физматгиз, 1962 – 108 с.
4. Гринченко, В. Т. Электроупругость. т.5 – Механика связанных полей в элементах конструкций [Текст] / В. Т. Гринченко, А. Ф. Улитко, Н. А. Шульга. – Киев.: Наукова думка, 1989. – 280 с.
5. Диткин, В. А. Справочник по операционному исчислению [Текст] / В. А. Диткин, А. О. Прудников. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
6. Пьезокерамические преобразователи [Текст] / под ред. С. И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
7. Слепьян, Л. И. Нестационарные упругие волны [Текст] / Л. И. Слепьян. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.

References

1. Verlan, A. F., Sizikov, V. S. (1978). Methods of decision of integral equalizations with the programs for COMPUTER. Kyiv: Scientific thought, 291.
2. Golovchan, V. T., Kybenko, V. D., Shulga, N. A., Guz, A. N., Grinchenko, V. T. (1986). Spatial tasks of theory of resiliency and plasticity: In 6 vol.-vol.5. Dynamics of resilient bodies. Kyiv: Scientific thinking, 286.
3. Gradshtein, I. S., Rigik, I. M. (1962). Tables of integrals, sums, rows and works. Moscow: Fizmatgiz, 108.
4. Grinchenko, V. T., Ulitko, A. F., Shulga, N. A. (1989). Electro-resiliency. Vol. 5 is Mechanics of the

constrained fields in the elements of constructions. Kyiv: Scientific thinking, 280.

5. Ditkin, V. A., Prudnikov, A. O. (1965). Reference Book on an operating calculation. Moscow: Higher school, 466.

6. Pugachev, S. I. (Ed.) (1984). Pezokeramic transformers. Lviv: Shipbuilding, 256.

7. Slepian, L. I. (1972). Non-stationary resilient waves. Lviv: Shipbuilding, 374.

*Рекомендовано до публікації доктортехнічних наук, професор Савін В. Г.
Дата надходження рукопису 27.01.2015*

Бабаев Александр Артасесович, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056
E-mail: babaevaa@ukr.net

Кришталь Владимир Федорович, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056
E-mail: krishtalvf@gmail.com

Можаровская Тамара Николаевна, кандидат технических наук, доцент кафедры теоретической механики, Национальный технический университет Украины "Киевский политехнический институт", пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056
E-mail: mtn131954@ukr.net

УДК 537.32

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.36332

ПЕРЕНОС ТЕПЛА ФОНОНАМИ В ТРАНСПОРТНОЙ МОДЕЛИ ЛАНДАУЭРА-ДАТТЫ-ЛУНДСТРОМА

© Ю. А. Кругляк

С позиций транспортной модели ЛДЛ строится обобщенная модель переноса тепла фононами. Аналогично фермиевскому окну электронной проводимости вводится понятие фермиевского окна фононной проводимости и через него выводится общее выражение для решеточной теплопроводности, в котором с самого начала фигурирует квант теплопроводности. Подчеркивается подобие и различия в построении теории электронной проводимости и теории теплопроводности

Ключевые слова: нанофизика, наноэлектроника, фононный транспорт, квант теплопроводности, коэффициент прохождения, фононные моды, дебаевская модель, рассеяние фононов

On the basis of Landauer-Datta-Lundstrom transport model the generalized model of heat transfer by phonons is formulated. Similarly to the Fermi window for electron conductivity the concept of the Fermi window for phonon conductivity is introduced and used to obtain the general expression for the lattice thermal conductivity with the quantum of thermal conductivity appearing at the very beginning. There are emphasized the similarity and differences in the construction of the theory of electron conductivity and the theory of heat conduction

Keywords: nanophysics, nanoelectronics, phonon transport, thermal conductivity quantum, transmission coefficient, phonon modes, Debye model, phonon scattering

1. Введение

При транспорте электронов переносится как заряд, так и тепло. В металлах почти все тепло переносится электронами, а в полупроводниках только меньшая часть тепла переносится электронами, и почти все тепло переносится фононами.

Поток тепла, вызванный транспортом фононов вдоль проводника (ось x)

$$J_{Qx}^{ph} = -\kappa_L \frac{dT}{dx}, [Bm/m^2] \quad (1)$$

где коэффициентом пропорциональности потока тепла градиенту температуры является удельная решеточная теплопроводность κ_L . У алмаза, одного из лучших проводников тепла, $\kappa_L \approx 2000 \text{ Bm/m}^2\text{K}$, у такого плохого проводника тепла как стекло $\kappa_L \approx 1$

$\text{Bm/m}^2\text{K}$, а у воздуха $\kappa_L \approx 0.025 \text{ Bm/m}^2\text{K}$. Если электрическая проводимость твердых материалов меняется на 20 и больше порядков, то их решеточная теплопроводность изменяется всего на 3–4 порядка. Тем не менее, есть много общего в описании переноса тепла электронами и фононами в рамках транспортной модели Ландауэра – Датты – Лундстрема (ЛДЛ) [1–4]. Далее упомянем лишь необходимые нам сведения о фононах.

2. Обзор элементарной физики фононов

Физика фононов подробно изложена в [5–8]. Характерный ход дисперсии $E(k)$ для электронов качественно показан на рис. 1, а дисперсии $\hbar\omega(q)$ для фононов – на рис. 2.