

**Рибальченко Лілія Ігорівна**, кандидат технічних наук, старший викладач, кафедра управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту, площа Фейербаха, 7, м. Харків, Україна, 61050  
E-mail: ryb\_lili@ukr.net

**Котельнікова Анастасія Андріївна**, кафедра управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту, площа Фейербаха, 7, м. Харків, Україна, 61050  
E-mail: relax2103@gmail.com

**Парфьонова Юлія Валеріївна**, кафедра управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту, площа Фейербаха, 7, м. Харків, Україна, 61050  
E-mail: parf\_uli@ukr.net

**Пономаренко Ганна Миколаївна**, кафедра управління експлуатаційною роботою, Український державний університет залізничного транспорту, площа Фейербаха, 7, м. Харків, Україна, 61050  
E-mail: pomomarenko198@ukr.net

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2313-8416.2016.76534

## ПОСТРОЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ {1,2}-АПРОКСИМАЦИИ БЕЗМОМЕНТНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИН

© И. П. Боков, Н. С. Бондаренко, Е. А. Стрельникова

*Рассмотрена задача статики трансверсально-изотропных пластин, которые находятся под действием сосредоточенной силы. Используются уравнения статики {1,2}-аппроксимации, полученные путем разложения искомым функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Данные уравнения учитывают все компоненты тензора напряжений, включая поперечные сдвиговые и нормальные напряжения. Проведены численные исследования, демонстрирующие влияние упругих констант на компоненты напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной пластины*

**Ключевые слова:** {1,2}-аппроксимация, фундаментальное решение, трансверсально-изотропные пластины, уравнения статики, безмоментное напряженное состояние

*The problem of static for transversely-isotropic plates, which are under the action of a concentrated force, was considered. Static equations of {1,2}-approximation obtained by decomposition of the desired functions in Fourier series in Legendre polynomials in relation to the thickness of the coordinates were used. These equations take into account all the components of the stress tensor, including the transverse shear and normal stresses. Numerical studies demonstrating the effect of elastic constants on the components of the stress-strain state of a transversely- isotropic plate were conducted*

**Keywords:** {1,2}-approximation; fundamental solution; transversely-isotropic plates; static equations; moment-less stress state

### 1. Введение

В современном машиностроении, авиастроении и других отраслях промышленности широко применяются новые типы материалов, которые обладают трансверсальной изотропией упругих свойств. Для исследования прочности тонкостенных элементов конструкций из таких материалов в местах концентрации напряжений требуются подходы, более современные, чем классическая теория Кирхгофа-Лява. Классическая теория удовлетворительно описывает напряженно-деформированное состояние (НДС)

сравнительно тонких трансверсально-изотропных пластин, но не учитывает явления, обусловленные сдвигами и обжатием.

В работе для сведения трехмерной задачи для трансверсально-изотропных пластин к двумерной используется обобщенная теория пластин и оболочек в варианте {1,2}-аппроксимации. Данная теория является наиболее приемлемой для использования в качестве уточнённой теории, поскольку она не основана на каких-либо гипотезах, а использует метод И. Н. Векуа разложения искомым функций в ряды

Фурье по полиномам Лежандра. Этот подход позволяет учесть поперечные касательные и нормальные напряжения.

Целью этой работы является не только построение системы фундаментальных решений, но и исследования демонстрирующие влияние упругих констант на компоненты НДС трансверсально-изотропной пластины.

## 2. Литературный обзор

Метод разложения по толщинной координате с использованием полиномов Лежандра предложен в 1955 г. И. Н. Векуа [1]. Здесь проекционным способом получены дифференциальные уравнения равновесия (движения) призматических оболочек переменной толщины относительно моментов компонент напряжений.

Существует несколько подходов к построению фундаментальных решений уравнений тонких упругих пластин и оболочек.

Первый из них заключается в исследовании сингулярных решений однородных дифференциальных уравнений, соответствующих конкретному сосредоточенному воздействию.

Такой подход успешно применяли для сферической оболочки А. Л. Гольденвейзер [2], пологих сферических и цилиндрических оболочек И. Н. Векуа [3], Е. Reissner [4], а затем для пологих оболочек двойной кривизны – Н. А. Киль [5] и др.

Существенным недостатком такого подхода является то, что для определения сингулярного решения, соответствующего конкретному сосредоточенному воздействию, необходимо удовлетворить системе геометрических и статических условий в окрестности особой точки. Иногда, особенно для несферических оболочек, это приводит к ошибочным результатам или же к решениям, содержащим лишние регулярные решения.

Второй подход приводит к решению дифференциальных уравнений с правыми частями в виде дельта-функции Дирака. При этом применяются разнообразные методы построения фундаментальных решений. Наиболее типичные из них – методы интегральных преобразований Фурье – развиты в работах П. М. Величко, В. К. Хижняка, В. П. Шевченко [6].

