

354 p. – Available at: <https://aiecp.files.wordpress.com/2012/07/1-0-1-k-j-astrom-pid-controllers-theory-design-and-tuning-2ed.pdf>

3. Morari, M. Robust process control [Text] / M. Morari, E. Zafriro. – New Jersey: Prentice Hall-Englewood Cliffs, 1989. – 479 p.

4. Vilanova, R. IMC based robust PID design: tuning guidelines and automatic tuning [Text] / R. Vilanova // Journal of Process Control. – 2008. – Vol. 18, Issue 1. – P. 61–70. doi: 10.1016/j.jprocont.2007.05.004

5. Alcántara, S. Generalized Internal Model Control for balancing input/output disturbance response [Text] / S. Alcántara, C. Pedret, R. Vilanova, S. Skogestad // Industrial & Engineering Chemistry Research. – 2011. – Vol. 50, Issue 19. – P. 11170–11180. doi: 10.1021/ie200717z

6. Пат. 67725 UA. Спосіб автоматического регулювання параметрів інерційних об'єктів з запаздываниєм [Текст] / Ковриго Ю. М., Коновалов М. А., Бунке А. С. – Промышленная собственность. 2012. Бюл. № 5.

7. Ковриго, Ю. М. Модернизация системы управления тепловой нагрузкой прямоточного котлоагрегата ТЭС с использованием динамического корректора [Текст] / Ю. М. Ковриго, М. А. Коновалов, А. С. Бунке // Теплоэнергетика. – 2012. – № 10. – С. 43–49.

8. Shinsky, F. G. PID-deadtime control of distributed processes [Text] / F. G. Shinsky // Control Engineering Practice. – 2001. – Vol. 9, Issue 11. – P. 1177–1183. doi: 10.1016/S0967-0661(01)00063-6

## References

1. O'Dwyer, A. (2010). Handbook of PI and PID controller tuning rules. ICP, 623.

2. Astrom, K. J., Hagglund, T. (1995). PID controllers: Theory, design, and tuning. NC: Instrument Society of America, Research Triangle Park, 354. Available at: <https://aiecp.files.wordpress.com/2012/07/1-0-1-k-j-astrom-pid-controllers-theory-design-and-tuning-2ed.pdf>

3. Morari, M., Zafiriou, E. (1989). Robust process control. New Jersey: Prentice Hall-Englewood Cliffs, 479.

4. Vilanova, R. (2008). IMC based Robust PID design: Tuning guidelines and automatic tuning. Journal of Process Control, 18 (1), 61–70. doi: 10.1016/j.jprocont.2007.05.004

5. Alcántara, S., Pedret, C., Vilanova, R., Skogestad, S. (2011). Generalized Internal Model Control for Balancing Input/Output Disturbance Response. Industrial & Engineering Chemistry Research, 50 (19), 11170–11180. doi: 10.1021/ie200717z

6. Kovrygo, J. M., Konovalov, M. A., Bunke, A. S. (2012). Pat. 67725 UA. Sposob avtomaticheskogo regulirovaniya parametrov inercionnyh obectov s zapazdyvaniem. Promyshlennaja sobstvennost. № 5.

7. Kovrygo, J. M., Konovalov, M. A., Bunke, A. S. (2012). Modernizacija sistemy teplovoj nagruzkoj prjamochnogo kotloagregata TES s ispolzovaniem dinamicheskogo korreктора. Teploenergetika, 10, 43–49.

