

- ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. *Annalen Der Physik*, 322 (8), 549–560. doi: 10.1002/andp.19053220806
5. Lindsay, S. (2009). *Introduction to Nanoscience*. Oxford, England: Oxford University Press, 472.
6. Ashcroft, N., Mermin, N. (1979). *Fizika tverdogo tela*. Vol. 1-2. Moscow: Mir, 393, 392. Available at: <http://mat.net.ua/mat/biblioteka-fizika/Ashcroft-tverdoe-telo-t1.pdf>
7. Kruglyak, Iu. A. (2015). «Bottom – up» nanoelectronics: the Hall effects, measurement of electrochemical potentials and spin transport in the negf model. *ScienceRise*, 10/2 (15), 35–67. doi: 10.15587/2313-8416.2015.51353
8. Sears, F. W., Salinger, G. L. (1975). *Thermodynamics, Kinetic Theory, and Statistical Thermodynamics*. Boston: Addison-Wesley, 454.
9. Kruglyak, Iu. A. (2015). Graphene in Landauer – Datta – Lundstrom transport model. *ScienceRise*, 2/2 (7), 93–106. doi: 10.15587/2313-8416.2015.36443
10. Krugljak, Ju. A., Krugljak, N. E. (2012). Metodicheskie aspekty rascheta zonnj struktury grafena s uchedom  $\sigma$ -ostova. *Teoreticheskie osnovy. Visnik Odes'kogo derzh. ekologichnogo un-tu*, 13, 207–218.
11. Rabi, M., Mensah, S. Y., Abukari, S. S. (2013). General Scattering Mechanism and Transport in Graphene. *Graphene*, 02 (01), 49–54. doi: 10.4236/graphene.2013.21007
12. Bode, N., Mariani, E., von Oppen, F. (2012). Transport properties of graphene functionalized with molecular switches. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 24 (39), 394017. doi: 10.1088/0953-8984/24/39/394017
13. Dong, H. M., Xu, W., Peeters, F. M. (2011). High-field transport properties of graphene. *Journal of Applied Physics*, 110 (6), 063704. doi: 10.1063/1.3633771
14. Chauhan, J., Guo, J. (2011). Inelastic Phonon Scattering in Graphene FETs. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 58 (11), 3997–4003. doi: 10.1109/ted.2011.2164253
15. Peres, N. M. R. (2010). Colloquium: The transport properties of graphene: An introduction. *Reviews of Modern Physics*, 82 (3), 2673–2700. doi: 10.1103/revmodphys.82.2673
16. Barreiro, A., Lazzeri, M., Moser, J., Mauri, F., Bachtold, A. (2009). Transport Properties of Graphene in the High-Current Limit. *Physical Review Letters*, 103 (7). doi: 10.1103/physrevlett.103.076601
17. Bol'cman, L. (1984). *Izbrannye trudy*. Moscow: Mir, 590.
18. Tarkiainen, R., Ahlskog, M., Penttilä, J., Roschier, L., Hakonen, P., Paalanen, M., Sonin, E. (2001). Multi-walled carbon nanotube: Luttinger versus Fermi liquid. *Physical Review B*, 64 (19). doi: 10.1103/physrevb.64.195412
19. Naemi, A., Savari, R., Meindl, D. (2004). Performance comparison between carbon nanotube and copper interconnects for GSI. *IEDM Technical Digest. IEEE International Electron Devices Meeting*, 699–702. doi: 10.1109/iedm.2004.1419265
20. Burke, P. J. (2002). Luttinger liquid theory as a model of the gigahertz electrical properties of carbon nanotubes. *IEEE Transactions On Nanotechnology*, 1 (3), 129–144. doi: 10.1109/tnano.2002.806823
21. Burke, P. J. (2003). An RF circuit model for carbon nanotubes. *IEEE Transactions On Nanotechnology*, 2 (1), 55–58. doi: 10.1109/tnano.2003.808503
22. Salahuddin, S., Lundstrom, M., Datta, S. (2005). Transport Effects on Signal Propagation in Quantum Wires. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 52 (8), 1734–1742. doi: 10.1109/ted.2005.852170
23. Kruglyak, Yu. O., Strikha, M. V. (2013). Lessons of nanoelectronics: Thermoelectric phenomena in «bottom-up» approach. *Sensor Electronics and Microsystem*, 10 (1), 6–21.
24. Rahman, A., Jing Guo, Datta, S., Lundstrom, M. S. (2003). Theory of ballistic nanotransistors. *IEEE Transactions on Electron Devices*, 50 (9), 1853–1864. doi: 10.1109/ted.2003.815366
25. Pierret, R. F. (1996). *Semiconductor Device Fundamentals*. Reading, MA: Addison – Wesley, 792.
26. Kruglyak, Iu. A. (2014). Generalized Landauer – Datta – Lundstrom model of electron and heat transport for micro- and nanoelectronics. *ScienceRise*, 5/3 (5), 21–38. doi: 10.15587/2313-8416.2014.30728
27. Kruglyak, Yu., Strikha, M. (2015). Landauer – Datta – Lundstrom generalized electron transport model for micro- and nanoelectronics. *Kyiv: IEEE*, 70–74. doi: 10.1109/elnano.2015.7146837
28. *Fundamentals of Nanoelectronics, Part 2: Quantum Models*. nanoHUB-U. Available at: <http://nanohub.org/courses/FoN2>
29. *PurdueX*. Free online courses from Purdue University. Available at: <https://www.edx.org/school/purdue>

*Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат. наук Глушков О. В.  
Дата надходження рукопису 11.11.2015*

**Кругляк Юрий Алексеевич**, доктор химических наук, профессор, кафедра информационных технологий, Одесский государственный экологический университет, ул. Львовская, 15, г. Одесса, Украина, 65016  
E-mail: quantumnet@yandex.ua

УДК 621.646.4

DOI: 10.15587/2313-8416.2015.56361

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ВЫСОКОЧАСТОТНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ СО СЛОИСТЫМ ЦИЛИНДРОМ

© Л. Б. Лерман

*Решена задача электродинамики для бесконечно длинного кругового цилиндра и построено обобщение решения Ми на слоистые цилиндры с произвольным числом слоев. Для гармонического электромагнитного поля найдены частотные зависимости напряженностей и энергии в слоях. Подробно рассмотрен случай взаимодействия плоской волны с цилиндрическим объектом. В нулевом приближении получены замкнутые формулы для электрически тонких слоев*

