

УДК 621.01:531

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.60359

РОЗРОБКА СТРУКТУРНОЇ МОДЕЛІ ДОСЛІДЖЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕХАНІЧНИХ КОЛИВАНЬ

© П. В. Дяченко

Розглянуто способи отримання амплітудно-частотних характеристик механічних коливальних систем. Проаналізовано області застосування результатів аналізу амплітудно-частотних характеристик механічних коливань, на прикладі одноступінчастих зубчастих передач. Для отримання та дослідження частотних характеристик евольвентної зубчастої передачі, визначено вигляд структурної моделі, склад динамічних ланок, та їх передавальні функції методами операційного числення

Ключові слова: частотна характеристика, передавальна функція, динамічна ланка, структурна модель, операційне числення

The methods of obtaining amplitude-frequency responses of the mechanical oscillation systems are considered. The scope of the amplitude-frequency characteristics of mechanical oscillations on the example of single-stage gears is analyzed. To obtaining and investigation of the frequency response of involute gear it is determined the structure of the structural model, content of dynamic elements and their transfer functions by the methods of operational calculus

Keywords: frequency response, transfer function, dynamic elements, structural model, operational calculus

1. Вступ

Отримання та вивчення амплітудно-частотних характеристик (далі – АЧХ) механічних коливальних систем є невід’ємною і важливою частиною дослідження їх динаміки. При розв’язанні задач динаміки і міцності механічних конструкцій, зокрема віброзахисту механізмів, що містять зубчасті передачі, важливе місце займають основні частотні характеристики (інакше – динамічні характеристики об’єктів) – резонансні (власні) частоти, форми коливальних і параметри загасання (демпфування).

АЧХ лінійної коливальної системи може бути визначена як відношення амплітуди гармонічного сигналу на виході цієї системи до амплітуди сигналу на вході, при різних частотах впливу [1], або як графічна залежність між частотою вимушених коливань з одного боку, і амплітудами (швидкостями, прискореннями, коливаннями) механічної системи з іншого боку [2]. АЧХ можна отримати розрахунковим шляхом, на основі розв’язку рівнянь динаміки коливань механічної системи [3], або експериментально [4]. АЧХ зубчастих передач слугують основою для розрахунку редукторних систем, оскільки дають змогу об’єктивно оцінити вплив конструктивних, геометричних, інерційно-пружних і динамічних параметрів зубчастої передачі на характер коливань усієї редукторної системи.

Оцінка можливості появи небажаних переміщень, прискорень, резонансів механічних системи, що виникають при певних поєднаннях швидкостей обертання вхідного валу та періодами зовнішньої навантаженості, теж здійснюється на основі аналізу їх амплітудно-частотних характеристик.

2. Аналіз літературних даних та постановка проблеми

При традиційному дослідженні АЧХ механічних коливальних систем (зокрема зубчастих передач), основна увага приділяється визначенню амплі-

туд коливань зубчастих коліс [5]. Практичний інтерес дослідників являє собою також визначення частот коливань підшипників опор, як одного з основних джерел вібрації механізму зубчастої передачі. Відхилення конструктивних параметрів підшипників від заданих технологічних норм впливають на частоту вібрацій, при цьому розрізняють [5]:

- низькочастотні вібрації (до 10-ти коливань за один оберт внутрішнього кільця), з амплітудою до 15 мКм, викликані ексцентриситетом кільця;

- вібрації середніх частот (10–60 коливань за один оберт кільця), з амплітудою близько 1 мКм, викликані хвилястістю бігових доріжок;

- вібрації високочастотного діапазону (більше 60-ти коливань за один оберт кільця), з амплітудою близько 0,1 мКм, викликані мікронерівностями.

Дослідження АЧХ коливань зубчастої передачі [6–10] показали, що частота основного резонансу валу лежить в межах 200–800 Гц, а спектр вібрацій підшипника значно ширший – 2–10 кГц.