8. Shinsky, F. G. (2001). PID-deadtime control of distributed processes. Control Engineering Practice, 9 (11), 1177–1183. doi: 10.1016/S0967-0661(01)00063-6

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук, професор Трезуб В. Г.  
Дата надходження рукопису 24.12.2015*

**Ковриго Юрий Михайлович**, кандидат технических наук, профессор, кафедра автоматизации теплоэнергетических процессов, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056

**Бунке Александр Сергеевич**, кандидат технических наук, доцент, кафедра автоматизации теплоэнергетических процессов, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056

**Новиков Павел Валерьевич**, аспирант, кафедра автоматизации теплоэнергетических процессов, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», пр. Победы, 37, г. Киев, Украина, 03056

УДК 621.01:531

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.58823

## ОЦІНКА ЕФЕКТИВНОСТІ ІНТЕГРОВАНОГО ЧИСЕЛЬНОГО МЕТОДУ РЕАЛІЗАЦІЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДИНАМІКИ МЕХАНІЧНОЇ КОЛІВАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

© П. В. Дяченко

*Виконано порівняльний аналіз точності знаходження розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь у часовій області для розробленого інтегрованого, та низки відомих класичних чисельних методів. На тестових модельних прикладах показано високу ефективність запропонованого чисельного методу, стосовно задачі аналізу динамічних процесів механічних коливальних систем*

**Ключові слова:** математична модель, часова область, коливальна система, чисельний метод, похибка обчислення

*A comparative analysis of the accuracy solutions of linear differential equations in the time domain to the developed integrated and a number of famous classical numerical methods is done. Test model examples show the high efficiency of the proposed numerical method regarding problems of analysis of dynamic processes of mechanical oscillatory systems*

**Keywords:** mathematical model, time domain, oscillatory system, numerical method, calculation error

### 1. Вступ

На сьогодні існує велика кількість класичних, та розроблених спеціалізованих чисельних методів розв'язування систем звичайних диференціальних рівнянь, за допомогою яких можна здійснювати моделювання динаміки коливальних процесів механічних систем як у часовій так і у частотній областях. Однак, не дивлячись на це, розробка чисельного методу реалізації математичної моделі, який би у повній мірі відповідав вузьким задачам дослідження і враховував специфічні властивості досліджуваної моделі у кожному випадку дослідження є задачею актуальною. Вибір існуючого чи розробка нового чисельного методу визначається самим дослідником, а самі ці методи, у свою чергу, можуть мати різні властивості (збіжність, точність, стійкість, обчислювальна складність). Неправильний вибір методу розв'язування системи диференціальних рівнянь може призвести до різкого збільшення часу аналізу динаміки, отриманню якісно невірному результату чи взагалі до збою програми, у випадку, наприклад розбіжного ітераційного процесу.

### 2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

У більшості випадків застосувань (стандартні програми моделювання динаміки механічних систем, систем автоматизації інженерних розрахунків, тощо) використовуються методи Гіра, що ґрунтуються на багатокрокових формулах диференціювання назад [1], однокрокові явні і неявні багатостадійні методи Рунге-Кутта та багато інших [2].

У даному дослідженні, для проведення порівняльного аналізу були обрані класичні чисельні методи розв'язування диференціальних рівнянь у часовій області, такі як метод трапецій, метод Гіра і одна з модифікацій методів сімейства Рунге-Кутта [2].

Метод трапецій є одним з найпростіших неявних методів чисельного розв'язування систем диференціальних рівнянь, і на сьогодні використовується майже у всіх стандартних програмах моделювання динаміки механічних систем, таких наприклад, як універсальна програмна система кінцево-елементного аналізу ANSYS [3], потужного інструменту для проведення комп'ютерного інженерного аналізу (CAE) проєктованих виробів MSC NASTRAN, тощо. Популярність цього методу пояснюється простотою реалізації, крім того, метод має другий порядок точності, що є прийнятним для практичних задач (похибка чисельного розв'язку зменшується пропорційно квадрату часового кроку) [4].

Метод Гіра є основним методом аналізу перших процесів у програмах моделювання динаміки механічних систем [5]. Цей метод реалізується за допомогою алгоритму, що забезпечує автоматичний вибір кроку і порядку методу, в залежності від заданої похибки. Різницеві схеми методу Гіра являють собою неявні багатокрокові формули, відомі як формули диференціювання назад [2]. На практиці використовуються DBF-методи порядку точності від першого до шостого.