**Ключевые слова:** слоистый цилиндр, электромагнитная энергия, решение Ми, плоская волна, трансляционные матрицы

*The electrodynamic problem of infinitely long circular cylinder is solved and generalization of Mie solution for layered cylinders with arbitrary number of layers is constructed. Frequency dependences of harmonic electromagnetic field and energy in slabs are founded. Interaction of plane wave with cylindrical object is considered in detail. Closed formulae for electrically thin slabs are obtained in zeroth approximation*

**Keywords:** layered cylinder, electromagnetic energy, Mie solution, plane wave, transfer matrices

**1. Введение**

Развитие современного научно-технического прогресса тесным образом связано с применением электромагнитного излучения (ЭМИ) различных диапазонов в радиотехнике, радиоэлектронике, космических исследованиях, ядерной физике, биологии и медицине. Слоистые плоские и криволинейные покрытия, многослойные наночастицы различной формы, новые метаматериалы находят все более широкое применение в научно-исследовательской практике. Их применение обусловлено уникальными радиотехническими и оптическими свойствами таких объектов. При этом возникает нетривиальная задача нахождения распределения электромагнитной энергии (ЭМЭ) в слоях и, в частности, той ее части, которая вызывает изменение температурных полей. Принципиальным в этом вопросе является возникновение внутренних распределенных источников тепла, мощность которых для слоистых тел зависит от физических параметров каждого слоя. При выборе необходимых физических характеристик слоев оказывается возможным создание материалов с требуемыми свойствами. Такие задачи к настоящему времени исследованы недостаточно, что позволяет говорить об актуальности данного направления.

В настоящей работе предлагается обобщение решения Ми на слоистые цилиндры с произвольным числом слоев. Полное решение задачи предполагает нахождение частотных зависимостей характеристик электромагнитного поля (ЭМП) в слоях, и, в частности, его энергии. Изложена постановка рассматриваемой задачи электродинамики, приведены расчетные соотношения для нахождения напряженностей поля и энергии в слоях и подробно рассмотрен случай взаимодействия с плоской электромагнитной волны (ЭМВ). Наряду с точным решением получены приближенные формулы для электрически тонких слоев.

**2. Анализ литературных данных**

Для изучения процессов распространения ЭМИ в неоднородных средах, взаимодействие с ними и воздействие на них хорошо известны апробированные аналитические и численные методы [1–3]. Для плоских слоистых структур обычно используют 3D преобразование Фурье для анализа связи пространственных и спектральных областей волн и полей [4, 5] или импедансный метод [5, 6]. Для начально-граничных задач и периодических структур часто используют функцию Грина в качестве ядра интегрального уравнения. Для сферических и цилиндрических объектов при получении представлений ЭМП применяют подход Лорентца-Ми, основанный на схеме разделения переменных [7–10].

Взаимодействие ЭМИ со слоистыми телами рассматривалось многими авторами [11–14], и при этом основное внимание уделено слоистым стенкам

и диэлектрическому шару в оболочке. В [15] рассмотрен цилиндр с диэлектрическим покрытием, а в [16–18] – приведено решение электродинамической задачи для слоистого цилиндра.

Настоящая работа продолжает исследования автора [19–21], в которых для построения решений краевых задач использован метод трансляционных матриц (transfer matrix) [22, 23]. В работе [24] найдена ЭМЭ в слоистом шаре. Этот краткий обзор показывает, что вопросы, связанные с нахождением энергетических характеристик ЭМП, и, в частности, тепловой энергии в слоистых объектах, исследованы недостаточно. Этим обосновывается актуальность настоящих исследований, целью которых является нахождение удобных для практического использования выражений для нахождения ЭМЭ в слоях радиально неоднородного цилиндра. Наряду с точным решением, которое предполагает использование функций Бесселя, приводятся результаты для длинноволнового приближения.

**3. Постановка задачи**

Рассматривается бесконечный цилиндр, состоящий из  $N$  соосных круговых цилиндрических поверхностей (рис. 1). Задача решается в координатах  $r, \varphi, z$  ( $r$  – радиальная координата (полярный радиус),  $\varphi$  – азимутальный угол круговой цилиндрической системы координат), связанной с центральной осью цилиндра  $Oz$ . Радиусы поверхностей цилиндров, которые являются поверхностями раздела слоев, обозначаются через  $r_j$  ( $j$  – номер слоя и  $j = 1, 2, \dots, N$ ); также используется обозначение  $a = r_N$ . Нумерация слоев начинается с центрального цилиндра ( $j = 1$ ), а для внешней среды индекс  $j = N + 1$ . Слои характеризуются различными относительными комплексными диэлектрическими и магнитными проницаемостями (ДП и МП)

$$\epsilon_j = \epsilon'_j + i\epsilon''_j = \epsilon'_j(1 + itg\delta_j),$$

$$\mu_j = \mu'_j + i\mu''_j = \mu_j(1 + itg\delta_{\mu_j}),$$

где  $i$  – мнимая единица,  $tg\delta_j = \epsilon''_j / \epsilon'_j = \sigma_j / (\omega\epsilon'_j)$ ,  $\sigma_j$  – проводимость,  $\omega = 2\pi c / \lambda$  – круговая частота,  $c$  – скорость света,  $\lambda$  – длина волны. Отметим, что в выражениях для комплексных ДП и МП используется как знак «+» [1–3], так и знак «-» [15, 25]. Для внешней среды принимаются действительные значения ДП и МП  $\epsilon_{med} = \epsilon_{N+1}$ ,  $\mu_{med} = \mu_{N+1}$ .

В изотропных средах при отсутствии токов и зарядов и выборе временной зависимости характеристик полей в виде  $\exp(i\omega t)$  уравнения Максвелла имеют вид

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\mu_0 \mu \omega} \text{rot} \mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{i}{\varepsilon_0 \varepsilon \omega} \text{rot} \mathbf{H}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{E}, \mathbf{H}$  – векторы электрической и магнитной напряженностей соответственно. Из уравнений (1) можно получить векторные уравнения Гельмгольца для напряженностей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$

$$\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = 0. \quad (2)$$

В уравнениях (2) и далее  $\Delta$  – оператор Лапласа, квадрат волнового числа  $k^2 = \varepsilon \mu \omega^2 / c^2 = \varepsilon \mu k_0^2$ , где  $c$  – скорость света,  $k_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$  – постоянная распространения в вакууме. Использование комплексных ДП и МП среды распространения ЭМИ приводит к тому, что показатель преломления  $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$  и волновое число  $k = (n\omega) / c$  также будут комплексными.

