УДК 517.518.8+519.652
DOI: 10.15587/2313-8416.2015.48349

ПРИМЕНЕНИЕ «ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО МНОГОЧЛЕНА ЛАГРАНЖА» ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО МНОГИМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

© В. А. Тараник

Интерполяционный многочлен Лагранжа применяется для функций только одной переменной. В этой статье рассмотрена возможность его применения для функции с несколькими переменными. При этом метод не претерпевает больших изменений. Он останется таким же простым, и может служить хорошей альтернативой при решении задач, для которых раньше применялись более сложные методы
Ключевые слова: *Лагранж, интерполяция, многочлен, функция, многомерная функция, переменная, узлы интерполяции*

The interpolation polynomial of Lagrange is used for the functions of one variable. In this article it is considered a possibility of its application for a function with a few variables. Thus, a method does not suffer large changes. It will remain the same simple, and can serve as a good alternative at the decision of tasks, for that before were used more difficult methods
Keywords: *Lagrange, interpolation, polynomial, function, multivariable function, variable, knots of interpolation*

1. Введение

Тема интерполирования функций со многими переменными никогда не перестанет быть актуальной. Спрос на развитие таких методов со стороны прикладных наук и наукоемких отраслей производства усиливается постоянным увеличением производительности вычислительной техники и повсеместным внедрением её в различные сферы человеческой деятельности.

2. Цель и задачи исследований

Цель данной статьи – демонстрация возможности простого применения интерполяционного многочлена Лагранжа для случая функции с любым количеством переменных, а не только с одной. Показать на примерах его пригодность для этой цели. Провести анализ полученных результатов, насколько это окажется возможным.

3. Обзор литературы

Тема данной статьи – это наиболее популярный метод интерполирования функций, относящийся к фундаментальной математике. Все понятия и определения, использованные в статье, многократно изложены во многих источниках информации. Для людей компетентных в математике, даже не потребуется дополнительно прибегать к изучению ещё какого-либо материала. Книги, указанные в перечне литературы данной статьи содержат информацию об основных понятиях, употребляемых в статье, для тех, кто хочет вспомнить. Так, например, с помощью [1–3] можно вспомнить распространённые методы приближения и интерполирования функций, в том числе и интерполяционный многочлен Лагранжа. Кроме этого, в [3], затронута тема интерполирования многомерных функций несколькими способами. С ними можно ознакомиться, в том числе и для сравнения с предлагаемым в данной статье методом. В [4] раскрыто понятие линейной комбинации. Книги [5, 6] содержат напоминание о понятии многочлена одной и нескольких переменных, об их разновидностях и действиях над ними. И последнее, в каждой из книг [5–9], изложено понятие определителя, их основные свойства и действия над ними. Предложенных книг достаточно для понимания данной статьи.

4. Определение интерполяционного многочлена Лагранжа для многих переменных

Интерполяционный многочлен Лагранжа [1–3, 5] обычно применяется для получения функции одной переменной в виде многочлена по заданным точкам, или, иначе, узлам интерполяции, значения в которых известны. Функция должна точно принимать заданные значения в узлах интерполяции. А между ними – приближённые значения, которые могли бы удовлетворять решению задачи. Классическое определение интерполяционного многочлена Лагранжа приводится в виде формулы:

$$L_{(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} l_i = \sum_{i=1}^{i=n} \left(f_{(x_i)} \times \prod_{j=1,\, j\neq i}^{j=n} \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}} \right),$$

где $\boldsymbol{n}$ – количество узлов интерполяции, $\boldsymbol{i}$ – индекс от $\boldsymbol{1}$ до $\boldsymbol{n}$ по номерам узлов, $f_{(x_i)}$ – заданные условием задачи значения в узлах. Произведение по индексу $\boldsymbol{j}$ называют $\boldsymbol{i}$-ым *базовым полиномом*. Слагаемое l_i – это масштабированный в $f_{(x_i)}$ раз $\boldsymbol{i}$-й базовый полином, или $\boldsymbol{i}$-й элемент линейной [4] комбинации. Таких слагаемых $\boldsymbol{n}$. Каждой заданной точке соответствует один элемент линейной комбинации l_i. Сумма, или линейная комбинация, всех l_i составляет в итоге интерполяционный многочлен Лагранжа $L_{(x)}$. Его свойства следующие:

1) элемент линейной комбинации l_i в точке x_i равен $f_{(x_i)}$;

2) элемент линейной комбинации l_i во всех точках x_j равен 0;

3) степень многочлена $L_{(x)}$ определяется числом множителей в произведении по индексу ***j***. Имеем степень не более чем ***n-1***, так как в случае, например, при попытке применить данный метод к узлам, принадлежащим уже существующему многочлену меньшей степени, чем ожидается получить, могут образоваться нулевые коэффициенты при старших членах.

Функция класса многочленов, проходящая через ***n*** точек, степени не более ***n-1***, существует только одна [3], независимо от способа её получения. Это относится к случаю многочлена только с одной переменной. Для случая многочлена с несколькими переменными, как будет показано далее, подобной единственности не будет.