Метод RADAU5 є одним з найбільш вживаних методів типу Рунге-Кутта [2], який ґрунтується на тристадійному, неявному методі Рунге-Кутта п'ятого порядку точності. Особливістю цього методу є те, що при його використанні розв'язується система алгебраїчних рівнянь, розмірність якої у тричі перевищує розмірність системи диференціальних рівнянь заданої математичної моделі.

### 3. Мета і задачі дослідження

У роботі [6] на основі модифікації та спеціалізації існуючих чисельних методів було запропоновано інтегрований метод реалізації математичної моделі [7], що дозволяє знайти її розв'язок як у часовій так і частотній областях одночасно. Вказана математична модель являє собою систему 14-ти лінійних диференціальних рівнянь другого порядку, що описують поздовжньо-поперечні та радіальні коливання елементів одноступінчастої евольвентної зубчастої передачі. Тестування розробленого методу є безпосереднім способом підтвердження його достовірності, роботоздатності та ефективності. У даному дослідженні, з метою визначення основних властивостей запропонованого чисельного методу, проводиться порівняльний аналіз та оцінка його ефективності, шляхом тестування у часовій області. Тестування методу здійснюється на модельному прикладі, шляхом порівняння розв'язків системи диференціальних рівнянь отриманих аналітично, з розв'язками отриманими тестованим, та іншими відомими чисельними методами.

### 4. Методика та результати дослідження ефективності інтегрованого методу розв'язування систем диференціальних рівнянь

Для оцінки ефективності розробленого інтегрованого методу, застосуємо методику порівняльної оцінки точності методів чисельного розв'язування систем диференціальних рівнянь передбачає аналіз розв'язків системи у часовій області, безвідносно до вибору початкових [8], або граничних [9, 10] умов. Суть методики полягає у тому, що у якості характеристики методу обирається специфічна інтервальна оцінка параметрів стаціонарного процесу, тобто частоти і амплітуди досліджуваних коливань. Властивості методів аналізу коливальних процесів у механіці, прийнято досліджувати на найпростішій коливальній системі «маса-жорсткість» без втрат [5]. У явному вигляді такий аналіз використовується наприклад у [4], а у неявному – при визначенні  $p$ -стійкості методу [9, 10]. У якості критерія ефективності методу, використано точність оцінки основних параметрів коливань – частоти і амплітуди. Поточні відносні похибки оцінки частоти і амплітуди відповідно, визначаються

$$\text{з виразів } \varepsilon_{\omega}(t) = \left| \frac{\omega(t) - \omega_0}{\omega_0} \right|, \text{ та } \varepsilon_A(t) = \left| \frac{A_m(t) - A_{m0}}{A_{m0}} \right|,$$

де  $\omega(t)$  і  $A_{m0}(t)$  – оцінки частоти і амплітуди досліджуваних крутильних коливань, отриманих з розв'язку системи диференціальних рівнянь (1) чисельними методами;  $\omega_0$  і  $A_{m0}(t)$  – точні значення частоти і амплітуди коливань, отримані аналітично, на

основі виразу (2). У якості тестового прикладу розглядалось отримання розв'язку системи лінійних диференціальних рівнянь (1) аналітичним шляхом, та за допомогою перелічених вище чисельних методів. Система рівнянь (2) являє собою ізольовану частину системи лінійних диференціальних рівнянь [7], що описує тільки крутильні коливання ділянок валів між приєднаними масами, і без врахування дії кінематичних похибок (члени  $R_1, R_2$ ) та змінної жорсткості зачеплення ( $C_3(t)r_{b1}, C_3(t)r_{b2}$ ) має вигляд

$$J_{x1}\ddot{\phi}_1 = k_1(\phi - \phi_1); J_{x2}\ddot{\phi}_2 = -k_2(\phi_2 - \phi_3). \quad (1)$$