Розглянуті дослідження являють собою експериментальний напрям отримання та дослідження АЧХ механічних коливальних систем. У даній публікації розвивається розрахунково-теоретичний напрям отримання АЧХ механічної коливальної системи на основі рівнянь її динаміки, з застосуванням засобів комп’ютерного моделювання.

3. Мета і задачі дослідження

Метою публікації є розробка структурної моделі отримання і дослідження АЧХ коливань елементів одноступінчастої евольвентної зубчастої передачі. Подальше використання структурної моделі полягає у створенні на її основі комп’ютерної імітаційної моделі засобами Matlab-Simulink. Для створення структурної моделі, необхідно розв’язати ряд задач, зокрема:

1. На основі аналізу схеми динаміки досліджуваної механічної коливальної системи, необхідно виділити окремі елементи коливань;

2. Поставити у відповідність кожному елементу коливань окремих блоку (динамічну ланку), з відповідною передавальною функцією;

3. На основі рівнянь динаміки досліджуваної механічної системи визначити аналітичні вирази для побудови АЧХ коливань кожного структурного елемента системи. Шукані аналітичні вирази можуть бути записані як передавальні функції ланок, отримані з диференціальних рівнянь математичної моделі динаміки механічної системи методами операційного числення (зокрема, перетворення Лапласа [11]).

4. Виходячи з особливостей побудови математичної моделі динаміки та структурних зв'язків між її рівняннями, враховуючи взаємодію елементів коливань, розробити структурну схему міжблокових з'єднань, використовуючи правила та методи теорії автоматичного керування [2].

4. Методика розробки структурної моделі

Основою для розробки структурної моделі дослідження АЧХ зубчастої передачі, є система лінійних диференціальних рівнянь [12], що описує її динамічні властивості. Рівняння що утворюють математичну модель [12] є лінійними диференціальними рівняннями другого порядку. Як відомо з теорії автоматичного керування [1, 2], передавальні функції, що відповідають таким рівнянням при нульових початкових умовах, та без врахування зовнішніх збурень мають вигляд

$$W(p) = \frac{K}{T^2 p^2 + 1}, \tag{1}$$

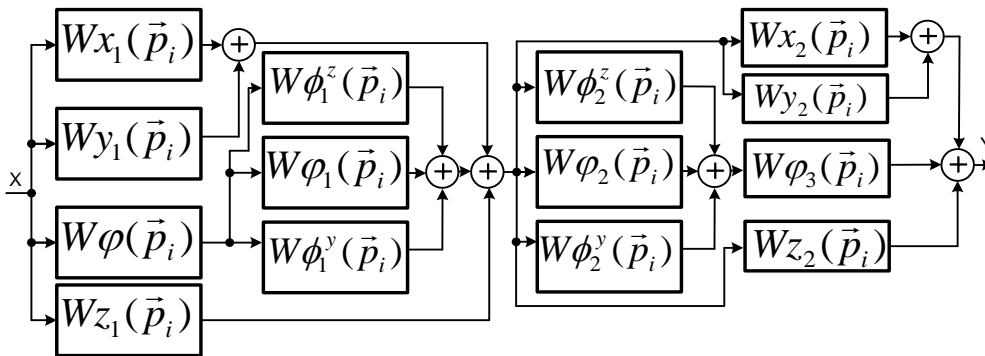


Рис. 1. Структурна модель АЧХ механічної системи

Блоки $W_{x1} \dots W_{z2}$ позначені на рис. 1, відтворюють передавальні функції по відповідних коливаннях, визначених математичною моделлю динаміки. Імітація вимушених коливань здійснюється шляхом подання на вхід «X» зовнішнього гармонічного сигналу змінної частоти, вихід «Y» імітує коливання приєднаної маси.

