

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.72566

ОЦЕНКА НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И КОНИЧЕСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ, ПОДКРЕПЛЕННЫХ РЕБРАМИ ЖЕСТКОСТИ

© Н. Д. Сизова

Рассматриваются вопросы, связанные с оценкой напряженно – деформированного состояния ребренных цилиндрических и конических тел конечных размеров. Приводятся аналитические решения, основанные на применении теории R-функций, компьютерная модель и вычислительный эксперимент определения напряженно-деформированного состояния тел, подкрепленных одним, двумя и тремя ребрами.

Проведен анализ зависимостей напряжений от количества ребер на элементах, проанализировано влияние геометрических и физических параметров на режимы работы каждого конструктивного элемента
Ключевые слова: теория упругости, деформации, R-функции, моделирование, вычислительный эксперимент, структурные модели, погрешности

The problems associated with evaluation of stress-strain state of stiffened finite cylindrical and conical bodies are considered. The analytical solutions based on the application of R-function theory, computer models and simulation experiment for determining the stress-strain state of the bodies, stiffened by one, two and three ribs are given.

The analysis of the strain dependence on the amount of ribs on the elements and influence of geometric elements and physical parameters on the operation modes for each structural element are analyzed

Keywords: theory of elasticity, strain, R-functions, modeling, simulation experiment, structural models, errors

1. Введение

При конструировании конструктивных элементов машиностроения, приборостроения, радиоэлектроники и др. одной из задач является определение физических полей в них. Эта актуальная задача – один из наиболее важных факторов, влияющих на работоспособность, надежность и устойчивость работы элементов, так как изменение той или иной физической или геометрической характеристики вызывает и изменение свойств различных материалов, входящих в состав всей исследуемой конструкции.

Экспериментальные исследования физических полей многих элементов и аппаратов неприемлемы в тех случаях, например, когда физические размеры компонентов достаточно малы, установка чувствительных приборов и датчиков в них представляется весьма трудной задачей. В силу этого актуальным является определение физических полей элементов и аппаратов аналитическими и численными методами [1, 2] и проведение вычислительного эксперимента [1, 2].

Решение задачи определения необходимых физических параметров позволяет на стадии вычислительного эксперимента получить достоверную и объективную информацию о работе конструктивного элемента, частично или полностью заменить дорогостоящие опытные испытания режимов работы эле-

ментов и аппаратов расчетным проектированием, прогнозировать физические процессы, рассчитывать оптимальные режимы работы всего прибора.

2. Литературный обзор

Накопленные знания в области решения многих сложных технических задач в настоящее время реализуются не только опытными испытаниями, которые зачастую приводят к необходимости использования дорогостоящих материалов, но и помощью компьютерной техники. Проблемы компьютерного моделирования в исследовании процессов оптимальной эксплуатации конкретных объектов и установок относятся к одному из развиваемых современных направлений – компьютерному моделированию.

В современной технике предъявляются повышенные требования к точности определения полей исследуемых элементов и узлов, поэтому объяснимо стремление создать универсальные методы и высокоточные алгоритмы решения таких задач.

В настоящее время популярностью в области решения задач исследования физико-механических полей пользуются системы и программные комплексы (OPSYN, KAUS, ANSYS, ABAQUS, ADINA, ASKA/DYNAN, MARC, MSC/NASTRAN, EUFEMI, COSMOS,

АСТРА, HERCULE, MODULEF, SAP-7, LS-DYNA и др.), разработанные на базе метода конечных элементов (МКЭ) [3–5].

Конкуренцию МКЭ может составлять математический аппарат – теория R-функций (RFM) и созданный на его основе программный продукт ПОЛЕ [7–9].

В современной технике предъявляются повышенные требования к точности определения полей исследуемых элементов и узлов, поэтому объяснимо стремление создать универсальные методы и высокоточные алгоритмы решения таких задач.

Однако многие автоматизированные системы для вычислительного эксперимента имеют тот недостаток, что зачастую отсутствуют средства взаимодействия с программами на естественном математическом или физическом языке постановки конкретной задачи исследования. Стремительное повышение производительности современных компьютеров, разработка новых процессоров и языков, в большей степени, ориентированных на символьную обработку данных, позволяет создавать компьютерные системы для вычислительной механики, ориентированные на пользователя не знакомого с базами данных, программированием, компьютерным моделированием.

В статье приводятся исследования напряженно деформированного состояния оребренных цилиндрических и конических тел конечных размеров. Для увеличения прочности такие конструкции подкрепляют наружными кольцевыми ребрами (рис. 1). Размеры конструкции, геометрические параметры ребра и режимы работы подлежат определению.

Подобные конструкции используются штамповочном производстве как элементы оборудования, как рабочие камеры детонационных прессов и др. [6].

Многие проблемы теоретического аспекта исследования физических полей в различных элементах связаны с необходимостью построения и исследования математических моделей, имеющих вид краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными [1, 2].

