

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 539.194: 544.273

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.98312

АНАЛИЗ ТИПОВ КОЛЕБАНИЙ ДВУХЧАСТОТНОГО МАЯТНИКА КАК МОДЕЛИ КОЛЕБАНИЙ МОЛЕКУЛЫ ВОДЫ

© Н. Т. Малафаев

Проведен анализ вращательных колебаний протонов молекул воды с помощью модели двухчастотного маятника. Определены параметры, показывающие изменение типа колебаний маятника и построены диаграммы областей для разных типов колебаний. Показана возможность анализа типа колебаний молекул в воде, границы перехода от независимых двухчастотных колебаний к эллипсоподобным вращениям протонов молекул около своих осей связей в неоднородном по углу поле сил межмолекулярного взаимодействия

Ключевые слова: молекула воды, двухчастотный маятник, тип колебания, неоднородное поле сил

1. Введение

Свойства воды широко обсуждаются в литературе. В работе [1] обсуждаются экспериментальные данные свойств воды и имеющиеся теории ее строения и свойств. В обзорной работе [2] рассмотрены теоретические работы отечественных исследователей. В обзоре [3] приведены результаты компьютерного моделирования свойств молекул воды.

В обзоре автора по своим работам [4] дана новая методика определения энергии активации по вязкости в воде и определен вклад в эту энергию от водных кластеров вблизи точки плавления льда. Этот вклад быстро уменьшается с нагревом вследствие тепловых колебаний молекул. Вопросы влияния колебательных спектров атомов и молекул на свойства веществ подробно рассматриваются в рамках теории эффекта Яна-Теллера [5]. В исследовании [4] впервые предложено применить данную теорию к колебательным спектрам молекул воды, и показано, что ее главные особенности обусловлены появлением в ее жидкой фазе новых вращательных коллективизированных колебаний, приводящих к изгибам водородных связей ($H -$ связей) в воде и значительному изменению всех ее свойств.

Моделирование вращательных колебаний молекул воды впервые проведено с помощью модели двухчастотного сферического маятника в исследовании [6], силовые и временные особенности колебаний в неоднородных полях сил межмолекулярного взаимодействия рассмотрено в [7], чисто эллиптические траектории маятника и средние углы отклонений маятника (и изгибов $H -$ связей) для них рассмотрены в [8]. Однако еще многие вопросы данных колебаний молекул воды еще требуют своего рассмотрения.

2. Литературный обзор

Основное внимание в литературе уделяется внутримолекулярным колебаниям молекул воды [3], обусловленных сильными внутренними взаимодействиями, а также коллективным движениям кластеров молекул воды [9], диффузии молекул [3, 10]. При компьютерном моделировании колебаний молекул воды методом молекулярной динамики задается большой шаг во времени сравнительно с периодом колебаний, что требует постоянной коррекции температуры системы, а также не позволяет анализировать более мелкие особенности движения молекул. Кроме того, учет теплового движения всех молекул приводит к его сильной хаотизации, разрыву связей.

Проблеме более слабых межмолекулярных взаимодействий уделяется меньше внимания, хотя именно эти силы обуславливают вращательные колебания молекул воды и в большей степени ответственны за ее термодинамические свойства. А проблеме моделирования вращательных колебаний молекул воды уделено мало внимания. Обычно информация об вращательных колебаниях рассматривалась как появление в жидкой фазе воды средних углов изгиба водородных связей [3, 11], причем без анализа их причины, что говорит о недооценке, а порой и непонимании, влияния вращательных колебаний молекул на свойства воды.

В работе [6] для моделирования вращательных колебаний молекул воды была применена модель двухчастотного сферического маятника, поскольку было показано [4], что малые вращательные колебания молекул воды являются двухчастотными. Результаты моделирования [6–8] показали, что эти колебания можно разделить на два типа: двухчастотные независимые колебания (НК) и одночастот-

ные вращения молекул и их ядер атомов водорода (протонов) вокруг осей H – связей с соседними молекулами, описывающих сложные траектории эллипсоподобных колебаний (ЭПК).

Наличие двух вращательных частот маятника задавалось параметром $k=I_x/I_y$, характеризующим отношение моментов инерции маятника (и молекулы) по осям модели, где $k>1$ и ось x – низкочастотная [6–8]. Вследствие различия моментов и сил инерции по осям возвращающие силы, действующие на маятник, становятся нецентральными, что может способствовать вращению маятника (и молекулы) вокруг его оси.