Приведём пример из общего случая. Предположим, что нужно получить интерполяционный многочлен Лагранжа некоторой функции $F_{(x)}$ с известными значениями в пяти точках.

Пример 1.

1) $x_1 = -1.5;\ \ f_{(x_2)} = 1.2890625;$

2) $x_2 = -0.75;\ \ f_{(x_2)} = 0.375;$

3) $x_3 = 0.25;\ \ f_{(x_3)} = -0.5625;$

4) $x_4 = 1;\ \ f_{(x_4)} = -0.703125;$

5) $x_5 = 1.25;\ \ f_{(x_5)} = -1.375.$

Пусть так. Составим элементы линейной комбинации.

$$l_1 = f_{x_1} \times \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_1 - x_4} \times \frac{x - x_5}{x_1 - x_5} =$$
$$= 1.2890625 \times \frac{x + 0.75}{-1.5 + 0.75} \times$$
$$\times \frac{x - 0.25}{-1.5 - 0.25} \times \frac{x - 1}{-1.5 - 1} \times \frac{x - 1.25}{-1.5 - 1.25} =$$
$$= \frac{1}{7} \times \left(x^4 - 1.75x^3 - 0.0625x^2 + 1.046875x - 0.234375\right);$$

$$l_2 = f_{x_2} \times \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \times \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_2 - x_4} \times \frac{x - x_5}{x_2 - x_5} =$$
$$= 0.375 \times \frac{x + 1.5}{-0.75 + 1.5} \times \frac{x - 0.25}{-0.75 - 0.25} \times$$
$$\times \frac{x - 1}{-0.75 - 1} \times \frac{x - 1.25}{-0.75 - 1.25} =$$
$$= \frac{-1}{7} \times \left(x^4 - x^3 - 1.9375x^2 + 2.40625x - 0.46875\right);$$

$$l_3 = f_{x_3} \times \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_3 - x_2} \times \frac{x - x_4}{x_3 - x_4} \times \frac{x - x_5}{x_3 - x_5} =$$
$$= -0.5625 \times \frac{x + 1.5}{0.25 + 1.5} \times \frac{x + 0.75}{0.25 + 0.75} \times$$
$$\times \frac{x - 1}{0.25 - 1} \times \frac{x - 1.25}{0.25 - 1.25} =$$
$$= \frac{-3}{7} \times \left(x^4 - 2.6875x^2 + 0.28125x + 1.40625\right);$$

$$l_4 = f_{x_4} \times \frac{x - x_1}{x_4 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_4 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_4 - x_3} \times \frac{x - x_5}{x_4 - x_5} =$$
$$= -0.703125 \times \frac{x + 1.5}{1 + 1.5} \times \frac{x + 0.75}{1 + 0.75} \times \frac{x - 0.25}{1 - 0.25} \times \frac{x - 1.25}{1 - 1.25} =$$
$$= \frac{6}{7} \times \left(x^4 + 0.75x^3 - 1.9375x^2 - 0.984375x + 0.3515625\right);$$

$$l_5 = f_{x_5} \times \frac{x - x_1}{x_5 - x_1} \times \frac{x - x_2}{x_5 - x_2} \times \frac{x - x_3}{x_5 - x_3} \times \frac{x - x_4}{x_5 - x_4} =$$
$$= -1.375 \times \frac{x + 1.5}{1.25 + 1.5} \times \frac{x + 0.75}{1.25 + 0.75} \times \frac{x - 0.25}{1.25 - 0.25} \times \frac{x - 1}{1.25 - 1} =$$
$$= -\left(x^4 + x^3 - 1.4375x^2 - 0.84375x + 0.28125\right).$$

В результате, интерполяционный многочлен Лагранжа будет такой:

$$L_{(x)} = \sum_{i=1}^{i=5} l_i = -\frac{4}{7}x^4 - \frac{3.25}{7}x^3 +$$
$$+ \frac{8.375}{7}x^2 - \frac{2.203125}{7}x - \frac{3.84375}{7}.$$

Решение найдено. Представим графическое изображение отдельных элементов линейной комбинации l_i, и то, как они в итоге складываются в многочлен $L_{(x)}$ (рис. 1):

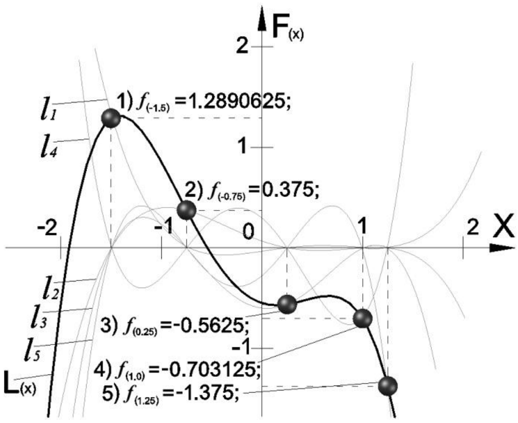

Рис. 1. Интерполяционный многочлен Лагранжа к примеру 1

В каждой заданной точке только один элемент линейной комбинации l_i, который соответствует точке x_i, равен значению функции $f_{(x_i)}$ в этой точке. В то же время все остальные элементы линейной комбинации в этой же точке, но соответствующие другим заданным точкам, равны нулю. Это объясняет, почему $l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 = L_{(x)}$.