Все эти методы были разработаны для изучения характера особенностей компонент напряженно-деформированного состояния пластин и оболочек или исследования прочности пластин и оболочек при локальных нагрузках.

Фундаментальное решение, с использованием уточненной теории, в варианте {1,0}-аппроксимации было получено для уравнений статики трансверсально-изотропных пластин в работе И. П. Бокова, Е. А. Стрельниковой [7]. Фундаментальные решения уравнений термоупругости {1,0}- и {1,2}-аппроксимации для трансверсально-изотропных пластин были построены в работах Н. С. Бондаренко [8, 9].

Из публикаций последних лет, в которых используется обобщенная теория {m,n}-аппроксимации, можно отметить статьи [10, 11].

В данной работе впервые использованы уравнения статики {1,2}-аппроксимации для трансверсально-изотропных пластин, описывающие безмоментное напряженное состояние.

## 3. Цель и задачи исследования

Целью данного исследования является развитие уточненной теории пластин, использующей метод разложения по толщинной координате с использованием полиномов Лежандра предложенный И. Н. Векуа и построение фундаментального решения уравнений статики {1,2}-аппроксимации безмоментного напряженного состояния для трансверсально-изотропных пластин.

Достижение поставленной цели предусматривает:

- сведение трехмерной задачи теории упругости к двумерной используя метод И. Н. Векуа;
- построение фундаментального решения полученной системы уравнений с помощью двумерного интегрального преобразования Фурье;
- проведение оценочных расчетов, демонстрирующих влияние упругих параметров на НДС пластины.

## 4. Материалы и методы исследований влияния упругих параметров на компоненты НДС трансверсально-изотропной пластины

### 4.1. Основные соотношения и математическая формулировка задачи

Рассматривается трансверсально-изотропная пластина толщины  $2h$  в прямоугольной декартовой системе координат  $x, y, z$ . На пластину действует сосредоточенная сила  $\vec{F}$ , приложенная в начале координат (особой точке).

В рамках {1,2}-аппроксимации представление компонент вектора перемещений и тензора напряжений имеет вид

$$u_x = uP_0, \quad u_y = vP_0, \quad u_z = w_1P_1;$$

$$\sigma_x = \frac{N_x}{2h} P_0(x \rightarrow y),$$

$$\tau_{xy} = \frac{S}{2h} P_0, \quad \tau_{xz} = \frac{3Q_{x1}}{2h} (P_1 - P_3)(x \rightarrow y),$$

$$\sigma_z = \frac{R_0}{2h} (P_0 - P_2),$$

где  $u, v, w_1$  – обобщенные перемещения пластины; из которых  $u$  и  $v$  являются аналогами перемещений точек срединной поверхности пластины;  $N_x, N_y, S, Q_{x1}, Q_{y1}, R_0$  – обобщенные усилия.

Математическая формулировка задачи содержит полную систему уравнений теории упругости без учета граничных условий на краях реальной пластины. Система уравнений для трансверсально-изотроп-

ных пластин в варианте {1,2}-аппроксимации, описывающая безмоментное напряженное состояние состоит из:

– соотношений упругости:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= B_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) + \lambda_0 R_0, \\
 N_2 &= B_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x_2} + \nu \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + \lambda_0 R_0, \\
 S &= \frac{1-\nu}{2} B_0 \left( \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \right), \\
 Q_{11} &= \Lambda'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_1}, \\
 Q_{21} &= \Lambda'_0 \frac{\partial w_1}{\partial x_2}, \\
 R_0 &= \Omega'_0 \left[ w_1 + \lambda_0 \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} \right) \right],
 \end{aligned} \tag{1}$$

где

$$\begin{aligned}
 B_0 &= \frac{2}{1-\nu^2}, \quad \lambda_0 = \frac{\nu'}{1-\nu} E^*, \\
 \Lambda'_0 &= \frac{7}{5} \frac{1}{E/G'}, \quad \Omega'_0 = \frac{5}{3} \frac{(1-\nu)/E^*}{1-\nu-2(\nu')^2 E^*}, \quad E^* = \frac{E}{E'}.
 \end{aligned}$$

$E, E'$  – модули Юнга для направлений в плоскости изотропии и перпендикулярных к ней;  $\nu, \nu', G, G'$  – коэффициенты Пуассона и модули сдвига, соответствующие этим направлениям;

– уравнений равновесия

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial N_1}{\partial x_1} + \frac{\partial S}{\partial x_2} + q_1 &= 0, \quad \frac{\partial N_2}{\partial x_2} + \frac{\partial S}{\partial x_1} + q_2 = 0, \\
 \frac{\partial Q_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial Q_{21}}{\partial x_2} - R_0 + q_3 &= 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $q_1 = q_1^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_2 = q_2^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $q_3 = q_3^* \delta(x_1, x_2)$ ,  $\delta(x_1, x_2)$  – двумерная дельта-функция Дирака [12].