Загальний розв'язок системи диференціальних рівнянь (1) може бути знайдений з виразів [1]

$$\phi_i(t) = A_{1,i} \exp(p_{1,i}t) + A_{2,i} \exp(p_{2,i}t), \quad (2)$$

що при заданих значеннях масо-жорсткісних та динамічних параметрів відповідає випадку комплексно-

спряжених коренів  $p_{j,i} = \frac{1}{2k_i} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2k_i}\right)^2 - \frac{1}{J_{x_i}k_i}}$ , а вираз (2) набуває вигляду

$$\phi_i(t) = e^{-\sigma t} (A_{1,i} \cos \omega_i t + A_{2,i} \sin \omega_i t), \quad (3)$$

де  $\sigma = Re(p_{j,i})$  – коефіцієнт затухання;  $\omega_i = Im(p_{j,i})$  – резонансна частота власних крутильних коливань;  $\phi_i(t)$  – крутильні коливання валу, як функція часу.

### 5. Результати дослідження ефективності інтегрованого методу реалізації математичної моделі

На рис. 1 і рис. 2 наведені часові діаграми відносних похибок обчислення частоти і амплітуди стаціонарних крутильних коливань первинного валу при різних значеннях жорсткості коливної системи ( $k_1, k_2$ ). Розв'язування системи рівнянь (1) здійснювалось аналітично, та описаними вище чисельними методами, при максимально заданому кроці розв'язування  $h_{max} = T/1000$ , де  $T = 2\pi/\omega_{\phi 1}$  – період коливань первинного валу. Точні значення частоти і амплітуди коливань обчислювались для двох випадків початкових умов, та параметрів  $J$  і  $k$ :

1. При  $k_1 = k_2 = 4.42 \cdot 10^5$  н·м/рад;

$J_{x1} = J_{x2} = 0.1539$  кг·м<sup>2</sup>;

$\phi_1^0 = \phi_3^0 = 0$  рад;  $\phi_2^0 = \phi_4^0 = 0.005$  рад;

$\omega_0 = 0.99989$  рад/с;  $A_{m0} = 2.4754774171 \cdot 10^{-3}$  рад.

2. При  $k_1 = k_2 = 3.34 \cdot 10^5$  н·м/рад;

$J_{x1} = J_{x2} = 0.1919$  кг·м<sup>2</sup>;  $\phi_1^0 = \phi_3^0 = 0$  рад;

$\phi_2^0 = \phi_4^0 = 0.008$  рад;  $\omega_0 = 0.76993$  рад/с;

$A_{m0} = 2.2475693582 \cdot 10^{-3}$  рад.