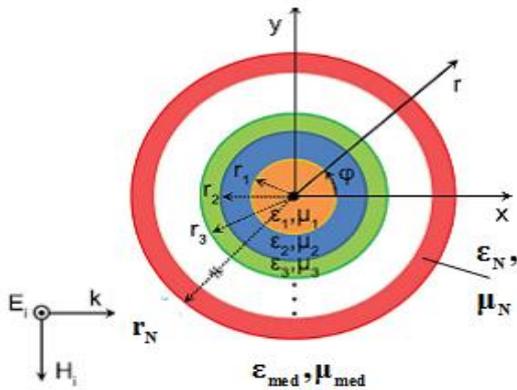


Рис. 1. Слоистый цилиндр под действием ЭМИ

**4. Результаты исследования. Нахождение напряженностей полей и электромагнитной энергии**

Решения волновых уравнений (2) в цилиндрических координатах выражаются через цилиндрические функции, причем при выборе функций Бесселя возможен некоторый произвол [1-3, 9, 15–18]. Предполагается, что на цилиндр падает плоская волна, распространяющаяся в положительном направлении оси  $x$ . В статье рассматривается случай  $TM$  поляризации, а результаты для  $TE$  поляризации могут быть получены с использованием принципа двойственности. Далее, следуя работе [17], в которой приведено аналитическое решение для металлического цилиндра с двухслойным и многослойным покрытием, для представления поля в слоях используются функции Бесселя целого порядка I-го и II-го рода  $J_n, Y_n$ , а для рассеянного поля – функции Ханкеля II-го рода целого порядка  $H_n^{(2)}$ , в общем случае комплексного аргумента. Напряженность электрического поля в падающей волне  $\mathbf{E}^{inc}$  представляется в виде суперпозиции цилиндрических волн [1–3]

$$\mathbf{E}^{inc} = \mathbf{i}_z E_z = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n J_n(k_0 r) \cos n\varphi. \quad (3)$$

Здесь и далее  $\delta_0 = 1$  и  $\delta_n = 2$  при  $n \geq 1$ . Поле в окружающем цилиндр пространстве представляет собой сумму падающего и рассеянного  $\mathbf{E}^{sca}$  полей и представляется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^{sca} = \\ &= \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n [J_n(k_0 r) + c_n H_n^{(2)}(k_0 r)] \cos n\varphi, \quad r > a, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $c_n$  – неизвестные коэффициенты ряда рассеяния.

Уравнения (2) должны выполняться для каждого слоя, и для  $j$ -го слоя ( $j > 1$ ) решения могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z E_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n [A_n^{(j)} J_n(k_j r) + B_n^{(j)} Y_n(k_j r)] \cos n\varphi, \\ r_{j-1} < r < r_j. \end{aligned} \quad (5)$$

Для внутреннего цилиндра поле должно быть ограничено при  $r = 0$ , и для  $j = 1$  решение (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z E_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n A_n^{(1)} J_n(k_1 r) \cos n\varphi, \\ 0 < r < r_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Напряженность магнитного поля в слоях выражается через напряженность электрического поля посредством уравнений Максвелла (1). В частности, для угловой компоненты вектора  $\mathbf{H}$  будем иметь:

$$\begin{aligned} H_\varphi^{(j)} = \frac{k_j}{i\omega\mu_j} \sum_{n=0}^{\infty} i^{-n} \delta_n [A_n^{(j)} J'_n(k_j r) + B_n^{(j)} Y'_n(k_j r)] \cos n\varphi, \\ r_{j-1} < r < r_j, r_0 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где штрих здесь и далее означает производные цилиндрических функций по своему аргументу.

На поверхностях раздела слоев должны выполняться условия непрерывности составляющих  $E_z^{(j)}, H_\varphi^{(j)}$  напряженностей электрического и магнитного полей:

$$\begin{aligned} E_z^{(j+1)} \Big|_{r=r_j} = E_z^{(j)} \Big|_{r=r_j}, \quad H_\varphi^{(j+1)} \Big|_{r=r_j} = H_\varphi^{(j)} \Big|_{r=r_j}, \\ 1 \leq j \leq N-1 \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} E_z^{(N)} \Big|_{r=r_N} = E_z^{ins} \Big|_{r=r_N} + E_z^{sca} \Big|_{r=r_N}, \\ H_\varphi^{(N)} \Big|_{r=r_N} = H_\varphi^{ins} \Big|_{r=r_N} + H_\varphi^{sca} \Big|_{r=r_N}. \end{aligned} \quad (9)$$

Подстановка представлений решений (4)–(6) в условия (8), (9) приводит для каждого  $n$  к семейству независимых систем алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов разложений в рядах

$$\begin{aligned} A_n^{(2)} J_n(k_2 r_1) + B_n^{(2)} Y_n(k_2 r_1) = A_n^{(1)} J_n(k_1 r_1), \\ (k_2 \mu_1) [A_n^{(2)} J'_n(k_2 r_1) + B_n^{(2)} Y'_n(k_2 r_1)] = (k_1 \mu_2) A_n^{(1)} J'_n(k_1 r_1), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_n^{(j+1)} J_n(k_{j+1} r_j) + B_n^{(j+1)} Y_n(k_{j+1} r_j) = \\
 & = A_n^{(j)} J_n(k_j r_j) + B_n^{(j)} Y_n(k_j r_j), \\
 & \quad j = 2, 3, \dots, N-1, \\
 & (k_{j+1} \mu_j) \left[ A_n^{(j+1)} J'_n(k_{j+1} r_j) + B_n^{(j+1)} Y'_n(k_{j+1} r_j) \right] = \\
 & = (k_j \mu_{j+1}) \left[ A_n^{(j)} J'_n(k_j r_j) + B_n^{(j)} Y'_n(k_j r_j) \right], \\
 & \quad J_n(k_0 r_N) + c_n H_n^{(2)}(k_0 r_N) = \\
 & = A_n^{(N)} J_n(k_N r_N) + B_n^{(N)} Y_n(k_N r_N), \\
 & (k_0 \mu_N) \left[ J'_n(k_0 r_N) + c_n H_n^{(2)'}(k_0 r_N) \right] = \\
 & = (k_N \mu_{N+1}) \left[ A_n^{(N)} J'_n(k_N r_N) + B_n^{(N)} Y'_n(k_N r_N) \right]. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Для нахождения коэффициентов разложений в [17] приведена формула, связывающая произвольные постоянные соседних слоев  $\gamma_{j+1}^{(n)} = [A_{j+1}^{(n)}, B_{j+1}^{(n)}]^T$ ,  $\gamma_j^{(n)} = [A_j^{(n)}, B_j^{(n)}]^T$  (верхний индекс «Т» означает транспонирование) посредством некоторой матрицы. В работах [19–21] аналогичная матрица получила название «матрицы перехода» от  $j$ -го к  $(j+1)$ -му слою