Соотношения (1), (2) представлены в безразмерной системе координат ( $x_1 = x/h$ ,  $x_2 = y/h$ ,  $x_3 = z/h$ ). Обобщенные усилия определены с точностью до величины  $Eh$ , а обобщенные перемещения – до  $h$ .

#### 4.2. Изложение метода исследования

Подставив соотношения упругости (1) в уравнения равновесия (2) и применив двумерное интегральное преобразование Фурье к полученной системе, получим

$$\begin{aligned}
 \left( A \xi_1^2 + \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_2^2 \right) \tilde{u} + A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_1 \tilde{w}_1 &= \frac{q_1^*}{2\pi}, \\
 A_0 \xi_1 \xi_2 \tilde{u} + \left( \frac{1-\nu}{2} B_0 \xi_1^2 + A \xi_2^2 \right) \tilde{v} + \lambda_0 \Omega'_0 i \xi_2 \tilde{w}_1 &= \frac{q_2^*}{2\pi}, \\
 -\lambda_0 \Omega'_0 i (\xi_1 \tilde{u} + \xi_2 \tilde{v}) + (\Omega'_0 + \Lambda'_0 p^2) \tilde{w}_1 &= \frac{q_3^*}{2\pi},
 \end{aligned} \tag{3}$$

где

$$A = B_0 + \lambda_0^2 \Omega'_0, \quad A_0 = A + \frac{\nu-1}{2} B_0.$$

Решив указанную систему, найдем трансформанты обобщенных перемещений:

$$\begin{aligned}
 \tilde{u} &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2+a_0^2)} + q_2^* \frac{1}{A} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+a_0^2)} + \right. \\
 & q_1^* \frac{\Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{\xi_1^2}{p^4(p^2+a_0^2)} + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4(p^2+a_0^2)} - \\
 & - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{i \xi_1}{p^2(p^2+a_0^2)} - q_1^* \frac{2}{B_0(\nu-1)} \frac{\xi_2^2}{p^4} + \\
 & \left. + q_2^* \frac{2}{B_0(\nu-1)} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4} \right], \\
 \tilde{v} &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{1}{A} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2+a_0^2)} + \right. \\
 & + q_2^* \frac{1}{A} \frac{\xi_2^2}{p^2(p^2+a_0^2)} + q_1^* \frac{\Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4(p^2+a_0^2)} + \\
 & + q_2^* \frac{\Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{\xi_2^2}{p^4(p^2+a_0^2)} - q_3^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{i \xi_2}{p^2(p^2+a_0^2)} + \\
 & \left. + q_1^* \frac{2}{B_0(\nu-1)} \frac{\xi_1 \xi_2}{p^4} + q_2^* \frac{2}{B_0(\nu-1)} \frac{\xi_1^2}{p^4} \right], \\
 \tilde{w}_1 &= \frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{i \xi_1}{p^2(p^2+a_0^2)} + \right. \\
 & \left. + q_2^* \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0} \frac{i \xi_2}{p^2(p^2+a_0^2)} + q_3^* \frac{1}{\Lambda'_0} \frac{1}{p^2+a_0^2} \right],
 \end{aligned} \tag{4}$$

где

$$a_0^2 = \frac{B_0 \Omega'_0}{A \Lambda'_0}, \quad p^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2;$$

$(\xi_1, \xi_2)$  – координаты точки в пространстве трансформант.

Применив преобразование Фурье к уравнениям закона Гука (1) и подставив трансформанты обобщенных перемещений (4) в полученные выра-