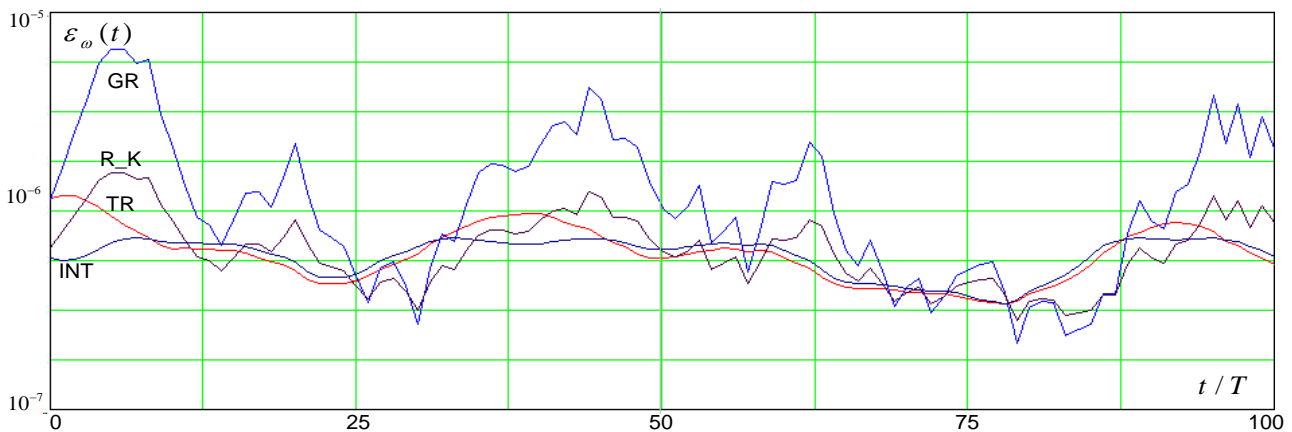


Рис. 1. Поточні відносні похибки обчислення значення частоти коливань методами трапецій (TR), Гіра (GR), Рунге-Кутта (R\_K), та інтегруванням (INT), для випадку значень параметрів 1

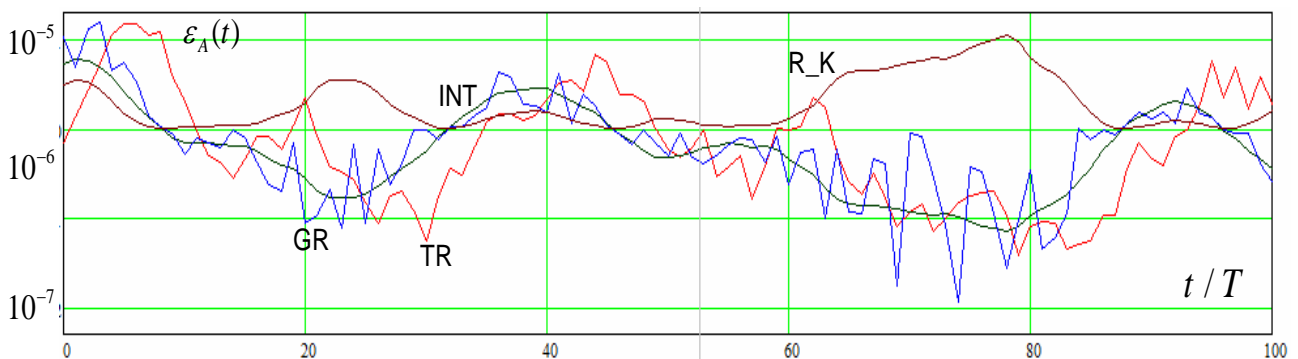


Рис. 2. Поточні відносні похибки обчислення значення амплітуди коливань методами трапецій (TR), Гіра (GR), Рунге-Кутта (R\_K), та інтегруванням (INT), для випадку значень параметрів 1

Інша методика, яку було застосовано для дослідження точнісних властивостей запропонованого інтегрованого методу, ґрунтується на визначенні залежності абсолютної похибки оцінки частоти і амплі-

туди досліджуваних коливань від часового кроку відповідного чисельного методу [5]. Крім того, оскільки реальна досліджувана коливальна система є дисипативною, постає питання, яким чином враху-

вання впливу розсіювання енергії впливає на точність аналізу коливань у досліджуваній механічній системі запропонованим методом, порівняно з іншими. Для цього, для розглянутих окремо крутильних коливань ділянок валів з врахуванням фактору демпфування, розв'язувалась система диференціальних рівнянь (4), яка отримана з (1) шляхом додавання коефіцієнтів демпфування

$$\begin{aligned} J_{x1}\ddot{\phi}_1 &= k_1(\phi - \phi_1) + h_1(\dot{\phi} - \dot{\phi}_1); \\ J_{x2}\ddot{\phi}_2 &= -k_2(\phi_2 - \phi_3) + h_2(\dot{\phi}_2 - \dot{\phi}_3). \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'язок системи рівнянь (4) отримано для значень масо-жорсткісних параметрів і початкових