Достаточно хорошо развитые классические методы теории упругости дают решения для гладких толстостенных цилиндрических тел, нагруженных внутренним давлением [1, 2]. Наличие кольцевых ребер по наружной поверхности цилиндра существенно изменяет картину распределения напряжений внутри тела.

Для решения задачи деформирования гладкого цилиндрического или конического по внутренней поверхности тела, подкрепленного на наружной цилиндрической поверхности несколькими кольцевыми ребрами прямоугольного в плане поперечного сечения (рис. 1), используем метод, основанный на теории R-функций (RFM) [7, 8].

Применение теории R-функций для исследования физических задач в произвольных областях позволяет исследовать поля неклассических тел без ограничения на формы области и типы температурных, механических, волновых и других воздействий на изучаемый объект.

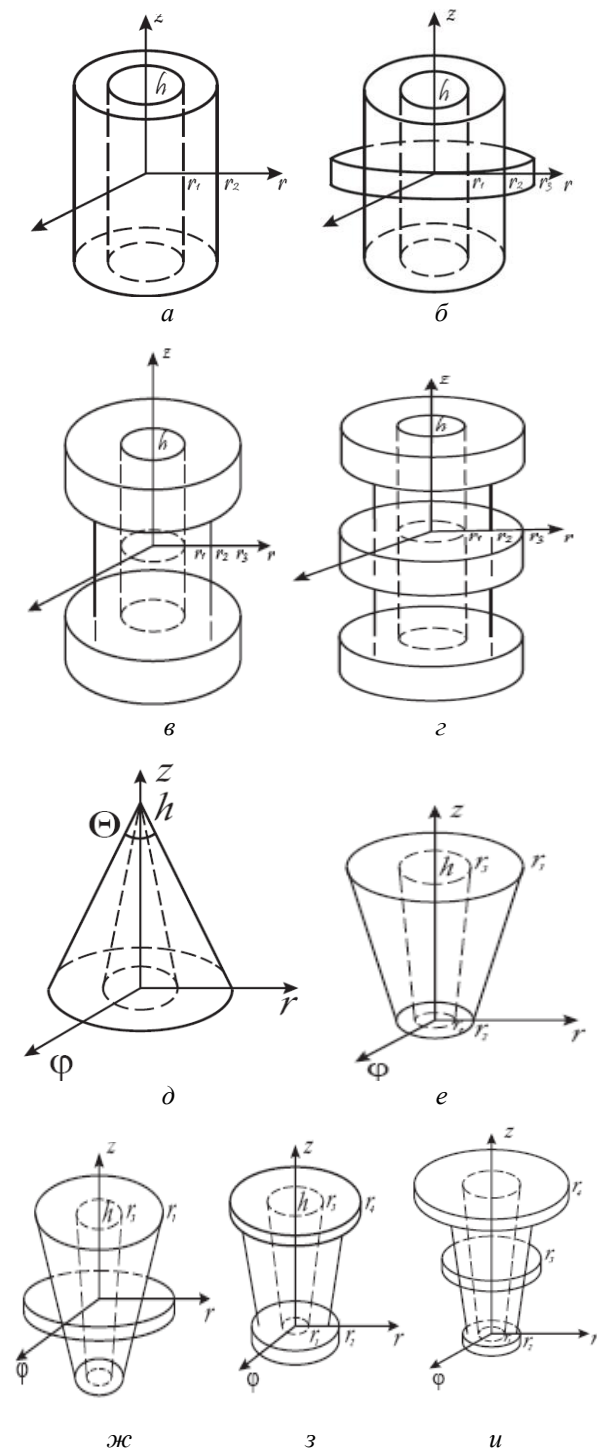


Рис. 1. Оребренные элементы оборудования: а – полый цилиндрический элемент оборудования; б – цилиндрический элемент оборудования, подкрепленный одним ребром жесткости; в – цилиндрический элемент оборудования, подкрепленный двумя жесткости; з – цилиндрический элемент оборудования, подкрепленный тремя жесткости; д – полый конический элемент оборудования; е – усеченный конический элемент оборудования; жс – конический элемент оборудования, подкрепленный одним ребром жесткости; з – конический элемент оборудования, подкрепленный двумя ребрами жесткости; и – конический элемент оборудования, подкрепленный тремя ребрами жесткости

Аналитические решения – структуры (GSS) или структурные формулы имеют вид функциональных соотношений, состоящих из элементарных функций или суперпозиции элементарных и специальных функций. При этом учитываются на аналитическом уровне граничные условия и геометрия области исследования задачи, кроме того, возможно учитывать имеющуюся априорную информацию о точном решении (если оно есть) и приблизиться к нему в метрике соответствующего функционального пространства.

Теория R-функций привнесла методы математической физики конструктивные элементы алгебры логики. Это в свою очередь позволило сформулировать понятие структуры решения (GSS) (т.е. формы, в которой отыскивается решение) как функциональное соотношение

$$U=B(\Phi),$$

где U – решение задачи, B – известный оператор, учитывающий граничные условия краевой задачи, определяемый на множестве M , а элемент Φ выбирается так, чтобы наилучшим образом (в том или ином смысле) удовлетворить исходному уравнению.