Рассмотрим возможность применить данный метод для интерполирования функции, зависящей более чем от одной переменной. Задача поставлена как в методе Лагранжа: провести гладкую функцию, но уже с *любым числом переменных*, класса многочленов через заданные точки. Решение этой задачи не сложнее чем для случая с одной переменной. Ничего не меняя, запишем настоящий интерполяционный многочлен Лагранжа

$$L_{(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} l_i = \sum_{i=1}^{i=n}\left(f_{(x_i)} \times \prod_{j=1,\, j\neq i}^{j=n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right),$$

в другом виде:

$$L_{(x)} = \sum_{i=1}^{i=n} l_i = \sum_{i=1}^{i=n}\left(f_{(x_i)} \times \prod_{j=1,\, j\neq i}^{j=n} \frac{\begin{vmatrix} x & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i & 1 \\ x_j & 1 \end{vmatrix}} \right).$$

Разницу записали в виде определителей. Если решить по этой формуле наш первый пример, получим тот же результат. И это всё что требуется. Замена разностей на определители снимает ограничение на количество переменных. Почему определители [5-9]? Основная причина в том, что необходимость одновременного выполнения двух первых условий интерполяционного многочлена Лагранжа распространится на случай с несколькими переменными. От этого зависит прохождение итоговой функции через заданные точки. Обеспечить выполнение первого условия проще. В методе Лагранжа частное $\frac{f_{(x)}}{f_{(x_i)}}$, в точке $x = x_i$, если $f_{(x_i)} \neq 0$, всегда автоматически примет значение **1**. Но как, если каждая точка представлена несколькими координатами, обеспечить равенство функции нулю во всех остальных заданных точках, кроме ***i***-й? У Лагранжа всего одна переменная. И разность в числителе выражения $\prod_{j=1,\, j\neq i}^{j=n} \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$, при $x = x_j$, хотя бы в одном из ***n-1*** множителей, обратит в ноль всё выражение. Аналогично, если в определителе какие-либо два ряда будут содержать равные значения всех координат хотя бы двух точек, то он также будет равен ***0***. Этим свойством определителей объясняется их применение вместо разностей в случае с любым количеством переменных. При этом появятся некоторые особенности. Я обращу на них внимание далее.

Формула для любого числа ***m*** переменных $x^{(1)},\ldots,x^{(m)}$, и количества заданных точек $n \geq m+1$ такая:

$$L_{(x^{(1)},\ldots,x^{(m)})} =$$

$$= \sum_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left(f_{(x_i^{(1)},\cdots,x_i^{(m)})} \times \prod_{\substack{k_1 \in \{\{1,\ldots,n\}\setminus\{i\}\} \\ \vdots \\ k_m \in \{\{1,\ldots,n\}\setminus\{i,k_1,\ldots k_{m-1}\}\}}} \frac{\begin{vmatrix} x^{(1)} & \cdots & x^{(m)} & 1 \\ x_{k_1}^{(1)} & \cdots & x_{k_1}^{(m)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{k_m}^{(1)} & \cdots & x_{k_m}^{(m)} & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_i^{(1)} & \cdots & x_i^{(m)} & 1 \\ x_{k_1}^{(1)} & \cdots & x_{k_1}^{(m)} & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_{k_m}^{(1)} & \cdots & x_{k_m}^{(m)} & 1 \end{vmatrix}} \right).$$

Данным методом можно получать функции для любого числа переменных, и любого числа узлов интерполяции. Но наименьшее количество заданных точек, которое позволяет составить определители и применить данный метод, должно быть не меньше, чем число переменных плюс один: $n \geq m+1$. Это наименьшее количество точек, которое позволяет многочленом определить ***m***-мерный объект в (***m+1***)-мерном пространстве. Например, для двух переменных, наименьшее число точек, которое требуется задать, будет 2+1=3. Тогда мы получим уравнение плоскости в трёхмерном пространстве.

Пример 2.