умов, що аналогічні попередньому випадку, та двох варіантів значень коефіцієнтів внутрішнього в'язкого тертя валів  $h_1=0.025; 0.064 \text{ н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$ ;  $h_2=0.036; 0.073 \text{ н}\cdot\text{м}\cdot\text{с}/\text{рад}$ . Для розв'язків системи (4), отриманих аналітично та чисельно (методами Гіра (GR), трапецій (TR), та інтегрованим (INT)), побудовані графіки залежностей абсолютних похибок оцінки частоти ( $\varepsilon_\omega(h)$ ), та амплітуди ( $\varepsilon_A(h)$ ) від часового кроку  $h$ , при різних значеннях добротностей  $Q_1, Q_2$  (рис. 3, 4). Похибки обчислювались як модулі різниць між аналітичним значенням ( $\varphi_{n0}$ ) розв'язку системи рівнянь (4), та чисельним ( $\varphi_n(h)$ ), отриманим вказаними методами при значеннях часового кроку  $h$ , у межах  $10^{-6} \leq h \leq 10^{-2}$ , де  $\varepsilon_\omega(h) = |\varphi_{\omega 0} - \varphi_\omega(h)|$ , та  $\varepsilon_A(h) = |\varphi_{A0} - \varphi_A(h)|$ .

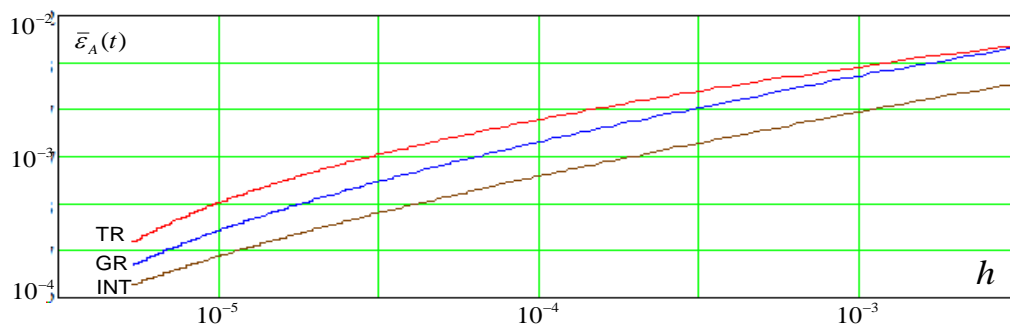


Рис. 3. Графіки залежності поточних відносних похибок обчислення амплітуд від часового кроку для методів трапецій (TR), Гіра (GR), Рунге-Кутта (R\_K), та інтегрованого (INT)

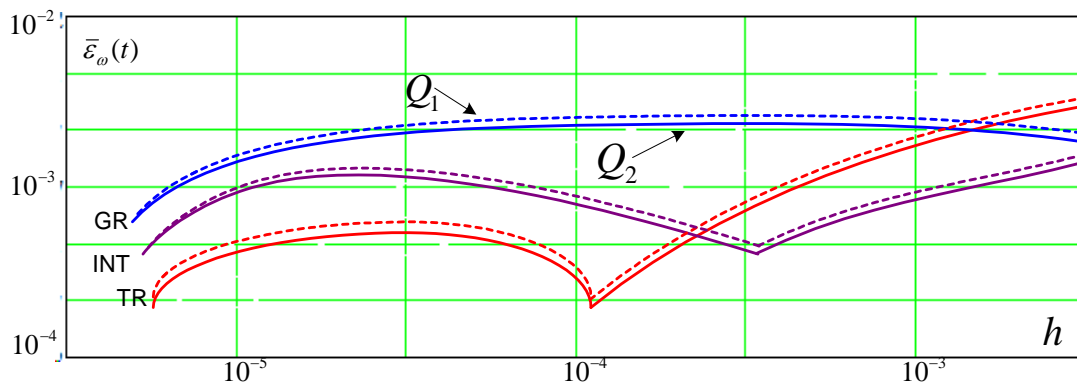


Рис. 4. Графіки залежності поточних відносних похибок обчислення частот від часового кроку та добротності коливальної системи ( $Q_1 < Q_2$ ) для методів трапецій (TR), Гіра (GR), Рунге-Кутта (R\_K), та інтегрованого (INT)

## 6. Висновки

1. З наведених графіків (рис. 1, 2) видно, що похибка оцінки частоти для інтегрованого методу є величиною того ж порядку, що і для методу трапецій, і не виходить за межі шостого порядку мализни, на відміну наприклад, від методу Гіра, для якого аналогічна похибка є майже на порядок вищою.