Моделирование колебаний для маятника проводилось в неоднородном поле сил (НПС) [6–8], моделирующем направленные межмолекулярные силы. Наличие НПС приводит к сильной зависимости периода колебаний маятника от амплитуды колебаний, что хорошо согласуется с температурными зависимостями либрационных частот воды [1]. Это также создает условия для возможности перехода двухчастотных колебаний маятника к колебаниям (вращениям) на одной общей частоте даже для малых отклонений маятника.

При малых начальных скоростях v_{y0} и при начальных смещениях δ_{x0} маятник совершает двухчастотные НК. Большие амплитуды колебаний по оси Y приводят к понижению частоты и к возможности равенства частот колебаний по осям. Поэтому при некоторой скорости, когда частоты сравнялись, маятник начинает совершать ЭПК вокруг его оси Z .

Можно по величине скорости разделить области НК и область ЭПК. Последняя делится по скорости на две: ЭПК-1 – до скорости чистой эллиптической орбиты (ЭО), когда все колебания проходят внутри эллипса и вторую ЭПК-2 – для больших скоростей – когда эллипсоподобные колебания маятника происходят вне области ЭО. При этом полагаем, что траектории движения маятника согласуются с траекториями вращательных колебаний протонов молекулы воды относительно их осей H – связи.

Поиск областей НК и ЭПК [6] проводился методом подбора начальной скорости маятника v_{y0} и был затруднен для больших начальных смещений δ_{x0} , поскольку сильно уменьшались скорости v_{y0} и размеры области существования ЭПК. Поэтому возникла необходимость разработать методику быстрого поиска областей с разными типами колебаний маятника для заданного смещения δ_{x0} .

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – поиск особенностей колебаний для серии измерений с изменением начальной скорости маятника для быстрого определения областей существования разных типов колебаний, а также определение скорости для ее эллиптической орбиты, разделяющей область ЭПК на две.

Для достижения цели были поставлены следующие задачи:

1. Определение параметров, показывающих изменение типа колебаний.

2. Проведение соответствующих изменений компьютерных программ.

3. Построение диаграмм для областей разных типов колебаний.

4. Модель колебаний двухчастотного маятника в НПС

Модель колебаний двухчастотного сферического маятника в НПС подробно рассмотрена в [6]. Она представляет две массы, закрепленные на двух невесомых стержнях длиной l под углом θ_0 , что дает разные моменты инерции маятника по осям. Ось X маятника соответствует оси x молекулы воды [2], а ось Y маятника – оси y молекулы воды для отношения моментов инерции $k=3$ либо оси z молекулы для отношения моментов $k=1,5$.

Отклонения маятника рассматриваются через угол отклонения маятника θ от вертикальной оси Z либо через относительные начальные смещения по оси X : $\delta_{x0}=x_0/l$ и смещения по оси Y : $\delta_{y0}=y_0/l$. Угол отклонения θ при моделировании ограничивался углом $\theta=90^\circ$ – нижней полусферой.

Локальное моделирование вращательных колебаний молекулы воды было проведено с помощью модели двухчастотного сферического маятника в НПС вида $G=g \cdot \cos^n \theta$ в пакете *MatLab* ($l=1$ м, $2 \cdot m=1$ кг, $g=10$ м/с²).

Определение параметров траекторий маятника проводилось для отношения моментов инерции, характерного для молекулы воды $k=1,5$ [8] и показателя НПС $n=8$. Эллипсоподобные колебания маятника [6–8] достаточно сложны для рассмотрения, а потому при анализе колебаний были выбраны и рассмотрены их общие осредненные параметры за значительное время моделирования (≈ 100 с). Шаг моделирования составлял 0,0001 с, поскольку при этом нелинейностями моделирования за время 100 с можно пренебречь. При большом времени моделирования и числе совершенных периодов колебаний можно по траекториям увидеть область пространства в XY – координатах, внутри которой происходят заданные колебания маятника.