Основная идея построения структурных формул, учитывающих граничные условия, состоит в разложении в ряд искомого решения по степеням функции ω или ω_i , где ω , ω_i – левые части нормализованных уравнений границы области S ($\partial\Omega$) или их участков.

Следующим этапом является удовлетворение исходному дифференциальному уравнению, описывающему физический процесс. В большинстве случаев этот процесс при численных решениях реализуется обычно либо сеточными, либо вариационными методами. В вариационных методах учет информации об области Ω , ее границе $\partial\Omega$ и граничных условиях осуществляется в процессе построения координатных (базисных) функций, обладающих необходимыми свойствами полноты и линейной независимости. Это дает возможность при построении структурных решений (GSS) учесть геометрическую информацию краевой задачи на аналитическом уровне без какой-либо ее аппроксимации, т. е. создания структурных моделей.

3. Цель и задачи исследования

Целью настоящей статьи является разработка структурных моделей, алгоритмов, компьютерных моделей исследования напряженно-деформированного состояния орбренных тел.

Для достижения поставленной цели были решены следующие задачи:

- проведение по построенным структурным формулам (GSS) и компьютерным моделям вычислительного эксперимента в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ [9];

- определение геометрических параметров и режимов работы подобных конструкций. Системы серии “Поле” являются высокопродуктивными программными изделиями, базовым математическим аппаратом которых является теория R-функций (RFM).

4. Постановка задачи и метод решения

Данная задача может рассматриваться как линейная задача теории упругости в перемещениях при заданных граничных условиях.

Внешняя нагрузка в виде равномерно распределенного давления P приложена к внутренней гладкой поверхности цилиндра и вызывает его растяжение. Учитывая симметрию рассматриваемых элементов, исследование напряженно – деформированного состояния, проводится для переменных r , z (x_1, x_2).

Таким образом, следует найти решение уравнения Ламе

$$\begin{aligned} \mu \nabla^2 \vec{U} + (\lambda + \mu) \text{grad div } \vec{U} &= \vec{F}(x), \\ x \in (x_1, x_2) \in \Omega \end{aligned} \tag{1}$$

при заданных граничных условиях.

Здесь $\vec{U} = (U_1, U_2) \in C^2(\Omega)$ – вектор упругих перемещений; $\vec{F} = (F_1, F_2)$ – вектор массовых сил; λ , μ – коэффициенты Ляме.

На границе тела $\partial\Omega$ заданы нормальные σ_n и касательные τ_n напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= f_1(x), \\ \tau_n &= f_2(x). \end{aligned} \tag{2}$$

Решение задачи (1)–(2) с использованием теории R-функций представляются в виде следующих функциональных соотношений [8]

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{(\lambda + \mu)} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_1 + \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_2 + \\ &+ \Phi_{11} - \omega D_1 \Phi_{11} - \omega T_1 \Phi_{21} - \\ &- 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_1} \right)^2 T_1 \Phi_{21} + \omega^2 \Phi_{12}, \\ U_2 &= \frac{1}{(\lambda + \mu)} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_2} f_1 - \frac{1}{\mu} \omega \frac{\partial \omega}{\partial x_1} f_2 + \\ &+ \Phi_{21} - \omega D_1 \Phi_{21} - \omega T_1 \Phi_{11} - \\ &- 2 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \omega \left(\frac{\partial \omega}{\partial x_2} \right)^2 T_1 \Phi_{11} + \omega^2 \Phi_{12}, \end{aligned} \tag{3}$$

где $\omega(x_1, x_2)$ – уравнения границ рассматриваемой области, D_1, T_2 – дифференциальные операторы специального вида [8]; Φ_{ij} ($i=1,2; j=1,2$) – неопределенные компоненты структурной формулы решения (7).

Произвольные функции $\Phi_1 = \Phi_{11}$, $\Phi_2 = \Phi_{22}$ ($\Phi_{12} = \Phi_{21} = 0$) представляются в виде следующих разложений:

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \sum_{i,j} C_{ij}^{(1)} \phi_i(r) \phi_j(z), \\ \Phi_2 &= \sum_{i,j} C_{ij}^{(2)} \psi_i(r) \psi_j(z), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\phi_i(r)$, $\phi_j(z)$, $\psi_i(r)$, $\psi_j(z)$ – классические полиномы, полиномы с локальными носителями или специальные функции.

Коэффициенты разложения (4) определяются из условия минимума функционала, соответствующего задаче (5)–(6) [7]

$$\begin{aligned}
 I(u_r, u_z) = & \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{u_r}{r} \right)^2 + \right. \\
 & + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{u_r}{r} \right)^2 \right] + \\
 & + \mu \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \Big\} r dr dz - \\
 & - \int_{\Omega} (f_1 u_{r1} + f_2 u_{z2}) r dr. \tag{5}
 \end{aligned}$$

Заметим, что записанная структура (3) решения задачи (1)–(2) имеет общий вид, так как за счет выбора функций $\omega(x_1, x_2)$ могут быть представлены решения для различных элементов.