Для отримання виразів передавальних функцій динамічних ланок структурної моделі, скористаємось диференціальними рівняннями математичної моделі [12], застосувавши до них методи операційного числення (пряме перетворення Лапласа) [11]. Розглянемо перше рівняння системи [12], яке описує радіальні коливання вхідного валу за нульових початкових умов, та без урахування зовнішнього збурення

а відповідні амплітудно-частотні характеристики

$$|W(j\omega)| = \frac{K}{1 - T^2 \omega^2}, \tag{2}$$

де $W(p)$ – обернений диференціальний оператор руху, K – коефіцієнт підсилення (коефіцієнт передачі на нульовій частоті), T – постійна часу.

Структурний поділ механічної системи на окремі елементи для побудови їх АЧХ слід здійснити таким чином, щоб по-перше, виділити конструктивно завершені елементи, по-друге, щоб ці елементи у своїй сукупності утворювали тракт проходження сигналу, який цікавить дослідника. Для розробки структури моделі, скористаємось такими правилами сполучення динамічних ланок [2]:

– коливання одного і того ж елемента у різних площинах відповідає паралельному з'єднанню динамічних ланок, кожна з яких відповідає окремому коливанню, з передавальною функцією, отриманою з відповідного диференціального рівняння математичної моделі;

– коливанням окремих елементів з голономними зв'язками відповідає послідовне з'єднання динамічних ланок, з передавальними функціями, що отримані аналогічно попередньому випадку.

Керуючись наведеними правилами з'єднань динамічних ланок, взявши за основу рівняння математичної моделі [12], отримуємо структурну модель механічної коливальної системи для визначення АЧХ її елементів, на прикладі одноступінчастої евольвентної зубчастої передачі (рис. 1).

$$\ddot{\phi} = -\left[\frac{k_1}{J}\right]\phi + \left[\frac{k_1}{J}\right]\phi_1 + \left[\frac{M}{J}\right], \tag{3}$$

де $\ddot{\phi}$ – радіальне прискорення вхідного валу; ϕ , ϕ_1 – швидкість обертання первинного та вторинного валів відповідно; J , M – момент інерції та крутний момент двигуна. Застосувавши до (3) пряме перетворення Лапласа, отримаємо

$$p^2 X(p) = -\left[\frac{k_1}{J}\right]p + \left[\frac{k_1}{J}\right]p_1 + \left[\frac{M}{J}\right]Y(p), \tag{4}$$

де $(p^2, p, p_1) = L\{\ddot{\phi}, \phi, \phi_1\}$, (L – символ прямого перетворення Лапласа). Приймаючи позначення $k_1/J = T$, $M/J = K$, вираз (4) набуде вигляду

$$p^2 X(p) = [-Tp + Tp_1 + K_\phi] X(p) = T[(p_1 - p) + K_\phi] Y(p), \quad (5)$$

звідки отримуємо передавальну функцію, що описує крутильні коливання ділянки валу між двигуном та зубчастим колесом

$$W_{\phi_y}(p, p_1) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{p^2}{T(p_1 - p) + K_\phi}. \quad (6)$$

Аналогічним чином знаходимо передавальні функції для решти рівнянь математичної моделі [12]. Для отримання передавальних функцій рівнянь, знайдемо зображення по Лапласу відповідних змінних рівнянь системи та їх других похідних, відносно яких будуть записані передавальні функції:

$$(p, p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9, p_{10}, p_{11}, p_{12}, p_{13}) = L\{\phi, \phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4, \phi_1^y, \phi_2^y, \phi_1^z, \phi_2^z, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2\};$$

$$(p^2, p_1^2, p_2^2, p_3^2, p_4^2, p_5^2, p_6^2, p_7^2, p_8^2, p_9^2, p_{10}^2, p_{11}^2, p_{12}^2, p_{13}^2) = L\{\ddot{\phi}, \ddot{\phi}_1, \ddot{\phi}_2, \ddot{\phi}_3, \ddot{\phi}_4, \ddot{\phi}_1^y, \ddot{\phi}_2^y, \ddot{\phi}_1^z, \ddot{\phi}_2^z, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ddot{z}_1, \ddot{z}_2\}. \quad (7)$$

5. Результати розробки структурної моделі

Враховуючи прийняті позначення змінних системи, похідних від змінних та їх зображень (7), знаходимо передатні функції для решти диференціальних рівнянь системи [12].