$$\gamma_{j+1}^{(n)} = T_j^{(n)} \gamma_j^{(n)}, \quad (11)$$

где элементы матрицы  $T_j^{(n)}$  в данной задаче в соответствии с (10) имеют вид

$$\begin{aligned}
 t_{11,j}^{(n)} &= \frac{\pi r_j}{2} \left\{ [k_{j+1} Y'_n(k_{j+1} r_j) J_n(k_j r_j) - (k_j \mu_{j+1} / \mu_j) Y_n(k_{j+1} r_j) J'_n(k_j r_j)] \right\} \\
 t_{12,j}^{(n)} &= \frac{\pi r_j}{2} \left\{ [k_{j+1} Y'_n(k_{j+1} r_j) Y_n(k_j r_j) - (k_j \mu_{j+1} / \mu_j) Y_n(k_{j+1} r_j) Y'_n(k_j r_j)] \right\} \\
 t_{21,j}^{(n)} &= \frac{\pi r_j}{2} \left\{ [(k_j \mu_{j+1} / \mu_j) J_n(k_{j+1} r_j) J'_n(k_j r_j) - k_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) J_n(k_j r_j)] \right\} \\
 t_{22,j}^{(n)} &= \frac{\pi r_j}{2} \left\{ [(k_j \mu_{j+1} / \mu_j) J_n(k_{j+1} r_j) Y'_n(k_j r_j) - k_{j+1} J'_n(k_{j+1} r_j) Y_n(k_j r_j)] \right\}
 \end{aligned}$$

Связь между постоянными  $j$ -го и  $(j+m)$ -го слоев дается формулой [19–23]

$$\gamma_{j+m}^{(n)} = T_n(r_{j+m-1}, r_j) \gamma_j^{(n)}, \quad (13)$$

где использовано обозначение

$$T(r_{j+m-1}, r_j) = T_{j+m-1} \cdot T_{j+m-2} \cdot \dots \cdot T_j. \quad (14)$$

Матрица  $T(r_j, r_{j+m-1})$  определяет трансляционную матрицу при переходе от  $j$ -го к  $(j+m)$ -му слою. Принимая в (14)  $j=1$ ,  $j+m=N$ , получим полную трансляционную матрицу при переходе от первого к последнему слою [19–24]:

$$T_N^{(n)}(r_N, r_1) = \prod_{j=1}^{N-1} T_{N-j}^{(n)}, \quad T_N^{(n)}(r_N, r_1) = \begin{bmatrix} t_{11}^{(n)} & t_{12}^{(n)} \\ t_{21}^{(n)} & t_{22}^{(n)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

С её помощью неизвестные постоянные для  $N$ -го слоя выражаются через произвольные постоянные первого слоя (в данном случае сплошного цилиндра)

с помощью формулы

$$\gamma_N^{(n)} = T_N^{(n)}(r_N, r_1) \gamma_1^{(n)}. \quad (16)$$

Для внутреннего цилиндра  $\gamma_1^{(n)} = [A_n^{(1)}, 0]^T$ , и решение в последнем слое будет зависеть только от постоянных  $A_n^{(1)}$ . Для внешней области неизвестными будут коэффициенты ряда рассеивания  $c_n$  и  $\gamma_{N+1}^{(n)} = [0, c_n]^T$ . Следовательно, при использовании трансляционных матриц остается только две группы неизвестных коэффициентов:  $A_n^{(1)}$ ,  $c_n$ . Для нахождения ряда рассеивания необходимы только коэффициенты  $c_n$ , определяющие амплитуды парциальных волн, а значения коэффициентов  $A_n^{(1)}$  дают возможность найти коэффициенты разложения напряженностей в слоях. В этом случае система линейных алгебраических уравнений для их определения аналогична соответствующей системе для сплошного цилиндра, и в развернутом виде запишется как

$$\begin{aligned}
 & [t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a)] A_n^{(1)} - \\
 & - H_n^{(2)}(k_0 a) c_n = J_n(k_0 a), \\
 & (k_N / \mu_N) \times \\
 & \times [t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a)] A_n^{(1)} - \\
 & - (k_0 / \mu_{N+1}) (H_n^{(2)'})'(k_0 a) c_n = \\
 & = (k_0 / \mu_{N+1}) J'_n(k_0 a). \quad (17)
 \end{aligned}$$

(12) Из системы (17) находим

$$\begin{aligned}
 A_n^{(1)} &= \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)}, \\
 c_n &= \Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta^{(n)} &= (k_N / \mu_N) H_n^{(2)}(k_0 a) \times \\
 & \times [t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a)] - \\
 & - (k_0 / \mu_{N+1}) H_n^{(2)'}(k_0 a) \times \\
 & \times [t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a)],
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_1^{(n)} &= (k_0 / \mu_{N+1}) \times \\
 & \times J'_n(k_0 a) H_n(k_0 a) - \\
 & - (k_0 / \mu_{N+1}) J_n(k_0 a) H'_n(k_0 a),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta_2^{(n)} &= (k_0 / \mu_{N+1}) J'_n(k_0 a) \times \\
 & \times [t_{11}^{(n)} J_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_N a)] - \\
 & - (k_N / \mu_N) J_n(k_0 a) \times \\
 & \times [t_{11}^{(n)} J'_n(k_N a) + t_{21}^{(n)} Y'_n(k_N a)]. \quad (19)
 \end{aligned}$$