Наиболее распространенными являются конфигурации тел с одним наружным центральным ребром жесткости; с двумя ребрами на торцах; в особо тяжелых случаях нагружения – с двумя торцевыми и одним центральным ребрами (рис. 1).

Например, в первом из названных случаев уравнение границы области записывается в виде (рис. 1, б)

$$\begin{aligned}
 \omega = & ((f_1 \&_0 (r - a)) \&_0 f_6) \&_0 (-f_2 \!_0 f_4), \\
 \omega_1 = & r - a, \quad \omega_2 = (f_1 \&_0 f_6) \&_0 (-f_2 \!_0 f_4); \\
 x = & (r, z),
 \end{aligned}$$

в случае рассмотрения цилиндра с двумя торцевыми ребрами (рис. 1, в):

$$\begin{aligned}
 \omega = & ((f_1 \&_0 (r - a)) \&_0 f_6) \&_0 (f_7 \!_0 f_4), \\
 \omega_1 = & r - a, \quad \omega_2 = (f_1 \&_0 f_6) \&_0 (f_7 \!_0 f_4);
 \end{aligned}$$

и в случае подкрепления тремя ребрами жесткости (рис. 1, г):

$$\begin{aligned}
 \omega = & (((f_1 \&_0 (r - a)) \&_0 f_6) \&_0 ((f_6 \!_0 f_4) \!_0 (f_5 \!_0 f_7))), \\
 \omega_1 = & r - a, \quad \omega_2 = (f_1 \&_0 f_6) \&_0 (f_3 \!_0 f_4) \!_0 (f_5 \!_0 f_7),
 \end{aligned}$$

где $\&_0, \!_0 - R$ – дизъюнкция и R – конъюнкция соответственно; f_i – аналитические выражения, описывающие отдельные участки границ поверхности:

$$\begin{aligned}
 f_1 = & z^2 - h_1^2, \quad f_2 = z^2 - h_2^2, \\
 f_3 = & (z - b)(h_1 - z), \quad f_4 = a - r, \\
 f_5 = & (z - b)(-h_2 - z), \\
 f_6 = & a_1 - r, \quad f_7 = h_1^2 - z^2, \\
 b = & (h_1 - h_2) / 2, \quad h = (h_1 + h_2) / 2.
 \end{aligned}$$

Аналогичные представления имеют и уравнения границы конических тел с подкрепляющими ребрами.

5. Результаты исследования и их обсуждение

Численные результаты определения напряженно-деформированного состояния получены в условиях эксплуатации системы ПОЛЕ [9]. Заметим, что при исследовании напряженно-деформированного состояния конических конструктивных элементов потребовались изменения функций ω , области интегрирования Ω и контура $\partial\Omega$ в функционале (5).

Вычислительный эксперимент проводился при условии равенства масс цилиндрических тел с различным количеством ребер при постоянных значениях величин геометрических параметров $h, h_1=a, h_2=b, r_0, R_1$. За счет этого изменялся размер R_p , определяющий наружный радиус орбренного цилиндрического (конического) тела.

Приведем исследования напряженно – деформированного состояния для представленных конечных элементов с подкрепляющими ребрами. Элементы изготовлены из стали 40Х в отожженном состоянии, который характеризуется значениями $\sigma_s=400$ МПа, $E=2,05 \cdot 10^7$ МПа, $\nu=0,3$. Внешняя нагрузка P не превосходила 80 МПа.

В вычислительном эксперименте варьировались следующие геометрические параметры: h – высота элемента, h_1 – высота ребра, h_2 – межреберное расстояние (в случае двух и трех ребер), внешний радиусом $R_p=r_3$. При этом варьируемые геометрические параметры определялись из условия равенства масс цилиндрических (конических) тел с различным количеством ребер.

Для оценки количественного влияния геометрии наружной поверхности тела на его несущую способность был проведен численный эксперимент по расчету тангенциальных напряжений τ_{rz} . Это позволило определить внешний радиус R_p . Так цилиндр с одним центральным ребром имел радиус $R_p=0,201$ м; цилиндр с двумя торцевыми ребрами $R=0,166$ м; цилиндр с тремя ребрами $R=0,155$ м при остальных постоянных параметрах.

Некоторые результаты представлены на рис. 2–6 в безразмерных величинах.

Зависимости напряжения τ_{rz} в функции относительной высоты центрального симметрично расположенного одного ребра показаны на рис. 2.

Наблюдается качественное повторение кривых τ_{rz} в каждом сечении r и существенное снижение этих напряжений по внутренней поверхности (до 0,3 в относительных величинах).