2. Зменшення жорсткості коливальної системи призводить до звуження меж зміни похибки оцінки частоти. У свою чергу, з рис. 2 видно, що похибка оцінки амплітуди для усіх методів теж має квазіперіодичний характер, а межі зміни похибок для відповідних методів мають той же порядок величин, що і для випадку похибок оцінки частоти.

3. Вплив зміни жорсткості коливальної системи на величину оцінки похибки амплітуди, за своїм характером аналогічний впливу на величину оцінки похибки частоти.

4. У процесі досліджень встановлено, що тестований інтегрований метод забезпечує зменшення похибки обчислення значень резонансних частот у 1.65 разів, амплітуд у 1.3 рази при одночасному розширенні діапазону обчислюваних частот у 1.4 рази.

5. Аналіз графіків (рис. 3) показує, що залежності абсолютних похибок оцінки частоти крутильних коливань для усіх тестованих методів, при збільшенні величини часового кроку мають монотонно-зростаючий характер з явними ознаками нелінійності. Так, при збільшенні величини кроку на два порядки ( $10^{-5} \dots 10^{-3}$ ), зростання абсолютної похибки оцінки частоти виходить за межі першого порядку мализни, при цьому для інтегрованого методу, значення абсолютної похибки виявляється найменшим.

6. Аналіз залежностей абсолютних похибок оцінки амплітуди крутильних коливань (рис. 4) показує, що у певному діапазоні значень часового кроку

похибка оцінки амплітуди для інтегрованого методу займає проміжне значення між похибками для методів Гіра і трапецій, а за межами цього проміжку динаміка її зростання є меншою, порівняно з іншими методами.

7. Аналіз впливу демпфування коливальної системи на величину похибки оцінки амплітуди (рис. 4) дає можливість зробити висновок про те, що при збільшенні значення коефіцієнтів демпфування  $h_1$ ,  $h_2$ , (що відповідає зниженню добротності коливальної системи –  $Q_1 < Q_2$ ), значення похибки зростає. Аналогічна залежність спостерігається і для похибки оцінки частоти.

Таким чином, проведений порівняльний аналіз точності інтегрованого методу з відомими класичними чисельними методами показав його високу ефективність.

#### Література

1. Крылов, В. И. Вычислительные методы. Т. 1 [Текст] / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М.: Наука, 1976. – 302 с.
2. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи [Текст] / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Р. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
3. Басов, К. А. ANSYS и LMS Virtual Lab. Геометрическое моделирование [Текст] / К. А. Басов. – М.: ДМК Пресс, 2006. – 240 с.
4. Норенков, И. П. Адаптивный метод ускоренного анализа многопериодных электронных схем [Текст] / И. П. Норенков, Ю. А. Евстифеев, В. Б. Маничев // Изв. вузов. Сер. Радиоэлектроника. – 1987. – Т. 30, № 6. – С. 47–51.
5. Жук, Д. М. Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования динамики технических систем и объектов [Текст] / Д. М. Жук, В. Б. Маничев, А. О. Ильницький; под ред. А. Л. Стемповского. – Проблемы разработки перспективных микро- и наноэлектронных систем. – М.: ИППМ РАН, 2008. – С. 109–113.
6. Дяченко, П. В. Комп'ютерне моделювання динаміки коливальних процесів механічних систем класу зубчастих передач [Текст]: автореф. дис. канд. техн. наук / П. В. Дяченко. – МОНУ. Черкаський державний технологічний університет. – Черкаси, 2014. – 20 с.
7. Дяченко, П. В. Просторова математична модель власних частот та форм коливаний механічної системи, класу одноступінчастих, евольвентних зубчастих передач [Текст] / П. В. Дяченко // Науково-теоретичний журнал «Штучний інтелект». – 2012. – № 1 – С. 54–60.