– для крутильних коливань зубчастого колеса навколо осі x_1 :

$$W_{\phi_1}(p, p_1, p_9, p_{10}) = \frac{p_1^2}{T_1(p - p_1) + T_2(p_{10} - p_9)}, \quad (8)$$

де $T_1 = \left[\frac{k_1}{J_{x1}} \right]; T_2 = \left[\frac{C_3 r_{b1}}{J_{x1}} \right];$

– для крутильних коливань шестерні навколо осі x_2 :

$$W_{\phi_2}(p_2, p_3, p_9, p_{10}) = \frac{p_2^2}{T_1(p_2 + p_3) + T_2(p_9 + p_{10})}, \quad (9)$$

де $T_1 = \left[\frac{k_2}{J_{x2}} \right]; T_2 = \left[\frac{C_3 r_{b2}}{J_{x2}} \right];$

– для кута закрутки валу навантаження навколо осі x_2 :

$$W_{\phi_3}(p_2, p_3) = \frac{p_3^2}{T(p_2 - p_3)K_{\phi_3}}, \quad (10)$$

де $T = \left[\frac{k_2}{J_3} \right]; K_{\phi_3} = \left[\frac{M_3}{J_3} \right];$

– для крутильних коливань зубчастого колеса навколо осі y_1 :

$$W_{\phi_y}(p_1, p_2, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{12}, p_{13}) = \frac{p_4^2}{T_1(p_1 - p_2) + T_2(p_3 + p_{12}) - T_3(p_5 + p_{13}) + T_4(p_8 + p_9) + K_{\phi_y}}; \quad (11)$$

– для крутильних коливань шестерні навколо осі y_2 :

$$W_{\phi_z}(p_1, p_2, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{12}, p_{13}) = \frac{p_5^2}{T_1(p_1 - p_2) + T_2(p_4 + p_{12}) + T_3(p_5 - p_{13}) + T_4(p_8 - p_9) + K_{\phi_z}}; \quad (12)$$

– для крутильних коливань зубчастого колеса навколо осі z_1 :

$$W_{\phi_6}(p_6, p_7, p_{10}, p_{11}) = \frac{p_6^2}{T_1(p_6 + p_{10}) - T_2(p_7 + p_{11})}, \quad (13)$$

де $T_1 = \left[\frac{CL_1}{J_{z1}} + \frac{C_3 r_{b1} tg \beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right]; T_2 = \left[\frac{C_3 r_{b1}^2 tg^2 \beta_0}{J_{z1} \sin \alpha_t} \right];$

– для крутильних коливань шестерні навколо осі z_2 :

$$W_{\phi_7}(p_6, p_7, p_{10}, p_{11}) = \frac{p_7^2}{T_2(p_7 + p_{11}) - T_1(p_6 + p_{10})}, \quad (14)$$

де $T_2 = \left[\frac{CL_1}{J_{z2}} + \frac{C_3 r_{b2} tg \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right]; T_1 = \left[\frac{C_3 r_{b2}^2 tg^2 \beta_0}{J_{z2} \sin \alpha_t} \right];$

– для осьових коливань зубчастого колеса по осі x_1 :

$$W_{x_1}(p_8, p_9) = \frac{p_8^2}{T_1 p_8 - T_2 p_9}; \quad (15)$$

– для осьових коливань шестерні по осі x_2 :

$$W_{x_2}(p_8, p_9) = \frac{p_9^2}{T_1 p_8 + T_2 p_9}, \quad (16)$$

де $T_1 = \left[\frac{C_{2x} + C_3 (tg \beta_0 + 1)}{m_2} \right]; T_2 = \left[\frac{C_3 (1 - tg \beta_0)}{m_2} \right];$