Рис. 3 дает представление о влиянии высоты торцевых ребер на распределение напряжений в стенке исследуемого объекта. Зонай оптимального соотношения h/h_1 (рис. 3, а) следует считать величину порядка 5–7, при которой действующие напряжения снижаются в 1,5 раза. На рис. 3, б представлены зависимости напряжений относительно протяженности торцевого ребра по наружной поверхности цилиндрической конструкции. Вычислительный эксперимент показал, что почти трехкратное снижение окружных напряжений достигается при значениях параметра $(R_p-r_0)/h_1$, изменяющихся в диапазоне от 4 до 5. Дальнейшее его увеличение не дает существен-

ного снижения уровня нагрузок, возникающих в стенке объекта исследования.

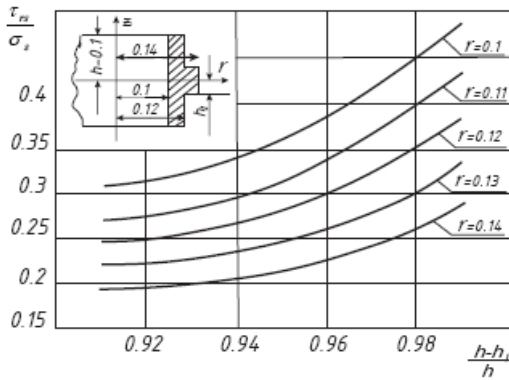


Рис. 2. Зависимости напряжения τ_{rz} от значений внутреннего радиуса элемента с одним ребром

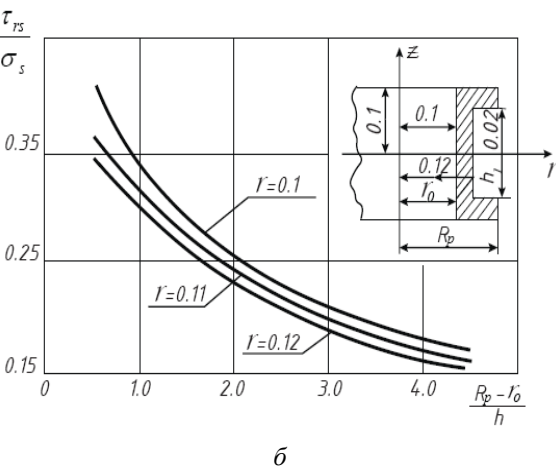
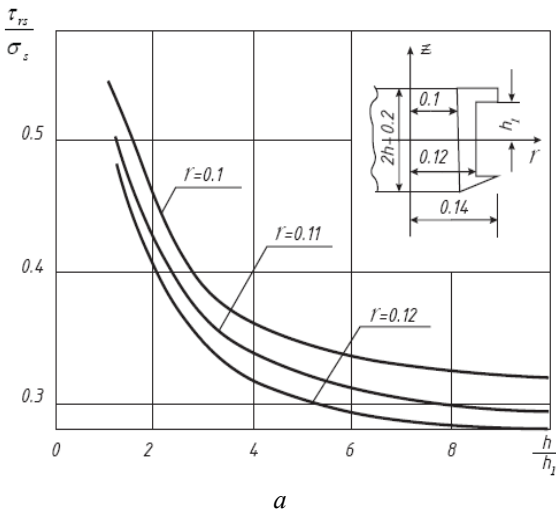


Рис. 3. Зависимости напряжения τ_{rz} от значений внутреннего радиуса элемента с двумя ребрами: а – изменение напряженно – деформированного состояния в зависимости от определяющего радиуса R_p ; б – изменение напряженно – деформированного состояния в зависимости от высоты ребра h_1

Наличие торцевых ребер и одного центрального ребра (рис. 4, а, б) качественно меняет картину напряженно – деформированного состояния.

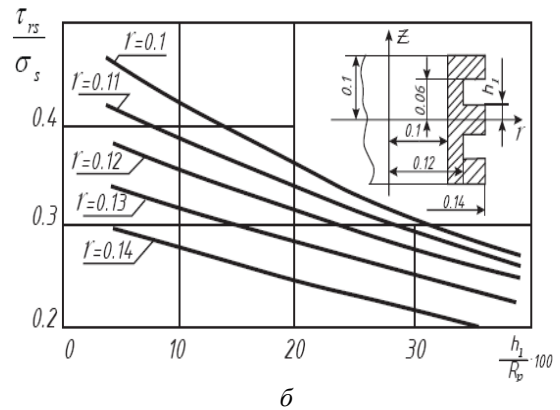
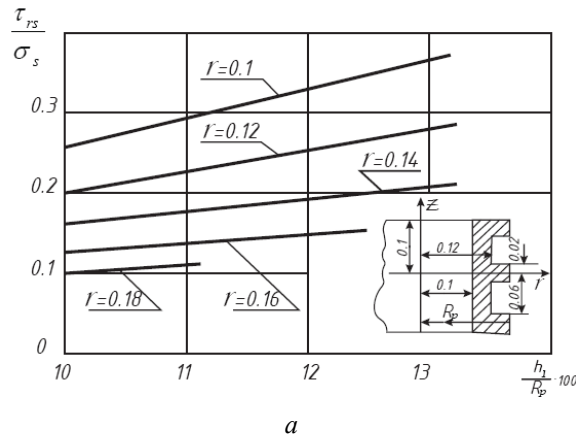


Рис. 4. Зависимости напряжения τ_{rz} от значений внутреннего радиуса элемента с тремя ребрами: а – изменение напряженно – деформированного состояния в зависимости от определяющего радиуса R_p ; б – изменение напряженно – деформированного состояния в зависимости от высоты ребра h_1

Помимо цилиндрических элементов, подкрепленных ребрами, рассматривались конические элементы (рис. 1, д-и).