жения, найдем выражения для обобщенных усилий

$$\begin{aligned} \tilde{N}_1 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) \right. \\ & + q_1^* a_0^2 \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + q_2^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) + \\ & + q_2^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) + 2q_1^* \tilde{\Phi}_6(\xi_2, \xi_1) + \\ & + q_2^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) + 2q_1^* \tilde{\Phi}_6(\xi_2, \xi_1) - \\ & - 2q_2^* \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) + q_1^* \frac{B_0 \nu}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) + q_2^* \frac{B_0 \nu}{A} \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) + \\ & + q_1^* a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_4(\xi_2, \xi_1) + q_2^* a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_5(\xi_2, \xi_1) \left. \right] - \\ & - \frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \tilde{\Phi}_7(\xi_2, \xi_1) - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2) \right], \\ \tilde{N}_2 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) + q_2^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_1(\xi_2, \xi_1) + \right. \\ & + q_1^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_2, \xi_1) + q_2^* a_0^2 \tilde{\Phi}_3(\xi_2, \xi_1) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \tilde{\Phi}_5(\xi_2, \xi_1) - \\ & - 2q_1^* \tilde{\Phi}_6(\xi_2, \xi_1) + 2q_2^* \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) + q_1^* \frac{B_0 \nu}{A} \tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) + \\ & + q_2^* \frac{B_0 \nu}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) + q_1^* a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) + \\ & + q_2^* a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \nu \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) \left. \right] - \\ & - \frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \tilde{\Phi}_7(\xi_2, \xi_1) - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2) \right], \\ \tilde{S} = & -\frac{1-\nu}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \frac{B_0}{A} \tilde{\Phi}_2(\xi_2, \xi_1) + \right. \\ & + q_1^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) + q_2^* a_0^2 \tilde{\Phi}_4(\xi_2, \xi_1) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2) - \\ & - q_1^* \frac{1}{\nu-1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_2, \xi_1) + q_2^* \frac{1}{\nu-1} \tilde{\Phi}_6(\xi_2, \xi_1) + \\ & + q_1^* \frac{1}{\nu-1} \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) - q_2^* \frac{1}{\nu-1} \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2) \left. \right], \\ \tilde{Q}_{11} = & \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2) - \right. \\ & \left. - q_3^* \frac{A}{\lambda_0 \Omega'_0} \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) \right], \\ \tilde{Q}_{21} = & \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \tilde{\Phi}_5(\xi_2, \xi_1) - \right. \\ & \left. - q_3^* \frac{A}{\lambda_0 \Omega'_0} \tilde{\Phi}_7(\xi_2, \xi_1) \right], \\ \tilde{R}_0 = & -\frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) + q_2^* \tilde{\Phi}_7(\xi_2, \xi_1) - \right. \\ & \left. - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2) \right], \end{aligned} \tag{5}$$

где  $\tilde{\Phi}_1(\xi_1, \xi_2) = \frac{i\xi_1^3}{p^2(p^2 + a_0^2)}$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_2(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^2(p^2 + a_0^2)}, \\ \tilde{\Phi}_3(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1^3}{p^4(p^2 + a_0^2)}, \\ \tilde{\Phi}_4(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4(p^2 + a_0^2)}; \\ \tilde{\Phi}_5(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1^2}{p^2(p^2 + a_0^2)}, \\ \tilde{\Phi}_6(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1^2 \xi_2}{p^4}, \\ \tilde{\Phi}_7(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1}{p^2 + a_0^2}, \\ \tilde{\Phi}_8(\xi_1, \xi_2) &= \frac{\xi_1 \xi_2}{p^2(p^2 + a_0^2)}, \\ \tilde{\Phi}_9(\xi_1, \xi_2) &= \frac{1}{p^2 + a_0^2}, \\ \tilde{\Phi}_{10}(\xi_1, \xi_2) &= \frac{i\xi_1}{p^4}. \end{aligned} \tag{6}$$

Применяя формулу обращения для двумерного интегрального преобразования Фурье [13] к (5) и (6) получим оригиналы внутренних силовых факторов