8. Maffezzoni, P. Time-domain simulation of nonlinear circuits through implicit Runge-Kutta methods [Text] / P. Maffezzoni, L. Codecasa, D. D'Amore // IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers. – 2007. – Vol. 54, Issue 2. – P. 391–400. doi: 10.1109/tcsi.2006.887476

9. Butcher, J. C. Numerical methods for ordinary differential equations [Text] / J. C. Butcher. – John Wiley & Sons, 2008. – 463 p. doi: 10.1002/9780470753767

10. Petzold, L. R. Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations [Text] / L. R. Petzold, L. O. Jay, J. Yen // Acta Numerica. – 1997. – Vol. 6. – P. 437. doi: 10.1017/s0962492900002750

#### References

1. Krilov, V. I., Bobkov, V. V., Monastirnyy, P. I. (1976). Vichislitelniye metodi. Vol. 1. Moscow: Nauka, 302.
2. Hairer, E., Nersett, C., Vanner, R. (1990). Resheniye obiknovennih differentsialnih uravneniy. Nejestkiye zadachi. Moscow: Mir, 512.
3. Basov, K. A. (2006). ANSYS и LMS Virtual Lab. Geometricheskoe modelirovaniye. Moscow: DMK Press, 240.
4. Norenkov, I. P., Evstifeev, Y. A., Manichev, V. B. (1987). Adaptivniy metod uskorenogo analiza mnogoperiodnih elektronnih shem. Izv. VUZov. Ser. Radioelektronika, 30 (6), 47–51.
5. Zhuk, D. M., Manichev, V. B., Ilnickiy, A. O.; Stempkovskiy, A. L. (Ed.) (2008). Metodi i algoritmi resheniya differentsialno-algebraicheskikh uravneniy dlya modelirovaniya dinamiki tehniceskikh system i ob'ektov. Problemi razrabotki perspektivnih mikro- i nanoelektronnih system. Moscow: IPPM RAN, 109–113.
6. Dyachenko, P. V. (2014). Komp'yuterne modelirovaniya dinamiki kolivalnykh procesiv mekhanichnykh system klasu zubchatih peredach. MONU. Cherkasskiy derzavniy tekhnologichniy universitet. Cherkasy, 20.
7. Dyachenko, P. V. (2012) Prostorova matematichna model vlasnih chastot i form kolivany mekhanichnoi systemi, klasy odnostupinchastih, evolventnih zubchatih peredach. Shtuchniy intelekt, 1, 54–60.
8. Maffezzoni, P., Codecasa, L., D'Amore, D. (2007). Time-Domain Simulation of Nonlinear Circuits Through Implicit Runge-Kutta Methods. IEEE Transactions on Circuits and Systems I: Regular Papers, 54 (2), 391–400. doi: 10.1109/tcsi.2006.887476
9. Butcher, J. C. (2008). Numerical methods for ordinary differential equations. John Wiley & Sons, 463. doi: 10.1002/9780470753767
10. Petzold, L. R., Jay, L. O., Yen, J. (1997). Numerical solution of highly oscillatory ordinary differential equations. Acta Numerica, 6, 437. doi: 10.1017/s0962492900002750

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук, професор Засядько А. А.  
Дата надходження рукопису 29.12.2015*

**Дяченко Петро Васильович**, кандидат технічних наук, доцент, кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій управління, Черкаський державний технологічний університет, бул. Шевченка, 460, м. Черкаси, Україна, 18006  
E-mail: dpv-orion@yandex.ru