Данное осредненное локальное поле сил остается неизменным для всего процесса моделирования колебаний. То есть, пренебрегаем тепловым движением соседних молекул воды, что применимо для состояний молекул близких к температуре плавления и далеких от критической температуры. Наличие НПС приводит к сильной зависимости периода колебаний маятника от величины амплитуды колебаний – от 1,8 до 4 и более секунд.

Для определения нужных параметров траекторий маятника вначале проводился расчет в цикле, с шагом по скорости, для всего диапазона скоростей в его нижней полусфере ($\theta < 90^\circ$). Затем уточнялись параметры для критической, эллиптической и максимальной скоростей маятника отдельно.

Несмотря на то, что колебания сферического маятника происходят в трехмерном пространстве координат XYZ [6–8], в исследовании рассматриваются для простоты только XY – проекции траекторий этих колебаний, поскольку для характерных для воды углов отклонений (менее 30°) их проекции аналогичны.

5. Результаты исследования и их обсуждение

На рис. 1 наблюдается сильная зависимость периода колебаний от величин скорости и начального смещения маятника δ_{x0} . В точке появления равенства частот (критической точке) происходит изменения типа колебаний от НК к ЭПК, и далее имеем одну общую частоту колебаний по обеим осям.

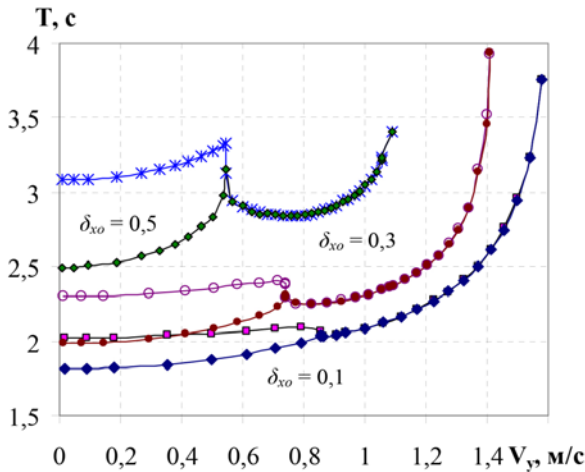


Рис. 1. Изменение периодов колебаний двухчастотного маятника с ростом его начальной скорости для начальных смещений по оси X: $\delta_{x0}=0,1$; $0,3$ и $0,5$

Если при малом смещении $\delta_{x0}=0,1$ кривые (нижняя пара) сходятся плавно, то для большего смещения $\delta_{x0}=0,5$ наблюдается скачок. При этом более низкая частота меняется более слабо, а более высокая (нижняя кривая) более быстро приближается к ней. В точке перехода период колебаний маятника становится практически равным (с точностью до 1 %) начальному низкочастотному периоду: $T_{kr} \approx T_{x0}$. После этого наблюдается понижение общего периода колебаний маятника, а затем его быстрое возрастание вследствие роста отклонений вблизи максимально возможной начальной скорости.

Вследствие роста смещений δ_{x0} и роста при этом начальной потенциальной энергии маятника его максимальная скорость уменьшается. Также это приводит к большему различию периодов колебаний по осям при малых скоростях с ростом величин начальных смещений δ_{x0} (рис. 1).

На рис. 2 показана трансформация вида областей траекторий колебаний в области НК при разных скоростях. При малых отклонениях маятника $\delta < 0,1$ область колебаний маятника близка к прямоугольнику. Видим, что прямоугольная область колебаний при малых скоростях и отклонениях превращается с ростом скорости в «бабочкообразную» область с изгибом боковых границ и приближением углов области колебаний к оси Y модели при меньшей амплитуде отклонения Y_m вдоль самой оси Y. Величина изгиба горизонтальной кривой растет с ростом величин начальной скорости, а также начального отклонения маятника δ_{x0} .

Причиной изгиба вертикальных прямых прямоугольной области колебаний является то, что коле-

бания происходят не на горизонтальной плоскости, а на сферической поверхности. При больших отклонениях маятника повышается его потенциальная энергия при потере кинетической. А потому величина отклонения маятника уменьшается, и вертикальные кривые изгибаются. Величина отклонения по оси Y_m меньше максимального y_m в углах, поскольку, вследствие работы закона сохранения момента импульса, происходит возникновение скорости вдоль оси X, тогда как в углах «бабочки» нет вращения в плоскости XY, и вся кинетическая энергия маятника идет на максимальное его отклонение от оси. Эти соображения остаются верными и для НПС. Так как для него при отклонениях маятника уменьшение потенциального поля относительно большее, то изгибы кривых тоже большие и размер ограничивающего эллипса по оси Y будет меньшим [6].