$$\begin{aligned} N_1 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \Phi_1(x_1, x_2) + q_2^* \frac{B_0}{A} \Phi_2(x_1, x_2) + \right. \\ & + q_1^* a_0^2 \Phi_3(x_1, x_2) + q_2^* a_0^2 \Phi_4(x_1, x_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \Phi_5(x_1, x_2) + \\ & + 2q_1^* \Phi_6(x_2, x_1) - 2q_2^* \Phi_6(x_1, x_2) + q_1^* \frac{B_0 \nu}{A} \Phi_2(x_2, x_1) + \\ & + q_2^* \frac{B_0 \nu}{A} \Phi_1(x_2, x_1) + q_1^* a_0^2 \nu \Phi_4(x_2, x_1) + \\ & + q_2^* a_0^2 \nu \Phi_3(x_2, x_1) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \nu \Phi_5(x_2, x_1) \left. \right] - \\ & - \frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \Phi_7(x_1, x_2) + q_2^* \Phi_7(x_2, x_1) - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2) \right], \\ N_2 = & -\frac{1}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \Phi_2(x_2, x_1) + q_2^* \frac{B_0}{A} \Phi_1(x_2, x_1) + \right. \\ & + q_1^* a_0^2 \Phi_4(x_2, x_1) + q_2^* a_0^2 \Phi_3(x_2, x_1) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \Phi_5(x_2, x_1) - \\ & - 2q_1^* \Phi_6(x_2, x_1) + 2q_2^* \Phi_6(x_1, x_2) + q_1^* \frac{B_0 \nu}{A} \Phi_1(x_1, x_2) + \\ & + q_2^* \frac{B_0 \nu}{A} \Phi_2(x_1, x_2) + q_1^* a_0^2 \nu \Phi_3(x_1, x_2) + \\ & + q_2^* a_0^2 \nu \Phi_4(x_1, x_2) + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \nu \Phi_5(x_1, x_2) \left. \right] - \\ & - \frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \Phi_7(x_1, x_2) + q_2^* \Phi_7(x_2, x_1) - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S = & -\frac{1-\nu}{2\pi} \left[ q_1^* \frac{B_0}{A} \Phi_2(x_1, x_2) + q_2^* \frac{B_0}{A} \Phi_2(x_2, x_1) + \right. \\
 & + q_1^* a_0^2 \Phi_4(x_1, x_2) + q_2^* a_0^2 \Phi_4(x_2, x_1) + \\
 & + q_3^* \lambda_0 a_0^2 \Phi_8(x_1, x_2) - \\
 & - q_1^* \frac{1}{\nu-1} \Phi_{10}(x_2, x_1) + \\
 & + q_2^* \frac{1}{\nu-1} \Phi_6(x_2, x_1) + \\
 & \left. + q_1^* \frac{1}{\nu-1} \Phi_6(x_1, x_2) - q_2^* \frac{1}{\nu-1} \Phi_{10}(x_1, x_2) \right], \\
 Q_{11} = & \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \Phi_5(x_1, x_2) + q_2^* \Phi_8(x_1, x_2) - \right. \\
 & \left. - q_3^* \frac{A}{\lambda_0 \Omega'_0} \Phi_7(x_1, x_2) \right], \\
 Q_{21} = & \frac{\lambda_0 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \Phi_8(x_1, x_2) + q_2^* \Phi_5(x_2, x_1) - \right. \\
 & \left. - q_3^* \frac{A}{\lambda_0 \Omega'_0} \Phi_7(x_2, x_1) \right], \\
 R_0 = & -\frac{\lambda_0^2 \Omega'_0}{2\pi A} \left[ q_1^* \Phi_7(x_1, x_2) + q_2^* \Phi_7(x_2, x_1) - \right. \\
 & \left. - q_3^* \frac{B_0}{\lambda_0 \Lambda'_0} \Phi_9(x_1, x_2) \right], \tag{7}
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 \Phi_1(x_1, x_2) = & \frac{3x_1}{2(x_1^2 + x_2^2)} \times \\
 & \times G_{0,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \\
 & + \frac{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_2(x_1, x_2) = & \frac{x_2}{2(x_1^2 + x_2^2)} \times \\
 & \times G_{0,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \frac{x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2} G_{1,2}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_3(x_1, x_2) = & -\frac{3}{8} x_1 \times \\
 & \times G_{1,0}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - \frac{x_1(x_1^2 - 3x_2^2)}{8(x_1^2 + x_2^2)} G_{2,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_4(x_1, x_2) = & -\frac{1}{8} x_2 \times \\
 & \times G_{1,0}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) - \frac{x_2(3x_1^2 - x_2^2)}{8(x_1^2 + x_2^2)} G_{2,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Phi_5(x_1, x_2) = & \frac{1}{2} \left[ G_{0,0}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) + \right. \\
 & \left. + \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}) \right], \\
 \Phi_6(x_1, x_2) = & -\frac{x_2(x_1^2 - x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\
 \Phi_7(x_1, x_2) = & \frac{2x_1}{x_1^2 + x_2^2} G_{0,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_8(x_1, x_2) = & \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} G_{1,1}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_9(x_1, x_2) = & G_{0,0}(a_0 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}), \\
 \Phi_{10}(x_1, x_2) = & \frac{x_1(x_1^2 + 3x_2^2)}{2(x_1^2 + x_2^2)^2}, \tag{8}
 \end{aligned}$$

где  $G_{n,\nu}(rz)$  – специальная G-функция [14].

При циклической замене переменных в (8) ( $x_1$  на  $x_2$  и  $x_2$  на  $x_1$ ), получим соответствующие  $\Phi_i(x_2, x_1)$  ( $i=1..10$ )

### 5. Результаты исследования и их обсуждение

Для исследования особенностей НДС трансверсально-изотропных пластин при сосредоточенных силовых воздействиях положим  $q_1^* = q_2^* = q_3^* = 1$ .

Результаты расчетов представлены в безразмерной декартовой системе координат  $x_1, x_2$ . Графики построены вдоль оси абсцисс ( $x_2 = 0$ ).