– для осьових коливань зубчастого колеса по осі y_1 :

$$W_{y_1}(p_6, p_7, p_{10}, p_{11}) = \frac{p_{10}^2}{T_1 p_6 - T_2 p_7 + T_3 p_{10} - T_4 p_{11}}; \quad (17)$$

– для осьових коливань шестерні по осі y_2 :

$$W_{y2}(p_6, p_7, p_{10}, p_{11}) = \frac{P_{11}^2}{T_1 p_6 - T_2 p_7 + T_3 p_{10} - T_4 p_{11}} \quad (18)$$

– для осьових коливань зубчастого колеса по осі z_1 :

$$W_{z1}(p_1, p_2, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{12}, p_{13}) = \frac{P_{12}^2}{T_1(p_1 - p_2) + T_2(p_4 - p_{13}) - T_3 p_5 + T_4(p_8 - p_9) + T_5 p_{12} + K_{z1}}; \quad (19)$$

– для осьових коливань шестерні по осі z_2 :

$$W_{z2}(p_1, p_2, p_4, p_5, p_8, p_9, p_{12}, p_{13}) = \frac{P_{13}^2}{T_1(p_1 - p_2) + T_2(p_4 - p_{13}) - T_3 p_5 + T_4(p_8 - p_9) + T_5 p_{12} + K_{z2}}. \quad (20)$$

Від отриманих виразів для передавальних функцій коливань елементів механічної системи (6)–(20), легко перейти до відповідних АЧХ, використовуючи вирази (1), (2). Комп'ютерна реалізація отриманої структурної моделі дає можливість побудови АЧХ будь-якого елемента зубчастої передачі, коливання якого описані рівняннями математичної моделі [12].

6. Висновки

1. Проведено аналіз доцільності та актуальності застосування математичного апарату частотних характеристик, стосовно задач аналізу динаміки евольвентних зубчастих передач.

2. Окреслено область практичних інтересів дослідників динаміки зубчастих передач, де актуальною є побудова амплітудно-частотних характеристик.

3. Створено структурну модель побудови АЧХ зубчастої передачі, для якої визначено внутрішню структуру, склад динамічних ланок та аналітичний вигляд передавальних функцій.

Подальшим розвитком запропонованої структурної моделі, може являтися розробка імітаційної моделі для комп'ютерної реалізації створеної структури засобами MatLab-Simulink. Така імітаційна модель надає можливість дослідження АЧХ коливань будь-якого елемента механічної системи.

Література

1. Айзерман, М. А. Теория автоматического регулирования [Текст] / М. А. Айзерман. – М.: «Наука», 1966. – 452 с.
2. Топчеев, Ю. И. Задачник по теории автоматического регулирования [Текст]: уч. пос. / Ю. И. Топчеев, А. П. Цыпляков. – М.: «Машиностроение», 1977. – 592 с.
3. Аугустайтис, В.-К. В. Автоматизированный расчет колебаний машин [Текст] / В.-К. В. Аугустайтис, Г.-П. К. Мозура, К. Ф. Сливинскас, Э. Р. Ставяцкене; под ред. К. М. Рагульскиса. – Л.: Машиностроение, 1988. – 102 с.
4. Кашьяп, Р. Л. Построение динамических моделей по экспериментальным данным [Текст] / Р. Л. Кашьяп, А. Р. Рао. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
5. Авакян, В. А. Исследование качества монтажа подшипников путем вибродиагностики [Текст] / В. А. Авакян // Электротехника. – 1980. – № 8. – С. 29–33.

6. Демитрадзе, Д. Т. Экспериментальное исследование крутильных и поперечных колебаний в прямозубых цилиндрических зубчатых передачах [Текст] / Д. Т. Демитрадзе // Сообш. АН Груз. ССР. – 1974. – Т. 75, № 2.

7. Генкин, М. Д. Исследование некоторых предельных возможностей активных виброзащитных систем [Текст] / М. Д. Генкин, С. В. Кравченко // Известия ВУЗов. Машиностроение. – 1983. – № 12. – С. 54–57.