Теперь для разложений напряженности в слоях и рассеянном поле можно записать

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z E_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[ \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] J_n(k_1 r) \cos n\varphi, \quad 0 < r < r_1, \quad (20)$$

$$\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z E_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[ \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] \left[ t_{11}^{(n)} J_n(k_j r) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_j r) \right] \cos n\varphi, \quad r_{j-1} < r < r_j, \quad j > 1, \quad (21)$$

$$\mathbf{E}^{sca} = \mathbf{i}_z \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[ \Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] H_n^{(2)}(k_0 r) \cos n\varphi, \quad r > a. \quad (22)$$

Вектор напряженности магнитного поля в силу уравнений (1) определяется соотношениями

$$\mathbf{H} = -\frac{i}{\mu_0 \mu \omega} \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \mathbf{i}_r - \frac{\partial E_z}{\partial r} \mathbf{i}_\varphi \right],$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = \frac{1}{\mu_0 \mu \omega} \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n+1} \delta_n \left[ \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] \times \left[ \frac{1}{r} J_n(k_1 r) n \sin n\varphi \mathbf{i}_r + J_n'(k_1 r) \cos n\varphi \mathbf{i}_\varphi \right], \quad 0 < r < r_1, \quad (23)$$

$$\mathbf{H}^{(j)} = \frac{1}{\mu_0 \mu_j \omega} \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n+1} \delta_n \left[ \Delta_1^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] \times \left\{ \frac{1}{r} \left[ t_{11}^{(n)} J_n(k_j r) + t_{21}^{(n)} Y_n(k_j r) \right] n \sin n\varphi \mathbf{i}_r + \left[ t_{11}^{(n)} J_n'(k_j r) + t_{21}^{(n)} Y_n'(k_j r) \right] \cos n\varphi \mathbf{i}_\varphi \right\}, \quad r_{j-1} < r < r_j. \quad (24)$$

Аналогично рассматривается задача и для случая *TM* поляризации. Полученные ряды полностью решают задачу взаимодействия плоской волны со слоистым цилиндром и позволяют найти все необходимые характеристики.

В общем случае предполагается, что ДП материалов слоев является комплексной, и это означает, что имеют место потери ЭМЭ. Расстояние  $\Delta_0$ , при прохождении которого поле ослабевает в  $e$  раз, принято называть глубиной проникновения поля в среду, т. е. имеет место соотношение  $\alpha \Delta_0 = 1$ , где  $\alpha$  – коэффициент ослабления ЭМИ [25]. Тогда глубина проникновения составит: для диэлектриков

$$\Delta_0 = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{1}{2} \varepsilon' \mu' \left( \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta} - 1 \right)} \approx \frac{\text{tg} \delta}{2\omega} \sqrt{\varepsilon' \mu'} = \frac{\lambda \text{tg} \delta}{4\pi} \sqrt{\varepsilon' \mu'}, \quad (25)$$

и для металлов

$$\Delta_0 = \sqrt{2 / (\omega \mu' \sigma)} = \sqrt{\lambda / (\pi \mu' \sigma)}. \quad (26)$$

Таким образом, при постоянной частоте ЭМИ глубина его проникновения определяется физиче-

скими характеристиками среды и зависит от частоты: чем больше частота, тем меньше  $\Delta_0$ . Следует отметить, что для слоистого материала может возникнуть ситуация, когда поле в слоях, удаленных от поверхности облучения, будет практически отсутствовать.

При известных коэффициентах  $c_n$  ряда рассеяния ( $r > a$ )

$$\mathbf{E}^{sca} = \mathbf{i}_z \sum_{n=1}^{\infty} i^{-n} \delta_n \left[ \Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)} \right] H_n^{(2)}(k_0 r) \cos n\varphi \quad (27)$$

сечение рассеяния  $\sigma_s$  структуры находится по формуле [2, 3]

$$\sigma_s = \frac{4}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n |c_n|^2 = \frac{4}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \left[ \left[ \Delta_2^{(n)} / \Delta^{(n)} \right]^2 \right]. \quad (28)$$

В работе [26] показано, что для электрически тонких слоев [10] (малых значениях параметров дифракции) при выполнении сильных неравенств в ряде рассеяния (25) доминирует первый коэффициент при  $n = 0$ .

Изменяясь во времени, поле может отдавать или отбирать энергию какому-либо неэлектромагнитному процессу. Величину ЭМЭ, запасённую в некотором объёме  $V$ , принято обозначать буквой  $W$ , а ее объемную плотность  $w$  определять как  $w = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} (\Delta W / \Delta V)$ . В макроскопической теории ЭМП существует связь между векторами поля и его энергетическими характеристиками. Так, объемная плотность ЭМЭ представляет собой сумму электрической и магнитной энергий, и для  $j$ -го слоя можно записать

$$w_j = w_e^{(j)} + w_m^{(j)}, \quad (29)$$

где  $w_e^{(j)}, w_m^{(j)}$  – объемные плотности энергии электрического и магнитного полей соответственно, и так как векторы электрической  $\mathbf{D}_j$  и магнитной  $\mathbf{B}_j$  индукций коллинеарны с векторами напряженностей  $\mathbf{E}_j$  и  $\mathbf{H}_j$ , то

$$w_e^{(j)} = \frac{1}{2} (\mathbf{D}_j \cdot \mathbf{E}_j) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\varepsilon_j| \cdot |\mathbf{E}_j|^2, \quad w_m^{(j)} = \frac{1}{2} (\mathbf{B}_j \cdot \mathbf{H}_j) = \frac{1}{2} \mu_0 |\mu_j| \cdot |\mathbf{H}_j|^2. \quad (30)$$

Таким образом, плотность энергии в слоях зависит от координат  $r, \varphi$  и изменяется во времени по закону  $\exp(i2\omega t)$ , т. е. с частотой, вдвое большей, чем частота возбуждающего поля. Энергия ЭМП, запасённая в объёме  $V$ , вычисляется по следующей формуле:

$$W = \int_V w dv = \frac{1}{2} \int_V (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H}) dv. \quad (31)$$

Вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi}$  определяет плотность потока электромагнитной энергии, которая равна значна плотности мощности, и указывает направле-

ние движения энергии, а плотность энергии в слое зависит от координат  $r, \varphi$

$$\mathbf{\Pi} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}. \quad (32)$$

Прохождение ЭМИ через вещество сопровождается его поглощением в данной среде, т.е. потерей энергии волны. Практический интерес представляют собой тепловые потери в веществе. Долю энергии ЭМП, которая расходуется на нагрев тела, определяет  $\text{tg} \delta$ , а интенсивность нагрева  $q$  определяется формулой

$$q = |E|^2 \omega^2 \varepsilon' \text{tg} \delta = |E|^2 \omega^2 \varepsilon'' = |E|^2 (2\pi / \lambda)^2 \varepsilon''. \quad (33)$$