Зададим три точки с двумя переменными ***x*** и ***y***, и значения в них:

1) $x_1 = -1.5;\ y_1 = -0.75;\ f_{(x_1,y_1)} = 1.2890625;$

2) $x_2 = -0.75;\ y_2 = 1.25;\ f_{(x_2,y_2)} = 0.375;$

3) $x_3 = 0.25;\ y_3 = 0.5;\ f_{(x_3,y_3)} = -0.5625.$

Составим элементы линейной комбинации для каждой из них.

$$l_{(x,y)}^{(1)} = f_{(x_1,y_1)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= 1.2890625 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{0.966796875}{2.5625}x - \frac{1.2890625}{2.5625}x + \frac{0.88623046875}{2.5625};$$

$$l_{(x,y)}^{(2)} = f_{(x_2,y_2)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} = 0.375 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.75 & 1.25 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{0.46875}{2.5625}x + \frac{0.65625}{2.5625}y - \frac{0.2109375}{2.5625};$$

$$l_{(x,y)}^{(3)} = f_{(x_3,y_3)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}} = -0.5625 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -\frac{1.125}{2.5625}x + \frac{0.421875}{2.625}y - \frac{1.37109375}{2.5625}.$$

Сложим полиномы:

$$L_{(x,y)} = l^{(1)}_{(x,y)} + l^{(2)}_{(x,y)} + l^{(3)}_{(x,y)} =$$
$$= -\frac{2,560546875}{2,5625}x - \frac{0.2109375}{2.5625}y -$$
$$-\frac{0.69580078125}{2.5625}.$$

Это уравнение плоскости в трёхмерном пространстве. Вот её график (рис. 2):

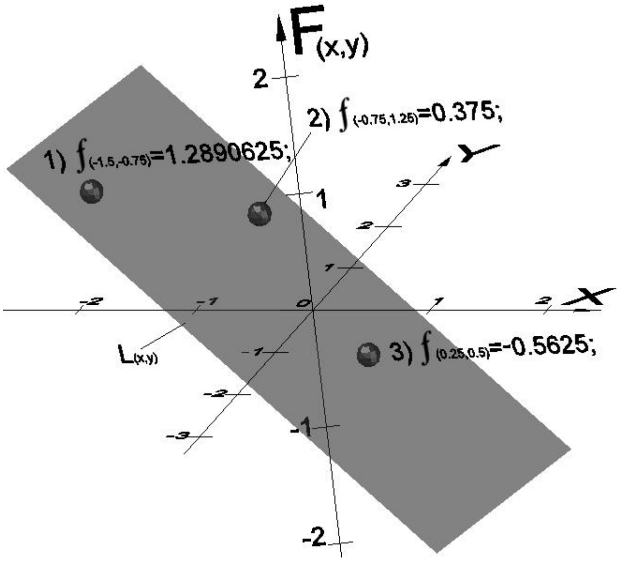

Рис. 2. Плоскость в трёхмерном пространстве к примеру 2

Точно так же, мы получили бы уравнение прямой линии, если бы применили настоящий интерполяционный многочлен Лагранжа с одной переменной для двух узлов интерполяции.

Рассмотрим пример составления приближающей функции двух переменных, ***x*** и ***y***, через пять заданных точек.

Пример 3.

Пусть задано:

1) $x_1 = -1.5;\ \ y_1 = -0.75;\ \ f_{(x_1,y_1)} = 1.2890625;$

2) $x_2 = -0.75;\ \ y_2 = 1.25;\ \ f_{(x_2,y_2)} = 0.375;$

3) $x_3 = 0.25;\ \ y_3 = 0.5;\ \ f_{(x_3,y_3)} = -0.5625;$

4) $x_4 = 1;\ \ y_4 = 1;\ \ f_{(x_4,y_4)} = -0.703125;$

5) $x_5 = 1.25;\ \ y_5 = -1;\ \ f_{(x_5,y_5)} -1.375.$

Изобразим точки в пространстве (рис. 3):

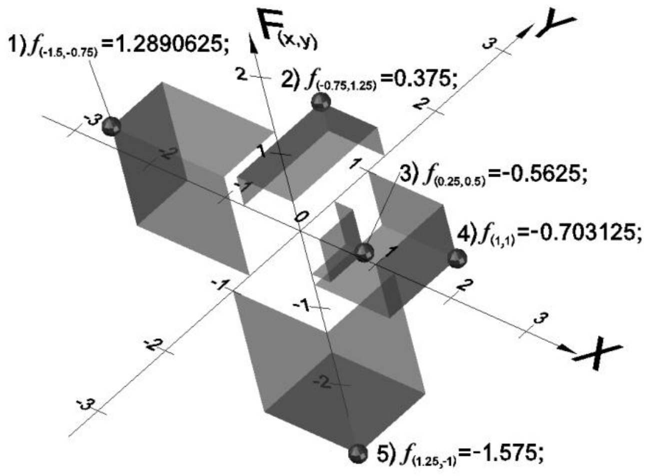

Рис. 3. Заданные узлы интерполяции в пространстве к примеру 3

Составим для каждой точки соответствующий ей полином одним из трёх возможных способов.