В вычислительном эксперименте при оценке напряжений для полого конуса исследовалось влияние угла θ на напряженно-деформированное состояние (табл. 1). Результаты решения, полученным на основе теории R-функций приведены в нижней строке (табл.1) сравнивались с известными [10].

В структурной формуле (3) учитывались особенности, возникающие в вершине конуса.

Результат оценки напряженно-деформированного состояния усеченного полого конуса (рис. 1, е) позволил сделать следующие выводы: увеличение угла наклона конуса α при неизменных остальных параметрах приводит к росту окружных напряжений σ_θ в сечениях $z=0$, $z=h/2$, $z=h$. С увеличением угла, а на верхнем торце при $\alpha > 45^\circ$ при заданной нагрузке $P=80$ МПа напряжения вблизи внутренней поверхности превосходят σ_T , что подводит к необходимости исследования упругопластических деформаций в конических элементах при значениях угла конусности $\alpha > 45^\circ$ (рис. 5).

В полом коническом теле, ослабленном центральным ребром (рис. 1, ж), наблюдается существенный рост напряжений σ_θ в торцевом сечении

$z=h$ по сравнению с сечениями $z=0$ и $z=h/2$. Наличие ребра снижает величину окружных напряжений σ_θ в торцевом сечении $z=0$ по сравнению с теми же напряжениями в полном конусе без ребра. При этом заметим, с ростом радиуса r_3 эти же напряжения уменьшаются во всех сечениях конического орбренного тела (рис. 6).

Как следует из численных результатов, в сечении $z=h/2$ полого конуса с двумя торцевыми реб-

рами (рис.7) напряжения σ_θ выше, чем в сечениях $z=0$ и $z=h$.

Наличие центрального ребра и двух торцевых (рис. 8) привело к тому, наибольшие напряжения σ_θ наблюдаются на внутренней поверхности конуса в сечениях $z=h/2$ и $z=h$, затем они уменьшаются с увеличением радиуса r_3 . Эти напряжения ниже аналогичных, полученных в конусе с одним ребром для сечения $z=h$.

Таблица 1

Распределение напряжений пологим конусе

z	θ°				
	10	12	14	16	18
σ_r/P	0,4648	0,4641	0,4517	0,4595	0,4579
	0,4670	0,4548	0,4631	0,4607	0,4583
σ_θ/P	1,9444	1,4889	1,2130	1,0328	0,9085
	1,9501	1,4909	1,2305	1,0341	0,9101

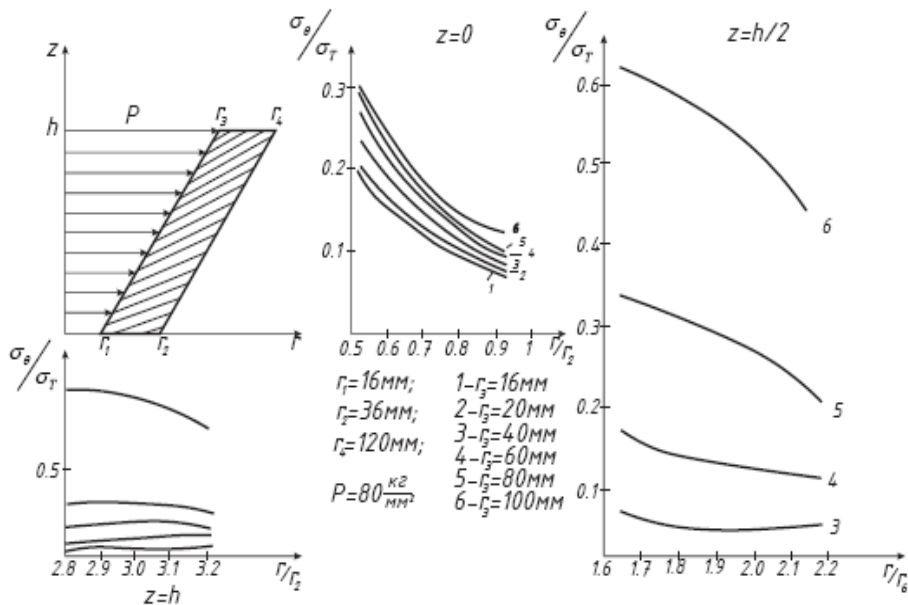


Рис. 5. Распределение напряжений $\sigma_\theta/\sigma_\tau$ в усеченном коническом элементе