Численные исследования были проведены для трансверсально-изотропной пластины

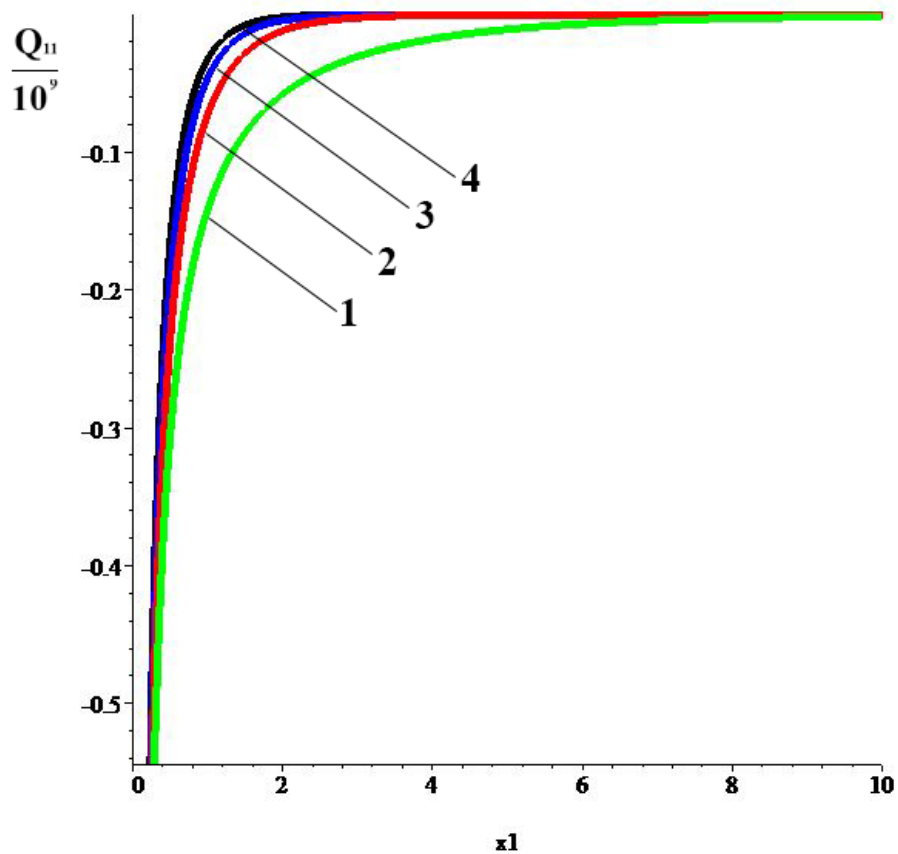
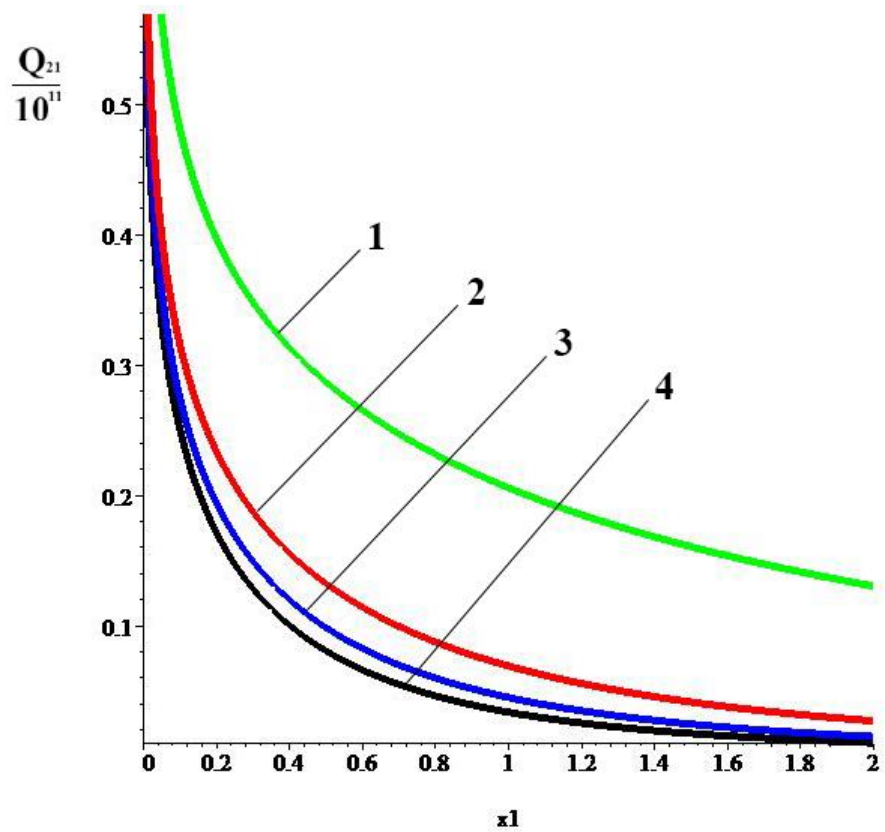
$$(E^* = 5; \nu = 0,3; \nu' = 0,07).$$