$$l^{(1)}_{(x,y)} = f_{(x_1,y_1)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= 1.2890625 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{6069963900}{1076554082240}\left(6x^2 + 28y^2 + 46xy - 51.5x - 56.5y + 28\right);$$

$$l^{(2)}_{(x,y)} = f_{(x_2,y_2)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= 0.375 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.75 & 1.25 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -0.75 & 1.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{4175387520}{1076554082240}\left(-2x^2 + 33y^2 - 19xy - 20.5x + 18.25y - 9.75\right);$$

$$l_{(x,y)}^{(3)} = f_{(x_3,y_3)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -0.5625 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{4544552880}{1076554082240} \times$$
$$\times \left(128x^2 - 6y^2 - 32xy + 12x + 73.5y - 175.5\right);$$

$$l_{(x,y)}^{(4)} = f_{(x_4,y_4)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_4 & y_4 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -0.703125 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{511799925}{1076554082240} \times$$
$$\times \left(-48x^2 - 704y^2 - 592xy - 424x - 140y + 429\right);$$

$$l_{(x,y)}^{(5)} = f_{(x_5,y_5)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_5 & y_5 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_5 & y_5 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= -1.375 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.25 & -1 & 1 \\ -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1.25 & -1 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{3472755104}{1076554082240} \times$$
$$\times \left(10x^2 - 98y^2 + 56xy - 75.5x + 143.5y - 36\right).$$

Сложив масштабированные базовые полиномы, получим следующий результат:

$$L_{(x,y)} = l_{(x,y)}^{(1)} + l_{(x,y)}^{(2)} + l_{(x,y)}^{(3)} + l_{(x,y)}^{(4)} + l_{(x,y)}^{(5)} =$$
$$= \frac{619932931640}{1076554082240}x^2 - \frac{420157687312}{1076554082240}y^2 -$$
$$- \frac{54050985416}{1076554082240}xy - \frac{822860129002}{1076554082240}x +$$
$$+ \frac{493960866494}{1076554082240}y - \frac{573777085479}{1076554082240}.$$

Можно проверить, что полученная функция принимает значения в узлах интерполяции, те, которые были заданы. Изобразим эту функцию графически (рис. 4).

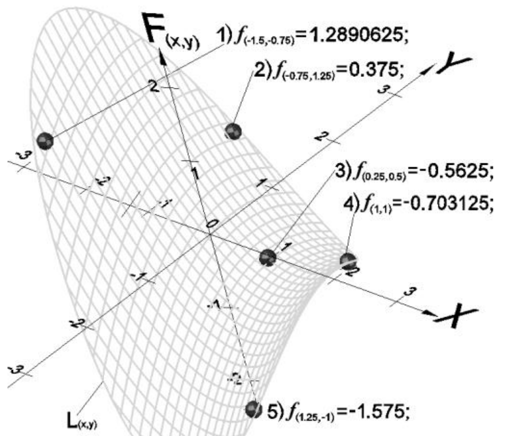

Рис. 4. График функции двух переменных через пять точек к примеру 3

Это понятно. Для следующего примера составим функцию через те же точки, но поменяем местами в уравнении первого полинома $L_{(x,y)}^{(1)}$ вторую строку определителей, между первым и вторым множителями, в числителе и знаменателе одновременно. Четыре остальных базовых полинома оставим без изменений. И проанализируем результат.

Пример 4.

$$l_{(x,y)}^{*(1)} = f_{(x_1,y_1)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= 1.2890625 \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1.5 & -0.75 & 1 \\ 0.25 & 0.5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1.5 & -0.75 & 1 \\ -0.75 & 1.25 & 1 \\ 1.25 & -1 & 1 \end{vmatrix}} =$$

$$= \frac{60999802050}{1076554082240} \times \left(-72x^2 + 96y^2 + 44xy - 10x - 71y + 13\right).$$

Сложим полиномы и запишем результат:

$$L^*_{(x,y)} = l^{*(1)}_{(x,y)} + l^{(2)}_{(x,y)} + l^{(3)}_{(x,y)} + l^{(4)}_{(x,y)} + l^{(5)}_{(x,y)} =$$
$$= -\frac{3808472599360}{1076554082240}x^2 + \frac{5265864320288}{1076554082240}y^2 +$$
$$+\frac{2350721965384}{1076554082240}xy - \frac{1120255008652}{1076554082240}x -$$
$$-\frac{3494072118706}{1076554082240}y + \frac{49261351971}{1076554082240}.$$

Изобразим её график, наложив его на график с предыдущего примера, чтобы можно было сравнить (рис. 5).