8. Bolinger, B. Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnzadgetriebe [Text] / B. Bolinger // Ind. Anz. – 1964. – Issue 19.

9. Harris, S. Z. Dynamic loads on the teeth of spur gears [Text] / S. Z. Harris // ARCHIVE: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1847–1982 (vols 1-196). – 1958. – Vol. 172, Issue 1958 – P. 87–112. doi: 10.1243/pime_proc_1958_172_017_02

10. Бъчваров, С. Н. Динамика машинного агрегата с упругим валом и линейной характеристикой исполнительного механизма [Текст] / С. Н. Бъчваров, В. Д. Златанов, С. Г. Делчева-Атанасова, И. Г. Янчев // Теория механизмов и машин. Динамика машин. – 2004. – Т. 2, № 1. – С. 62–67.

11. Дейч, А. М. Методы идентификации динамических объектов [Текст] / А. М. Дейч. – М.: Энергия, 1979. – 240 с.

12. Дяченко, П. В. Просторова математична модель власних частот та форм коливань механічної системи, класу одноступінчастих, евольвентних зубчастих передач [Текст] / П. В. Дяченко // Штучний інтелект. – 2012. – № 1. – С. 54–60.

References

1. Aizerman, M. A. (1966). Teoriya avtomaticheskogo regulirovaniya. Moscow: Nauka, 452.
2. Topcheev, Y. I., Cypljakov, A. P. (1977). Zadachnik po teorii avtomaticheskogo regulirovaniya. Uchebnoe posobie dlya VUZov. Moscow: Mashinostroenie, 592.
3. Augustajtis, V.-K. V., Mozura, G.-P. K., Slivinskas, K. F., Stavjackene, Je. R.; Ragul'skisa, K. M. (Ed.) (1988). Avtomatizirovanyj raschet kolebaniy mashin. Leningrad: Mashinostroenie, 102.
4. Kashiyp, R. L., Rao, A. R. (1983). Postroeniye dinamichekikh modeley po eksperimentalnim dannim. Moscow: Nauka, 384.
5. Avakyan, V. A. (1980). Issledovaniye kachestva montaja podshipnikov putem vibrodiagnostiki. Elektrotehnika, 8, 29–33.
6. Demitradze, D. T. (1974). Eksperimentalnoe issledovanie krutilnih i poperechnih kolebaniy v pryamozubih cilindricheskikh zubchatih peredachah. Soobch. AN Gruz. SSR, 75 (2).
8. Bolinger, B. (1964). Ursachen und Auswirkungen dynamischer Zahnkräfte in Stirnzadgetriebe. Ind. Anz., 19.
9. Harris, S. L. (1958). Dynamic loads on the teeth of spur gears. ARCHIVE: Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers 1847–1982 (vols 1-196), 172 (1958), 87–112. doi: 10.1243/pime_proc_1958_172_017_02
10. Bachvarov, S. N., Zlatanov, V. D., Delcheva-Atanasova, S. G., Yanchev, I. G. (2004). Dinamika mashinnogo agregata s uprugim valom i lineynoy harakteristikoy ispolnitelnogo mehanizma. Teoriya mehanizmov i mashin, 2 (1), 62–67.
11. Deich, A. M. (1979). Metodi identifikacii dinamichekikh ob'ektov. Moscow: Energiya, 240.
12. Dyachenko, P. V. (2012). Prostorova matematichna model vlasnih chastot i form kolivany mehanichnoi systemi, klasy odnostupinchastih, evolventnih zubchastih peredach. Shtuchniy intelekt, 1, 54–60.

Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Рудницький В. О.
Дата надходження рукопису 20.01.2016

Дяченко Петро Васильович, кандидат технічних наук, доцент, кафедра комп'ютерних наук та інформаційних технологій управління, Черкаський державний технологічний університет, бул. Шевченка, 460, м. Черкаси, Україна, 18006, E-mail: dpv-orion@yandex.ru