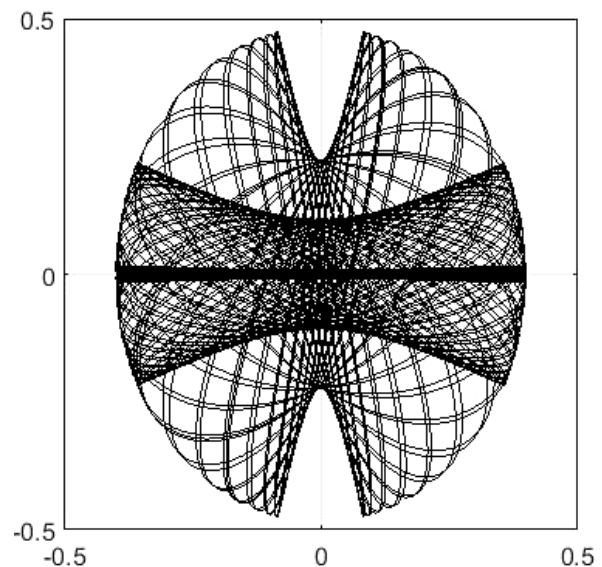


Рис. 2. Вид траекторий маятника (наложение) в области НК при разных скоростях (0,03; 0,32 и 0,64 м/с) для начального смещения маятника $\delta_{x0}=0,3$

Все области колебаний при разных скоростях (рис. 2) лежат внутри общей области, ограниченной эллиптической орбитой, лишь углы областей колебаний (для больших δ_{x0}) могут несколько выходить за ее пределы. Можно отметить, что по диагоналям «бабочки» возвращающие силы остаются центральными, а потому плотность траекторий вблизи диагоналей является максимальной, а вдоль оси X – минимальной, что особенно видно при сближении диагоналей по углу к оси Y.

С ростом начальной скорости маятника углы «бабочки» сближаются и при некоторой критической скорости v_{ykr} эти углы сливаются вместе и начинаются эллипсоподобные вращения маятника вокруг оси Z маятника. При этом происходит изменение вида: от малого зазора между углами «бабочки» в области НК к появлению узкого эллипса вдоль оси Y (рис. 3) в области ЭПК. Частоты колебаний маятника по обеим осям становятся равными, хотя и быстро изменяющимися при изменении величины начальной скорости вблизи критической скорости v_{ykr} при больших смещениях маятника δ_{x0} (рис. 1).

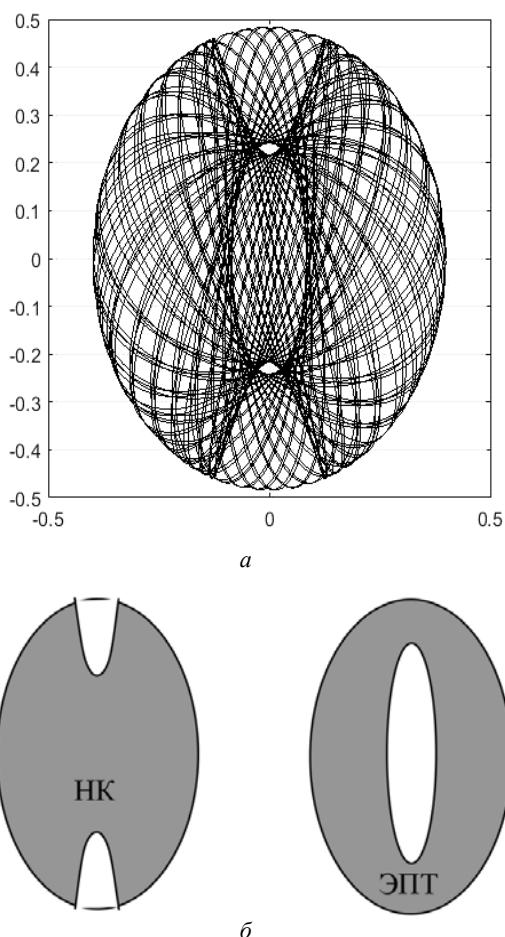


Рис. 3. Изменение вида областей колебаний маятника при переходе от НК к ЭПК: *a* – траектории колебаний маятника, *б* – схематическое раздельное представление областей траекторий колебаний маятника (до и после критической скорости v_{ykr})