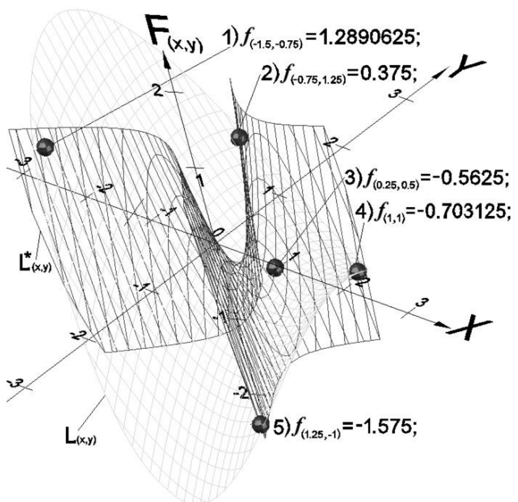

Рис. 5. Сравнение графиков функций двух переменных третьего и четвёртого примеров

Видно, что оба графика проходят через заданные точки. В этом можно убедиться, подставив соответствующие значения в полученные функции. Но они совершенно разные. Уравнение первого полинома $l^{(1)}_{(x,y)}$ можно составить ещё одним способом:

$$l^{**(1)}_{(x,y)} = f_{(x_1,y_1)} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}} \times \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ x_5 & y_5 & 1 \end{vmatrix}}.$$

Каждый из четырёх оставшихся полиномов: $l^{(2)}_{(x,y)}$, $l^{(3)}_{(x,y)}$, $l^{(4)}_{(x,y)}$, $l^{(5)}_{(x,y)}$, также имеет три варианта составления. Таким образом, для пяти заданных точек есть возможность получить, только меняя представление точек в определителях, и не повышая степень, $3^5 = 243$ разных функции удовлетворяющих исходным условиям. Это множество многочленов наименьшей возможной степени можно дополнить бесконечным количеством таких многочленов, применяя линейную комбинацию к уже имеющимся многочленам. Для этого можно применить коэффициенты, значения которых не ограничены, но не равны нулю одновременно. Если, значения, например двух, но может быть и другое количество, любых функций в некоторой точке $\boldsymbol{p}$ одинаковы: $L^{(1)}_{(p)} = L^{(2)}_{(p)}$, то справедливо записать:

$$L^{(1)}_{(p)} = L^{(2)}_{(p)} = \frac{k_1 \times L^{(1)}_{(p)} + k_2 \times L^{(2)}_{(p)}}{k_1 + k_2} =$$
$$= \frac{(k_1 + k_2) \times L^{(1)}_{(p)}}{k_1 + k_2} = \frac{(k_1 + k_2) \times L^{(2)}_{(p)}}{k_1 + k_2},$$

для любых значений $k_1 \neq 0$ и $k_2 \neq 0$, одновременно. Поскольку в заданных точках значения полученных нами функций будут одинаковы, то для них этот способ применим. В узлах интерполяции, и других точках пересечения, значения функций сохранятся. В остальных точках произойдёт их комбинирование в соответствии с выбранными коэффициентами. Создадим новую функцию $L^{**}_{(x,y)}$ путём комбинации функций, которые мы уже имеем, с примеров три и четыре.

Пример 5.

Зададим коэффициенты, например, $k_1 = 34.633$ и $k_2 = 8.966$, для формулы

$$L^{**}_{(x,y)} = \frac{k_1 \times L_{(x,y)} + k_2 \times L^*_{(x,y)}}{k_1 + k_2}.$$

Получаем комбинацию функций из двух предыдущих примеров:

$$L^{**}_{(x,y)} = \frac{k_1 \times L_{(x,y)} + k_2 \times L^*_{(x,y)}}{k_1 + k_2} =$$
$$= -\frac{12676628104373,64}{46936681431581,76}x^2 + \frac{32662418311025,712}{46936681431581,76}y^2 +$$
$$+\frac{19204625363720,616}{46936681431581,76}xy - \frac{38542321255300,098}{46936681431581,76}x -$$
$$-\frac{14220503927031,294}{46936681431581,76}y - \frac{19429944519622,221}{46936681431581,76}.$$

Последняя полученная функция также проходит через заданные точки. Изобразим три поверхности на одном рисунке и сравним (рис. 6).

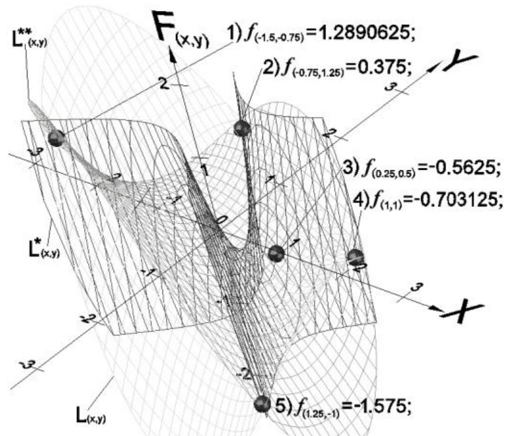

Рис. 6. Сравнение трёх графиков функций двух переменных

Известно, что три точки в пространстве определяют единственную плоскость. Её уравнение – это многочлен первой степени. При добавлении к этим трём точкам четвёртой, в общем случае первой степенью уже не обойтись. Второй – вполне. Удивительно, но той же второй степени многочлена достаточно и для пяти заданных точек. Соответственно, вторая степень многочлена двух переменных, есть самая малая для четырёх и пяти заданных точек. Но мы можем для пяти заданных точек построить бесконечное множество многочленов второй степени. Единственности, как в случае с одной переменной, нет.