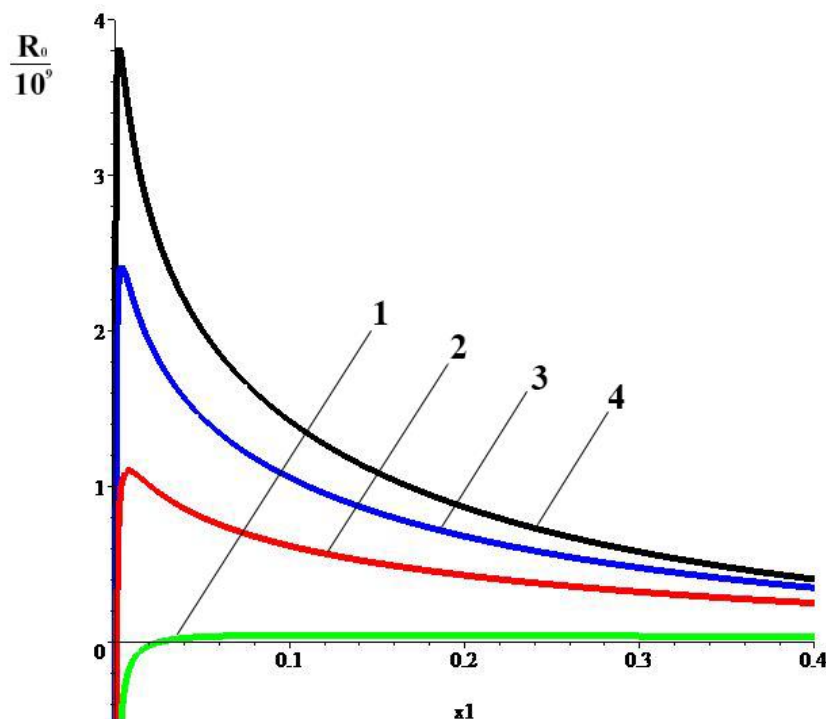
Ниже представлены графики изменения обобщенных усилий  $Q_{11}, Q_{21}, R_0$  в зависимости от параметра сдвиговой податливости  $E/G'$ . Результаты приведены для таких значений параметра сдвиговой податливости: 2,6, 40, 80, 120. Кривая 1 соответствует значению 2,6, а кривые 2, 3 и 4 – значениям 40, 80 и 120 соответственно.

Численные исследования показали, что параметры сдвиговой податливости практически не влияют на значения усилий  $N_1, N_2, S$ .

Рис. 1–3 демонстрируют графики изменения обобщенных усилий  $Q_{11}, Q_{21}, R_0$ . Из этих рисунков видно, что увеличение параметра сдвиговой податливости ведет к увеличению усилий  $Q_{11}$  и  $R_0$ , и уменьшению  $Q_{21}$ .

Данные исследования позволили численно исследовать характер поведения внутренних силовых факторов в зависимости от значения параметра сдвиговой податливости.

Рис. 1. Обобщенное усилие  $Q_{11}$ Рис. 2. Обобщенное усилие  $Q_{21}$

Рис. 3. Обобщенное усилие  $R_0$ 

### 6. Выводы

В работе для сведения трехмерной задачи для трансверсально-изотропных пластин к двумерной использовалась обобщенная теория пластин и оболочек в варианте  $\{1,2\}$ -аппроксимации. Соотношения для данной аппроксимации получены путем разложения искомых функций в ряды Фурье по полиномам Лежандра относительно толщинной координаты. Построено фундаментальное решение уравнения статики трансверсально-изотропных пластин в варианте  $\{1,2\}$ -аппроксимации. Проведены численные исследования, демонстрирующие влияние упругих констант на компоненты напряженно-деформированного состояния трансверсально-изотропной пластины.

### Литература

1. Векуа, И. Н. Об одном методе расчета призматических оболочек [Текст] / И. Н. Векуа // Тр. Тбилис. матем. ин-та. – 1955. – Т. 21. – С. 191–253.
2. Гольденвейзер, А. Л. К вопросу о расчете оболочек на сосредоточенные силы [Текст] / А. Л. Гольденвейзер // Прикл. математика и механика. – 1954. – Т. 8, № 2. – С. 181–186.
3. Векуа, И. Н. Вариационные принципы построения теории оболочек [Текст] / И. Н. Векуа. – Тбилиси: Изво Тбилис. ун-та, 1970. – 300 с.
4. Reissner, E. Reflections on the theory of elastic plates [Text] / E. Reissner // Applied Mechanics Reviews. – 1985. – Vol. 38, Issue 11. – P. 1453. doi: 10.1115/1.3143699
5. Киль, Н. А. О действии местных нагрузок на оболочки [Текст] / Н. А. Киль // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1973. – № 3. – С. 43–46.
6. Величко, П. М. Местные напряжения в оболочках положительной, нулевой и отрицательной кривизны. Т. 1 [Текст] / П. М. Величко, В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Тбилиси: Изд-во Мицниереба, 1975. – С. 31–41.

7. Bokov, I. P. Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates [Text] / I. P. Bokov, E. A. Strelnikova // International Journal of Innovative Research in Engineering & Management. – 2015. – Vol. 2, Issue 6. – P. 56–62.