Вначале внутренний эллипс, куда теперь не попадают траектории колебаний, узкий (рис. 3), однако он расширяется с ростом величины начальной скорости маятника (рис. 4). Схематически область колебаний можно описать с помощью кривых второго порядка: внешнего эллипса и 1–2 внутренних. Для внутренних кривых переход между типами колебаний можно описать как переход при критической скорости v_{ykr} , когда изменяется огибающая кривая от двух гипербол к эллипсу (рис. 3, б). Формулу такого перехода в координатах YX вблизи скорости v_{ykr} можно представить как:

$$y = a \sqrt{1 + \frac{bx^2}{(v_y - v_{ykr})^2}}, \tag{1}$$

где a – координата вершины эллипса или гиперболы по оси Y , b – константа.

При некоторой скорости v_{yel} внутренний эллипс сравнивается с внешним и получим чисто ЭО. При дальнейшем росте скорости эллипсы описывают траектории вокруг ЭО (рис. 4), где трем начальным скоростям соответствуют три полосы областей колебаний. При большом числе колебаний видно, что области колебаний маятника находятся между двумя

огibaющими эллипсами, размеры которых изменяются с ростом начальной скорости и эллиптичность огибающих эллипсов при этом уменьшается.

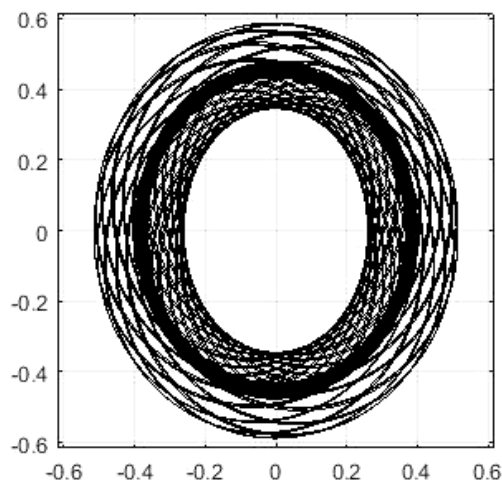


Рис. 4. Изменение вида областей колебаний: до, вблизи и более скорости v_{yel}

Таким образом, при анализе траекторий движения маятника для определения типа колебания имеет интерес рассматривать периоды колебаний по осям, минимальные и максимальные величины отклонений маятника X_m и Y_m в точках их пересечения осей, максимальные величины отклонений по оси $Y - y_m$ для области НК, средние отклонения траекторий по осям ΔX и ΔY , пропорциональные толщине эллиптических полос по осям в области ЭПК.

Траектории колебаний в области ЭПК изменяют свои параметры во времени. Для хорошего осреднения этих параметров желательно иметь большие времена моделирования колебаний и несинхронность колебаний. Под несинхронностью колебаний понимается равномерное по углу пересечение области колебаний траекториями движения маятника – «мелкая сетка» линий, при синхронности – линии группируются вместе либо совпадают, получим «крупную сетку» (рис. 2–4) и можем иметь плохое осреднение параметров во времени. Хотя время моделирования траекторий составляло 100 с, зачастую этого было недостаточно для хорошего осреднения результатов. Для результирующих осредненных параметров $X_m, Y_m, y_m, \Delta X, \Delta Y, \Delta T_x$ и ΔT_y от скорости (рис. 5) наблюдались заметные отклонения кривых от среднего, особенно вблизи максимальных скоростей.

На рис. 5 показаны результаты моделирования колебаний маятника для параметров траекторий для начального смещения $\delta_{x0}=0,3$ в зависимости от скорости для всего ее интервала. Видим, что для кривых наблюдается ряд аномалий. На границе изменения типа колебаний от НК к ЭПК при скорости v_{ykr} наблюдаются изломы кривых $y_m, \Delta X$ и ΔY , а также периодов колебаний маятника ΔT_x и ΔT_y по осям.