В общем случае для вычисления квадратов модулей напряженностей необходимо возводить ряды (20)–(24) в квадрат. Но для электрически тонких слоев формулы существенно упрощаются, поэтому далее считаем центральный цилиндр и последующие слои электрически тонкими. Это означает [10] выполнение сильных неравенств  $k_1 r_1 \ll 1, k_2 r_2 \ll 1, \dots, k_N r_N \ll 1, k_0 r_j \ll 1$ . Учитывая результаты работы [26], достаточно ограничиться случаем  $n = 0$ . В этом случае можно воспользоваться разложениями функций Бесселя  $J_0(z), Y_0(z), H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iY_0(z)$  в ряды при малых значениях аргумента. С точностью до бесконечно малых высшего порядка для функций и их производных имеют место представления [27]:

$$J_0(z) = 1 - z^2 / 4,$$

$$Y_0(z) = (2 / \pi) \{ [\ln(z/2) + \gamma] (1 - z^2 / 4) + z^2 / 4 \},$$

$$H_0^{(2)} = 1 - z^2 / 4 - i(2 / \pi) \times \\ \times \{ [\ln(z/2) + \gamma] (1 - z^2 / 4) + z^2 / 4 \},$$

$$J_0'(z) = -z / 2,$$

$$Y_0'(z) = (2 / \pi) \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \},$$

$$Y_0''(z) = (2 / \pi) \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \},$$

$$(H_0^{(2)}(z))' = -z / 2 - i(2 / \pi) \times \\ \times \{ (1/z) + z/4 - [\ln(z/2) + \gamma] (z/2) \}, \quad (34)$$

где константа  $\gamma = 0,5772156649 \dots$  [27].

В этом случае элементы матриц перехода (12)  $T_j^{(0)}$  и определители (19) принимают вид

$$t_{11,j}^{(0)} = 2\mu_0 / (\pi r_j), \quad t_{21,j}^{(0)} = 0, 5k_0^2 \mu_0 r_j (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j),$$

$$t_{12,j}^{(0)} = [(2\mu_0) / (\pi^2 r_j)] \ln(\varepsilon_j / \varepsilon_{j+1}),$$

$$t_{22,j}^{(0)} = 2\mu_0 / (\pi r_j), \quad (35)$$

$$\Delta^{(0)} = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}, \quad \Delta_1^{(0)} = b_1 \alpha_{22} - b_2 \alpha_{21},$$

$$\Delta_2^{(0)} = b_2 \alpha_{11} - b_1 \alpha_{21}, \quad (36)$$

где

$$\alpha_{11} = \{ t_{11}^{(0)} [1 - (k_N a)^2 / 4] + [2t_{21}^{(0)} / \pi] \times \\ \times [(\ln(k_N a / 2) + \gamma) (1 - (k_N a)^2 / 4) + (k_N a)^2 / 4] \},$$

$$\alpha_{12} = [1 - (k_0 a)^2 / 4] - i(2 / \pi) \times \\ \times \{ [\ln(k_0 a / 2) + \gamma] [1 - (k_0 a)^2 / 4] + (k_N a)^2 / 4 \},$$

$$\alpha_{21} = (k_N \mu_{N+1}) \\ \{ [-t_{11}^{(0)} k_N a / 2] + t_{21}^{(0)} (2 / \pi) \times \\ \times [1 / (k_N a) + k_N a / 2 - [\ln(k_N a / 2) + \gamma] k_N a / 2] \},$$

$$\alpha_{22} = (k_0 \mu_N) \{ -k_0 a / 2 - i(2 / \pi) \times \\ \times [1 / (k_0 a) + k_0 a / 4 - (k_0 a / 2) (\ln(k_0 a / 2) + \gamma)] \},$$

$$b_1 = 1 - (k_0 a)^2 / 4, \quad b_2 = -(k_0 k_N \mu_N a) / 2. \quad (37)$$

Тогда выражения для сечения рассеяния (26) и напряженностей в слоях (20)–(24) будут

$$\sigma_s = (4 / k_0) \left| \left[ \Delta_2^{(0)} / \Delta^{(0)} \right]^2 \right|, \quad (38)$$

$$\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{i}_z \mathbf{E}_z^{(1)} = \mathbf{i}_z \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)}, \quad 0 < r < r_1, \quad (39)$$

$$\mathbf{E}^{(j)} = \mathbf{i}_z \mathbf{E}_z^{(j)} = \mathbf{i}_z \left[ \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \times \\ \times \left[ t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(k_j r) \right], \\ r_{j-1} < r < r_j, \quad (40)$$

$$\mathbf{H}^{(1)} = 0, \quad 0 < r < r_1,$$

$$\mathbf{H}^{(j)} = \frac{2}{\pi \mu_0 \mu_j \omega} \left[ \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] t_{21,j}^{(0)} \ln(k_j r) \mathbf{i}_\varphi, \\ r_{j-1} < r < r_j. \quad (41)$$

В свою очередь плотности электромагнитной энергии в слоях и объемная плотность тепловых источников будут равны

$$w_e^{(1)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\varepsilon_1| \cdot \left| \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right|^2,$$

$$w_e^{(j)} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 |\varepsilon_j| \times \\ \times \left| \left[ \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \left[ t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right] \right|^2, \quad (42)$$

$$w_m^{(j)} = \frac{1}{2 \mu_0 |\mu_j| \omega} \cdot \left| \left[ \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right|^2, \quad (43)$$

$$q^{(1)} = \left| \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right|^2 \omega^2 \varepsilon' \text{tg} \delta, \quad (44)$$

$$q^{(j)} = \\ = \left| \left[ \Delta_1^{(0)} / \Delta^{(0)} \right] \left[ t_{11,j}^{(0)} + t_{21,j}^{(0)} (2 / \pi) \ln(\pi k_j r) \right] \right|^2 \omega^2 \varepsilon' \text{tg} \delta. \quad (45)$$

## 5. Выводы

Построено решение задачи взаимодействия плоских электромагнитных волн со слоистым цилин-

дром. Получены расчетные соотношения для нахождения характеристик ЭМП в слоях, и, в частности, его энергии. В замкнутом виде построено приближенное решение для электрически тонких слоев. Это позволяет определять мощность внутренних источников тепловой энергии для проведения последующих теплофизических расчетов. Замкнутые формулы оказываются особенно удобными для нахождения температурных полей в слоистых наночастицах из золота и серебра. Таки частицы находят все более широкое применение в лазерной термотерапии для диагностики и лечения онкологических заболеваний.