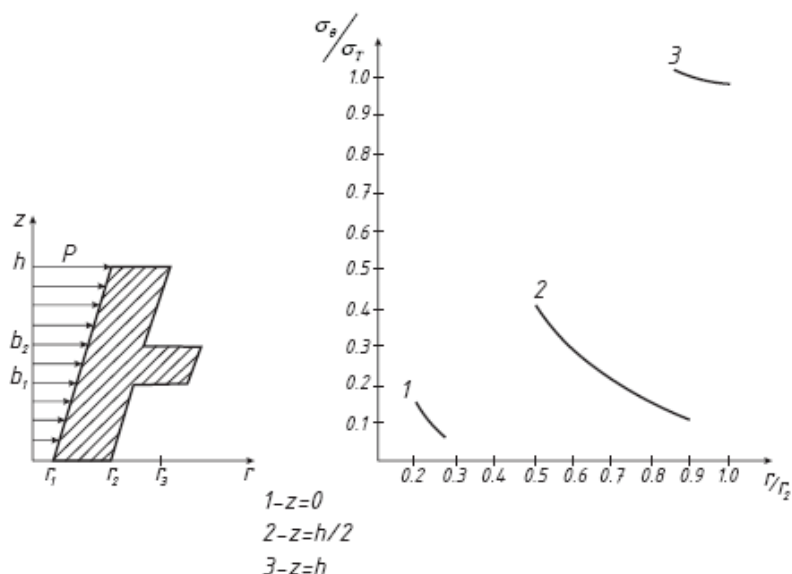


Рис. 6. Распределение напряжений $\sigma_\theta/\sigma_\tau$ в коническом элементе с одним ребром

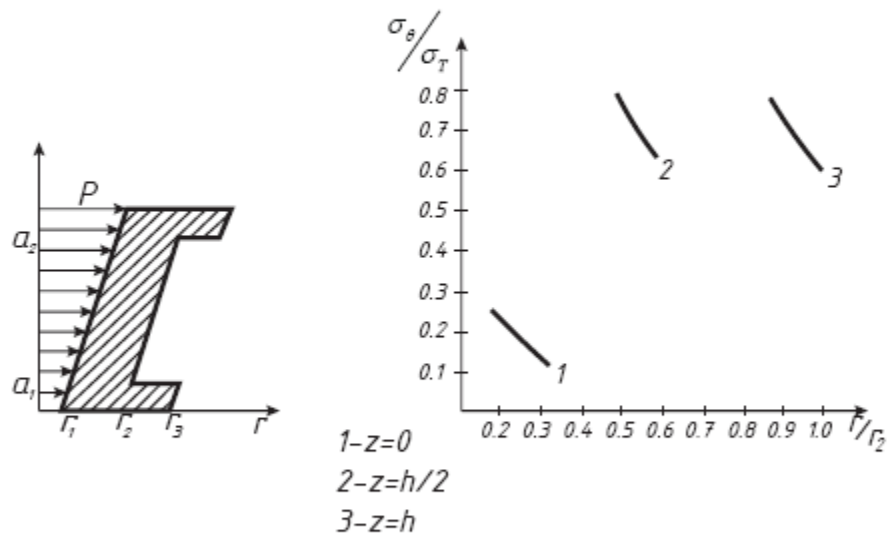


Рис. 7. Распределение напряжений σ_θ/σ_T в коническом элементе с двумя ребрами

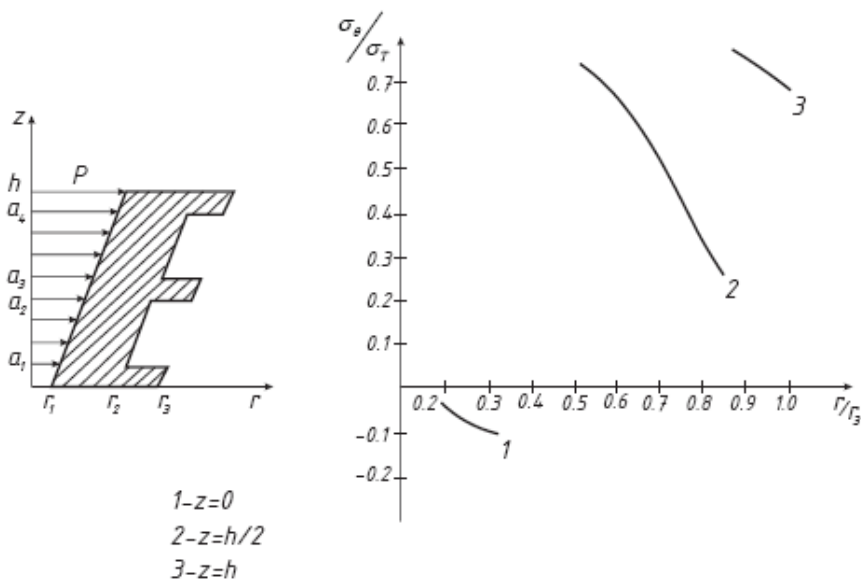


Рис. 8. Распределение напряжений σ_θ/σ_T в коническом элементе с тремя ребрами

6. Выводы

Подход к исследованию напряженно – деформированного состояния ребренных цилиндрических (конических) тел, основанный на теории R – функций, позволил рассмотреть элементы конечных размеров сложной геометрической формы при заданной внешней нагрузке. Полученные картины напряженно-деформированного состояния ребренных элементов дают возможность на стадии вычислительного эксперимента оценить влияние геометрических и физических параметров и выбрать соответствующий режим работы каждого конструктивного элемента.