Зависимости ΔT_x и ΔT_y похожи на зависимости для ΔX и ΔY , однако есть и отличия по осям. Если в области НК велико и постоянно ΔX , то отклонения для ΔT_y большие, но не постоянные, и наобо-

рот – отклонения ΔT_x растут от нуля как и ΔY , но растут нелинейно. Величины средних отклонений траекторий по осям ΔX и ΔY говорят об их пропорциональности зависимостям X_m и Y_m для области НК и об уширении эллиптических полос областей колебаний для области ЭПК. Величина Y_m равняется величине коэффициента a в формуле (1).

Параметры траекторий маятника

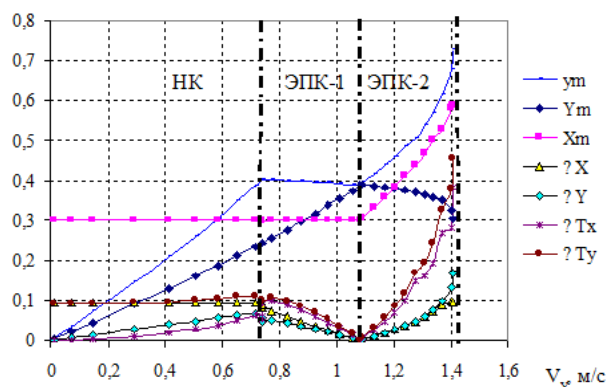


Рис. 5. Параметры траекторий маятника для начального смещения маятника $\delta_{x0}=0,3$, в зависимости от начальной скорости v_y

Для средних отклонений траекторий по осям ΔX и ΔY за критической точкой видим уменьшение их величин до нуля, и затем – их аналогичный рост далее. Нулевой толщине линий соответствует эллиптическая орбита, для которой ΔX , ΔY , а также изменения периодов колебаний ΔT_x и ΔT_y нулевые. Также в этой точке наблюдаются излом и последующий рост величины отклонения маятника X_m , а также пересечение кривых Y_m и y_m . Если величина отклонения y_m до точки излома росла практически линейно с ростом начальной скорости маятника до величины радиуса эллипса, то после, в области ЭПК, внешний радиус y_m уменьшается. Видим, что максимальные значения Y_m на оси Y в области НК продолжают практически линейно расти с ростом скорости и в области ЭПК, но эти размеры становятся теперь радиусами внутренних эллипсов. При этом с ростом скорости кривая Y_m монотонно возрастает, а радиусы огибающих эллипсов по оси Y , внешнего и внутреннего, в точке ЭО как бы меняются местами (рис. 4, 5).

Различие ΔT_y в области НК можно объяснить тем, что отклонения по оси Y для Y_m и y_m различно, что и ведет к отличию их периодов колебаний. Для оси X периоды колебаний вначале равны и все более отличаются с ростом начальной скорости и соответствующего отклонения. В критической точке для смещений $\delta_{x0} > 0,2$ наблюдается скачок величины ΔT_x . Также наблюдается нелинейный рост величин отклонений периодов колебаний ΔT_x и ΔT_y вблизи максимальных скоростей маятника, когда периоды колебаний быстро возрастают с ростом углов отклонений маятника. Сравнивая рис. 1 и 5 можно сказать, что там, где большие отклонения, изменения координат ΔX и ΔY , более быстро изменяются периоды колебаний, там наблюдаются и большие величины отклонений периодов колебаний от среднего.

Постоянство отклонений маятника X_m по оси X до точки ЭО (рис. 5) говорит о том, что все колебания по этой оси до этой точки не превышают величины начального смещения δ_{x0} (области НК и ЭПК-1). Все эти изменения говорят о переходе области эллипсоподобных колебаний маятника после этой точки за внешние пределы чисто эллиптической орбиты (область ЭПК-2, рис. 5). То есть, всегда один из огибающих эллипсов области колебаний маятника будет пересекать ось X при начальном смещении δ_{x0} и он будет для области ЭПК-1 являться внешним, а для области ЭПК-2 – внутренним.

Таким образом, анализ данной диаграммы для параметров траекторий маятника от начальной скорости позволяет разделить области существования разных типов колебаний для двухчастотного сферического маятника даже без графика зависимостей для периодов его колебаний по осям (рис. 1).