8. Бондаренко, Н. С. Фундаментальное решение дифференциальных уравнений термоупругости  $\{1,0\}$ -аппроксимации для трансверсально-изотропных пластин [Текст] / Н. С. Бондаренко // Труды Ин-та прикл. математики и механики НАН Украины. – 2009. – Т. 18. – С. 11–18.

9. Бондаренко, Н. С. Фундаментальное решение уравнений  $\{1,2\}$ -аппроксимации безмоментного термоупругого состояния трансверсально-изотропных пластин [Текст] / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев, В. П. Шевченко // Доповіді НАН України. – 2009. – № 11. – С. 46–52.

10. Бондаренко, Н. С. Исследование влияния внешней среды на термоупругое состояние изотропной пластины с теплоизолированным разрезом при одностороннем теплообмене [Текст] / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Теоретическая и прикладная механика. – 2014. – № 09 (55). – С. 42–52.

11. Бондаренко, Н. С. Коэффициенты интенсивности напряжений при термоупругом изгибе изотропных пластин с теплоизолированным разрезом в случае симметричного теплообмена [Текст] / Н. С. Бондаренко, А. С. Гольцев // Вісн. Донец. ун-ту. Сер. А. – 2013. – № 2. – С. 20–26.

12. Владимиров, В. С. Обобщенные функции в математической физике [Текст] / В. С. Владимиров. – М.: Наука, 1976. – 280 с.

13. Снеддон, И. Преобразования Фурье [Текст] / И. Снеддон. – М.: Издательство иностранной литературы, 1955. – 668 с.

14. Хижняк, В. К. Смешанные задачи теории пластин и оболочек [Текст]: учебное пособие / В. К. Хижняк, В. П. Шевченко. – Донецк: ДонГУ, 1980. – 128 с.

### References

1. Vekua, I. N. (1955). A method for calculating prismatic shells. Pr. Tbilis. Mat. Inst., 21, 191–253.

2. Goldenveizer, A. L. (1954). On the question of the calculation of shells on concentrated forces. *Appl. mathematics and mechanics*, 8 (2), 181–186.
3. Vekua, I. N. (1970). *Variational principles of the theory of shells*. Tbilisi: Publisher of Tbilisi, 300.
4. Reissner, E. (1985). Reflections on the Theory of Elastic Plates. *Applied Mechanics Reviews*, 38 (11), 1453. doi: 10.1115/1.3143699
5. Kiel, N. A. (1973). On the action of local loads on the shell. *Proceedings of the universities. Construction and architecture*, 3, 43–46.
6. Velichko, P. M., Khizhnyak, V. K., Shevchenko, V. P. (1975). Local stresses in the shells of positive, neutral and negative curvature. Vol. 1. Tbilisi: Publishing house Mitsniereba, 31–41.
7. Bokov, I. P., Strelnikova, E. A. (2015). Fundamental solution of static equations of transversely isotropic plates. *International Journal of Innovative Research in Engineering & Management*, 2 (6), 56–62.
8. Bondarenko, N. S. (2009). The fundamental solution of differential equations of thermoelasticity {1,0}-approximation for transversely isotropic plates. *Proceedings of the Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine*, 18, 11–18.
9. Bondarenko, N. S., Goltsev, A. S., Shevchenko, V. P. (2009). Fundamental solution {1,2}-approximation the membrane thermoelastic state transversely isotropic plates. *Reports of National Academy of Sciences of Ukraine*, 11, 46–52.
10. Bondarenko, N. S., Goltsev, A. S. (2014). Investigation of the influence of the environment on the state of isotropic thermoelastic plate with insulated cut at one-sided heat exchange. *Theoretical and Applied Mechanics*, 09 (55), 42–52.
11. Bondarenko, N. S. (2013). Stress intensity factor in a thermoelastic bending of isotropic plates with insulated cut in the case of a symmetrical heat. *Mess. Of Donets. the University. Ser. A.*, 2, 20–26.
12. Vladimirov, V. S. (1976). *Generalized functions in mathematical physics*. Moscow: Science, 280.
13. Sneddon, I. (1955). *Fourier transform*. Moscow: Foreign literature publishing house, 668.
14. Khizhnyak, V. K., Shevchenko, V. P. (1980). Mixed problem in the theory of plates and shells. *Donetsk: DonGU*, 128.

*Дата надходження рукопису 14.07.2016*

**Боків Ігорь Петрович**, аспірант, кафедра прикладної математики і математического моделювання, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046  
E-mail: igp.bokov@gmail.com

**Стрельникова Елена Александровна**, доктор технічних наук, професор, ведучий научний співробітник, Відділ міцності і оптимізації конструкцій, Інститут проблем машиностроєння ім. А. Н. Подгорного НАНУ, ул. Пожарського, 2/10, г. Харків, Україна, 61046  
E-mail: elena15@gmx.com

**Бондаренко Наталія Сергєєвна**, кандидат фізико-математических наук  
E-mail: Bondarenko.Natalya.Sergeevna@gmail.com