Подобные исследования можно провести и для других технологических элементов с иными геометрическими и физическими характеристиками.

Литература

1. Тимошенко, С. П. Курс теории упругости [Текст] / С. П. Тимошенко. – Киев: Наук. думка, 1972. – 502 с.

2. Партон, В. З. Методы математической теории упругости [Текст] / В. З. Партон, П. И. Перлин. – М.: Наука, 1981. – 688 с.

3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике [Текст] / О. Зенкевич. – М.: Мир, 1975. – 349 с.

4. Метод конечных элементов в механике твердых тел [Текст] / под ред. А. С. Сахарова, И. Альтенбаха. – Киев: Вища школа; Лейпциг: Фаб Фахбухферлаг, 1982. – 420 с.

5. Молчанов, И. Н. Основы метода конечных элементов [Текст] / И. Н. Молчанов, Л. Д. Николенко. – Киев: Наукова Думка, 1989. – 272 с.

6. Богоявленский, К. Н. Штамповка полых деталей эластичной жидкостью [Текст] / К. Н. Богоявленский, Е. И. Сороков // Изготовление деталей пластическим деформированием. – Л.: Машиностроение, 1975. – С. 332–354.

7. Рвачев, В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения [Текст] / В. Л. Рвачев. – Киев: Наук. думка, 1982. – 552 с.

8. Кравченко, В. Ф. Алгебра логики, атомарные функции и вейвлеты [Текст] / В. Ф. Кравченко, В. Л. Рвачев. – М.: Физматлит, 2006. – 416 с.

9. Рвачев, В. Л. Программно-ориентированные языки и системы для инженерных расчетов [Текст] / В. Л. Рвачев, А. Н. Шевченко. – Киев: Техника, 1988. – 197 с.

10. Улитко, А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А. Ф. Улитко. – Киев: Наук. думка, 1979. – 294 с.

11. Сизова, Н. Д. Апостериорные оценки погрешности вариационно-структурных решений краевых задач [Текст] / Н. Д. Сизова // *Мат. методы анализа динамических систем.* – 1986. – Вып. 8. – С. 38–42.

References

1. Timoshenko, S. P. (1972). *Kurs teorii uprugosti.* Kiev: Nauk. dumka, 502.

2. Parton, V. Z., Perlin, P. I. (1981). *Metody matematicheskoy teorii uprugosti.* Moscow: Nauka, 688.

3. Zenkevich, O. (1975). *Metod konechnykh jelementov v tehnikе.* Moscow: Mir, 349.

4. Saharov, A. S., Al'tenbah, I. (Eds.) (1982). *Metod konechnykh jelementov v mehanike tverdyh tel.* Kiev: Vishha shkola; Lejpcig: Feb Fahbhferlag, 420.

5. Molchanov, I. N., Nikolenko, L. D. (1989). *Osnovy metoda konechnykh jelementov.* Kiev: Naukova Dumka, 272.

6. Bogojavlenskij, K. N., Sorokov, E. I. (1975). *Shtampovka polykh detalej jelastichnoj zhidkost'ju. Izgotovlenie detalej plasticheskim deformirovaniem.* Leningrad: Mashinostroenie, 332–354.

7. Rvachev, V. L. (1982). *Teorija R-funkcij i nekotorye ee prilozhenija.* Kiev: Nauk. dumka, 552.

8. Kravchenko, V. F., Rvachev, V. L. (2006). *Algebra logiki, atomarnye funkicii i vejlvety.* Moscow: Fizmatlit, 416.

9. Rvachev, V. L., Shevchenko, A. N. (1988). *Programmno-orientirovannye jazyki i sistemy dlja inzhenernykh raschetov.* Kiev: Tehnika, 197.

10. Ulitko, A. F. (1979). *Metod sobstvennykh vektornykh funkcij v prostranstvennykh zadachah teorii uprugosti.* Kiev: Nauk. dumka, 294.

11. Sizova, N. D. (1986). *Aposteriornye ocenki pogreshnosti variacionno-struktturnykh reshenij kraevykh zadach.* *Mat. metody analiza dinamicheskikh system,* 8, 38–42.

Дата надходження рукопису 18.05.2016

Сизова Наталья Дмитриевна, доктор фізико-математических наук, профессор, кафедра економічної кібернетики і інформаційних технологій, Харківський національний університет будівництва і архітектури, ул. Сумська, 40, г. Харків, Україна, 61002
E-mail: sizova@ukr.net