Возникает закономерный вопрос: почему для одних и тех же заданных узлов интерполяции двух переменных существует множество разных приближающих многочленов наименьшей степени, тогда как настоящий интерполяционный многочлен Лагранжа определяет единственный? При этом не покидает чувство недостатка однозначности или строгости данного метода для нескольких переменных. Но метод здесь ни при чём. Если функции с соответствующими свойствами есть, то выбор другого метода их получения не прекратит их существования. Конечно, если мы определимся с единым правилом их получения, и откажемся от всех остальных, то результат будет однозначным. Часто так и поступают, когда утверждают, что некий метод приводит к единственному результату. Но, чаще всего, этот единственный результат способен оказаться одним из большого их множества. Если внимательно посмотреть на формулу данного метода с одной переменной, то увидим, что она имеет единственный вариант составления определителей. Для любого большего числа переменных появляется несколько вариантов интерполяционных формул. Единственность функции с одной переменной также очень условна. Если говорить только о многочлене наименьшей возможной степени, то – да, это так. Но если не ограничивать себя с выбором вида и сложности функций, то сможем увидеть не меньшее разнообразие, удовлетворяющих исходным условиям, функций.

Раскроем некоторые особенности этого метода. Квадратная форма определителей требует обязательного полного их заполнения до равных по горизонтали и вертикали размеров. При этом, если ***m*** – это количество переменных, то порядок определителей может быть только ***m+1***. Например, для двух переменных потребовались бы определители только порядка ***3***. Почему? Например, для четырёх заданных точек можно первый базовый полином составить следующим из нескольких, не буду приводить все, способом:

$$l_{(x,y)}^{(1)} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x & y \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}.$$

В точке (x_1, y_1) многочлен $l_{(x,y)}^{(1)}$ будет равен **1**, в точках (x_2, y_2), (x_3, y_3) и (x_4, y_4) – нулю, т.е. это будет работать. Но определитель порядка **2**, например, $\begin{vmatrix} x & y \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix}$ равен определителю $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_4 & y_4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$, порядок которого **3**. Возникает понятие «неявных» точек. В данном случае, мы не указываем точку $x_5 = 0$, $y_5 = 0$ явно, и не составляем для неё отдельный базовый полином. Поэтому она не требует значения, и прохождение функции через неё, скорее всего, не состоится. Но она непременно участвует в расчётах, и влияет на значения коэффициентов в итоговом многочлене. Можно составлять разные определители, которые обеспечивали бы прохождение функции через узлы интерполяции. Но даже самые «причудливые» определители всегда можно привести, не меняя значения выражения в целом, к выражению с определителями порядка ***m+1***. В большинстве таких случаев появятся «неявные» точки, в том числе находящиеся не в начале координат.

В данном методе, увеличение степени многочлена будет происходить, если прибавлять точки к списку заданных точек по ***m***. Если учитывать и «неявные» точки, то наименьшая возможная степень многочлена будет равна ***(n-1)/m***, и всегда будет целой. Оптимальным выбором, в большинстве случаев, будет задавать точки в количестве ровно ***n=1+km***, где ***k*** – это натуральное число. Затем, поочерёдно для каждой точки составить соответствующий ей ***i***-й полином l_i. Для каждого из них составить из оставшихся ***n-1*** точек множители, включая в их определители, числителя и знаменателя одновременно, точки по ***m***, не более чем по одному разу каждую точку. На этапе составления определителей нужно избегать появления «неявных» и повторяющихся точек. В итоге, линейная комбинация из ***n*** масштабированных базовых полиномов $\sum_{i=1}^{i=n} l_i$ даст многочлен степени не более ***k***. Если изначально задано количество точек не равное ***1+km***, то, или повторяющихся, или «неявных» точек – не избежать.

Скорее всего, что данный метод будет применяться на вычислительной технике. При её производительности сегодня, сложность функции останется актуальной, но отойдёт на второй план. Решающим будет соответствие полученных значений решаемой задаче. Тогда, не будет цели получить многочлен наименьшей степени. И не обязательно будет задавать узлы в количестве равном ***n=1+km***. Каждый заданный узел обязательно должен быть представлен в каждом слагаемом хотя бы один раз, при этом может повторяться, но не более одного раза, в каждом множителе, во избежание равенства нулю знаменателя. Будет увеличена степень многочлена за счёт повторения некоторых точек. Но эта особенность позволит применить данный метод, если хотя бы одна из заданных точек не имеет линейной зависимости с остальными. Вариантов составления определителей для одних и тех же заданных точек может быть несколько. В большинстве случаев будут получены разные функции. Выбор оптимального варианта требует решения отдельной задачи. Можно, например, узлы интерполяции расположить по заранее заготовленной сетке, исключающей всевозможные коллизии, и задать единственное и надёжное правило составления определителей и базовых полиномов.