#### Література

1. Born, M. Principles of optics. 7th ed. [Text] / M. Born., E. Wolf. – Cambridge: Cambridge University Press, 1999. – 987 p.
2. Rothwell, E. J. Electromagnetics. 2nd ed. [Text] / E. J., Rothwell, M.J. Cloud. – CRC Press, Taylor & Francis Group, 2009. – 540 p.
3. Борен, К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами [Текст] / К. Борен, Д. Хафман – М.: Мир. – 1980. – 345 с.
4. Chew, W.C. Waves and fields in inhomogeneous anisotropic media [Text] / W.C. Chew. – New York: Van Nostrand, 1990. – 611 p.
5. Tai, C.T. Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. 2nd ed. [Text] / C.T. Tai. – New York: IEEE Press, Piscataway, New Jersey. 1994. – 547 p.
6. Aden, A.L. Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres [Text] / A.L. Aden, M. Kerker // Journal of Applied Physics. – 1951. – Vol. 22, Issue 10. – P. 1242–1246. doi: 10.1063/1.1699834
7. Wu, Z. S. Electromagnetic scattering for multilayered spheres. Recursive algorithm [Text] / Z. S. Wu, Y. P. Wang // Radio Science. – 1991. – Vol. 26, Issue 6. – P. 1393–1401. doi: 10.1029/91rs01192
8. Tarento, R. J. Mie scattering of magnetic spheres [Text] / R. J. Tarento, K. H. Bennemann, P. Joyes, J. Van de Walle // Physical Review E. – 2004. – Vol. 69, Issue 2. – P. 026606, 1–5. doi: 10.1103/physreve.69.026606
9. Barber, P. W. Light scattering by particles: computational methods [Text] / P. W. Barber, S. C. Hill. – Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 1990. – 261 p.
10. Бреховских, Л. М. Волны в слоистых средах [Текст] / Л. М. Бреховских. – М.: Наука, 1973. – 343 с.
11. Афанасьев, А. М. Математическое моделирование взаимодействия СВЧ излучения с влагосодержащими плоскими слоистыми средами. Часть 1 [Текст] / А. М. Афанасьев, В. В. Подгорный, Б. Н. Сиплиевый, В. В. Яцышен // Известия вузов. Электромеханика. – 2001. – № 2. – С. 14–21.
12. Gurwich, I. Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure [Text] / I. Gurwich, M. Kleiman, N. Shiloah et. al. // Applied optics. – 2000. – Vol. 39, Issue 3. – P. 470–477. doi: 10.1364/ao.39.000470
13. Roth, J. Scattering and extinction sections for a spherical particles coated with an oriented molecular layer [Text] / J. Roth, M. J. Digman // Journal of the Optical Society of America. – 1973. – Vol. 63, Issue 3. – P. 308–311. doi: 10.1364/josa.63.000308
14. Лопатин, В. Н. Введение в оптику взвесей клеток [Текст] / В. Н. Лопатин, Ф. Я. Сидько. – Новосибирск: Наука, 1988. – 240 с.
15. Величко, Е. А. Влияние диэлектрического покрытия на рассеяние плоской электромагнитной волны металлическим цилиндром [Текст] / Е. А. Величко, А. П. Николаенко // Радиофизика и радиоастрономия. – 2013. – Т. 16, № 1. – С. 67–74.
16. Афанасьев, А. М. Слоистый цилиндр во внешнем гармоническом электромагнитном поле [Текст] / А. М. Афанасьев, В. В. Подгорный, Б. Н. Сиплиевый // Изв. вузов. Электромеханика. – 2013. – № 3. – С. 5–11.
17. Tricarico, S. Scattering cancellation by metamaterial cylindrical multilayers [Text] / S. Tricarico, F. Bilotti, L. Vegni // Journal of the European Optical Society: Rapid Publications. – 2009. – Vol. 4. – P. 0921-1–0921-10. doi: 10.2971/jeos.2009.09021
18. Qiu, Ch.-W. Electromagnetic Scattering Properties in a Multilayered Metamaterial Cylinder [Text] / Ch.-W. Qiu, H.-Y. Yao, S.-N. Burocur, S. Zouhdi, L.-W. Li // IEICE Transactions on Communications. – 2007. – Vol. E90-B, Issue 9. – P. 2423–2429. doi: 10.1093/ietcom/e90-b.9.2423
19. Гречко, Л. Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багатосаровій кулі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісн. Київс. ун-ту. Сер. фіз.-мат. – 2004. – № 3. – С. 376–384.
20. Гречко, Л. Г. Багатосаровий еліпсоїд в електричному полі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: фіз.-мат. науки. – 2004. – № 1. – С. 386–394.
21. Гречко, Л. Г. Поляризованість структурно-неоднорідних кульових частинок [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Д. Л. Водопріянов, С. В. Шостак // – Вісн. Київс. ун-ту. Сер.: фіз.-мат науки. – 2007. – № 1. – С. 207–212.
22. He, B. Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System [Text] / B. He, X. Rui, H. Zhang // Mathematical Problems in Engineering. – 2012. – Vol. 2012. – P. 1–9. doi: 10.1155/2012/393204
23. Khorasani, S. Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method [Text] / S. Khorasani, A. Adibi // Electronic J. of Differential Equations. – 2003. – Vol. 2003, Issue 79. – P. 1–18.
24. Породько, Л. В. Электродинамическая энергия в сферических слоистых наночастицах [Текст] / Л. В. Породько, Л. Б. Лерман // Технологический аудит и резервы производства. – 2013. – Т. 6, № 1 (14). – С. 41–44. – Режим доступа: <http://journals.urau.ru/tarp/article/view/19549/17221>
25. Черенков, В. С. Техническая электродинамика: Конспект лекций. [Текст] / В. С. Черенков, А. М. Иваницкий. – Одесса: ОНАЗ им. А.С. Попова, 2006. – 160 с.
26. Silveirinha, M. G. Parallel Plate Metamaterials for Cloaking Structures [Text] / M. G. Silveirinha, A. Alu, N. Engheta // Physical Review E. – 2007. – Vol. 75, Issue 036603. – P. 1–16. doi: 10.1103/physreve.75.036603
27. Справочник по специальным функциям [Текст] / под ред. А. Абрмовича, И. Стиган. – М.: Наука, 1979 – 832 с.