5. Результаты исследования

Мы убедились в том, что метод работает и для случая со многими переменными. При этом он остался таким же простым в понимании, и не претерпел значительных изменений. Но, вместе с этим, было выявлено несколько проблем. Прежде всего, это отсутствие единственного решения для случая с несколькими переменными. Для этого случая остаются нерешёнными задачи оценки погрешности и выбора оптимального решения. А также проблема появления в некоторых случаях «неявных» точек.

6. Выводы

Выдающийся Лагранж, предоставил человечеству бесценный инструмент для решения задач по приближению функций. И ценен он, в том числе, возможностью получения с его помощью, большого разнообразия приближающих функций, зависящих от любого количества переменных, а не только от одной. Можно его приспособить для комплексных величин. И, если перейти к параметрической форме переменных или к другой системе координат, можно получать замкнутые области, или не гладкие функции. Этот метод хорошо алгоритмизируем, поэтому особенно хорошо подходит для применения в современных условиях. Имеется прекрасный повод расширить круг задач, для решения которых этот метод уже с успехом применяется.

Литература

1. Ващенко, Г. В. Вычислительная математика: основы алгебраической и тригонометрической интерполяции: учебное пособие для студентов специальности 230105, 230201 и направления 230100 очной, очной сокращенной и заочной форм обучения [Текст] / Г. В. Ващенко. – Красноярск: СибГТУ, 2008. – 64 с.

2. Бахвалов, Н. С. Численные методы [Текст]: издание 7-е / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Ко-бельков. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2012. – 636 с.

3. Рябенький, В. С. Введение в вычислительную математику [Текст]: учебное пособие, издание 2-е / В. С. Рябенький. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.

4. Тыртышников, Е. Е. Матричный анализ и линейная алгебра [Текст]: учеб. пос. / Е. Е. Тыртышников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. – 477 с.

5. Курош, А. Г. Курс высшей алгебры [Текст] : издание 9-е / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1968. – 431 с.

6. Дураков, Б. К. Краткий курс высшей алгебры [Текст] / Б. К. Дураков. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 232 с.

7. Смирнов, В. И. Курс высшей математики [Текст]: Т. 3, Часть 1, издание 10-е / В. И. Смирнов. – М.: «Наука», 1974, – 324 с.

8. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс [Текст]: издание 4-е / Д. Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 608 с.

9. Кострикин, А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры [Текст]: учебник, издание 3-е / А. И. Кострикин. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.

References

1. Vaschenko, G. V. (2008). Vyichislitelnaya matematika: osnovyi algebraicheskoy i trigonometricheskoy interpolyatsii: uchebnoe posobie dlya studentov spetsialnosti 230105, 230201 i napravleniya 230100 ochnoy, ochnoy sokraschennoy i zaochnoy form obucheniya [Calculable mathematics: bases of algebraic and trigonometric interpolation: train aid for the students of speciality 230105, 230201 and directions 230100 internal, internal brief and extra-mural forms of educating]. Krasnoyarsk: SibGTU, 64.

2. Bahvalov, N. S., Zhidkov, N. P., Kobelkov, G. M. (2012). Chislennyie metodyi, izdanie 7-e [Numeral methods, edition 7th]. Moscow: Binom. Laboratory of knowledge, 636.

3. Ryabenkiy, V. S. (2000). Vvedenie v vyichislitelnuyu matematiku: Uchebnoe posobie, izdanie 2-e [Introduction to calculable mathematics: train aid, edition 2th]. Moscow: FIZMATLIT, 296.

4. Tyirtyishnikov, E. E. (2007). Matrichnyiy analiz i lineynaya algebra, uchebnoe posobie [Matrix analysis and linear algebra, train aid]. Moscow: FIZMATLIT, 477.

5. Kurosh, A. G. (1968). Kurs vyisshey algebryi. Izdanie devyatoe [Course of higher algebra. Edition ninth]. Moscow: Nauka: Science, 431.

6. Durakov, B. K. (2006). Kratkiy kurs vyisshey algebryi [Short course of higher algebra]. Moscow: FIZMATLIT, 232.

7. Smirnov, V. I. (1974). Kurs vyisshey matematiki Tom 3, Chast 1, Izdanie 10-e. [Course of higher mathematics T. 3, Part 1, edition 10th]. Moscow: Science, 324.

8. Pismennyiy, D. T. (2006). Konspekt lektsiy po vyisshey matematike: polnyiy kurs, izdanie 4-e [Compendium of lectures on higher mathematics: complete course, edition 4th] Moscow: Ayris-press, 608.

9. Kostrikin, A. I. (2004). Vvedenie v algebru. Chast I. Osnovyi algebryi: Uchebnik dlya vuzov [Introduction to algebra. Part 1. Bases of algebra: Textbook for institutions of higher learning]. Moscow: FIZMATLIT, 272.

Рекомендовано до публікації д-р техн. наук, професор Забара С. С.
Дата надходження рукопису 21.07.2015

Тараник Валерий Анатольевич, инженер, оператор, ЧАО «ОТИС», ул. Чистяковская, 32, г. Киев, Украина, 03062
E-mail: taranikvalerij@gmail.com