#### References

1. Born, M., Wolf, E. (1999). Principles of optics. 7th ed. Cambridge University Press. Cambridge, 987.
2. Rothwell, E. J., Cloud, M. J. (2009). Electromagnetics. 2nd ed. CRC Press, Taylor & Francis Group, 540.
3. Bohren C, Huffman, D. (1983). Absorption and Scattering of Light by Small Particles. New York: Wiley, 545.
4. Chew, W. C. (1990). Waves and fields in inhomogeneous anisotropic media. New York: Van Nostrand, 611.
5. Tai, C. T. (1994). Dyadic Green's functions in electromagnetic theory. 2nd ed. New York, IEEE Press, Piscataway.
6. Aden, A. L., Kerker, M. (1951). Scattering of electromagnetic waves from two concentric spheres. Journal of Applied Physics, 22 (10), 1242–1246. doi: 10.1063/1.1699834
7. Wu, Z. S., Wang, Y. P. (1991). Electromagnetic scattering for multilayered sphere: Recursive algorithms. Radio Science, 26 (6), 1393–1401. doi: 10.1029/91rs01192

8. Tarento, R. J., Bennemann, K. H., Joyes, P., Van de Wabble, J. (2004). Mie scattering of magnetic spheres. *Physical Review E*, 69 (2), 026606, 1–5. doi: 10.1103/physreve.69.026606
9. Barber, P. W., Hill S. C. (1990). *Light scattering by particles: computation methods*. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 261.
10. Brehovskih, L. M. (1973). *Volny v sloistyh sredah*. Moscow: Nauka, 343.
11. Afanas'ev, A. M., Podgorny, V. V., Siplivy, B. N., Yacyshen, V. V. (2001) *Matematicheskoe modelirovanie vsaimodeistviya SVC islucheniya s wlagosoderzhaschimi ploskimi sloistymi sredami. Chast 1. Isvestiya wusov. Electrotechnika*, 2, 14–21.
12. Gurwich, I., Kleiman, M., Shiloah, N., Cohen, A. (2000). Scattering of electromagnetic radiation by multilayered spheroidal particles: recursive procedure. *Applied Optics*, 39 (3), 470–477. doi: 10.1364/ao.39.000470
13. Roth, J., Dignam, M. J. (1973). Scattering and extinction cross sections for a spherical particle coated with an oriented molecular layer. *Journal of the Optical Society of America*, 63 (3), 308–311. doi: 10.1364/josa.63.000308
14. Lopatin, V. N., Sidko, F. Ya. (1988). *Wvedenie v optiku vsesey kletok*. Novosibirsk: Nauka, 240.
15. Velichko, E. A., Nikolayenko, A. P. (2013). Vliyanie dieletricheskogo pokrytiya na rassseyanie ploskoy elektromagnitnoy volny metallicheskim cylindrom. *Radiophysika i radioastronomiya*, 16 (1), 67–74.
16. Afanas'ev, A. M., Podgorny, V. V., Siplivi, B. N. (2013). Sloisty cylinder vo vneshnem garmonicheskom elektromagnitnom pole. *Isvestiya wusov. Electrotechnika*, 3, 5–11.
17. Tricarico, S., Bilotti, F., Vegni, L. (2009). Scattering cancellation by metamaterial cylindrical multilayers. *Journal of the European Optical Society: Rapid Publications*, 4, 0921-1–0921-10. doi: 10.2971/jeos.2009.09021
18. Qiu, C.-W., Yao, H.-Y., Burokur, S.-N., Zouhdi, S., Li, L.-W. (2007). Electromagnetic Scattering Properties in a Multilayered Metamaterial Cylinder. *IEICE Transactions on Communications*, E90-B (9), 2423–2429. doi: 10.1093/ietcom/e90-b.9.2423
19. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Rossiuyvannya elektromagnitnogo vyprominuvannya na bagatosharoviy kuli. *Visn. Kyivs. un-tu. Ser.: phys.-math.*, 3, 376–384.
20. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Shkoda, N. G. (2004). Bagatisharovy elipsoid v electrychnomu poli. *Visn. Kyivs. un-tu. Ser.: phys.-math.*, 1, 386–394.
21. Grechko, L. G., Lerman, L. B., Vodopyanov, S. V., Sostak, S. V. (2007). Polyarisovnost struktumno-neodnorodnykh kul'yovych chastinok. *Visn. Kyivs. un-tu. Ser.: phys.-math.*, 1, 207–212.
22. He, B., Rui, X., Zhang, H. (2012). Transfer Matrix Method for Natural Vibration Analysis of Tree System. *Mathematical Problems in Engineering*, 2012, 1–19. doi: 10.1155/2012/393204
23. Khorasani, S., Adibi, A. (2003). Analytical solution of linear ordinary differential equations by differential transfer matrix method. *Electronic J. of Differential Equations*, 2003 (79), 1–18.
24. Porodko, L. V., Lerman, L. B. (2013). Electrodynamic energy in spherical nanoparticles layered. *Technology audit and production reserves*, 6/1 (14), 41–44. Available at: <http://journals.uran.ua/tarp/article/view/19549/17221>
25. Cherenkov, V. S., Ivanicky, A. M. (2006). *Tehnicheskaya elektrodynamika: Konspekt lekcy*. Odesa: ONAS im. A. S. Popova, 160.
26. Silveirinha, M. G., Alu, A., Engheta, N. (2007). Parallel Plate Metamaterials for Cloaking Structures. *Physical Review E*, 75 (036603), 1–16. doi: 10.1103/physreve.75.036603
27. Abromovich, A., Stigan, I. (Eds.) (1979). *Spravochnik po special'nykh funktsijam*. Moscow: Nauka, 832.

*Рекомендовано до публікації д-р фіз.-мат наук Розенбаум В. М.  
Дата надходження рукопису 23.11.2015*

**Лерман Леонід Борисович**, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Інститут хімії поверхні ім. О. О. Чуйка НАН України, вул. Генерала Наумова, 17, м. Київ, Україна, 02124  
E-mail: llerman@yandex.ru