Были получены аналогичные диаграммы данных параметров траекторий маятника и их скорости в особых точках для разных начальных смещений маятника δ_{x0} . На рис. 6 показано зависимости кинетической энергии маятника для его начальных скоростей: критической, эллиптической и максимальной, разделяющих области существования разных типов его колебаний для всего диапазона начальных смещений маятника δ_{x0} . Видим, что ЭО при малых смещениях δ_{x0} появляются на границе с критической скоростью, и заканчиваются при больших смещениях δ_{x0} на границе с максимальной скоростью и разделяют область ЭПК на две: ЭПК-1 и ЭПК-2.

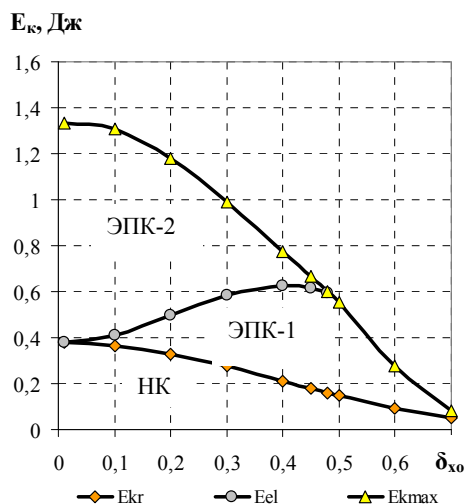


Рис. 6. Зависимость кинетической энергии маятника для критической, эллиптической и максимальной скоростей от начальных смещений δ_{x0}

Смещения $\delta > 0,5$ (рис. 2–4, 6) для молекул воды можно не рассматривать, поскольку при таких смещениях велика вероятность разрыва H – связей молекулы [3, 8]. Видим, что область НК (рис. 6) составляет около 30% от всей области колебаний по энергии. Считая, что кинетическая энергия вращения молекул воды вблизи критической температуры воды близка к максимальной, это позволяет говорить о большой вероятности наличия эллипсоподобных колебаний для протонов молекул воды

сравнительно с НК. Это свидетельствует о высокой вероятности вращений протонов молекулы воды вокруг своих осей H – связей даже при учете наличия импульсов от соседних молекул, значительно изменяющих их кинетическую энергию.

Величины ΔX , ΔY , ΔT_x и ΔT_y изменений координат и периодов колебаний двухчастотного сферического маятника можно рассматривать как обобщенные осредненные характеристики его сложных траекторий обоих типов для областей независимых и эллипсоподобных колебаний.

Данные особенности траекторий колебаний будут также характерны и для колебаний молекулы воды и могут помочь при анализе ее вращательных колебаний разделить области с разными типами колебаний.

6. Выводы

1. Определены параметры траекторий маятника, которые позволяют разделить области разных типов колебаний для двухчастотного маятника, которые также применимы и к вращательным колебаниям молекул воды.

2. Проведены соответствующие изменения компьютерных программ.

3. Построены диаграммы для параметров траекторий двухчастотного сферического маятника, позволяющая точно идентифицировать области существования разных типов его колебаний по скоростям и результирующая диаграмма для этих областей по кинетической энергии в зависимости от смещений маятника.

Литература

1. Эйзенберг, Д. Структура и свойства воды [Текст] / Д. Эйзенберг, В. Кауцман. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 280 с.
2. Антонченко, В. Я. Основы физики воды [Текст] / В. Я. Антонченко, А. С. Давыдов, В. В. Ильин. – К.: Наукова думка, 1991. – 672 с.
3. Маленков, Г. Г. Структура и динамика жидкой воды [Текст] / Г. Г. Маленков // Журнал структурной химии. – 2006. – Т. 47. – С. 5–35.
4. Малафаев, Н. Т. О взаимодействиях и динамике молекул в чистой воде [Текст] / Н. Т. Малафаев // Восточно-европейский журнал передовых технологий. – 2011. – Т. 4, № 8 (52). – С. 48–58. – Режим доступа: <http://journals.uran.ua/ejet/article/view/1465/1363>
5. Берсукер, И. Б. Эффект Яна – Теллера и вибронные взаимодействия в современной химии [Текст] / И. Б. Берсукер. – М.: Наука, 1987. – 344 с.
6. Малафаев, Н. Т. Моделирование вращательных колебаний молекул воды [Текст] / Н. Т. Малафаев, Н. И. Погужих // Восточно-Европейский журнал передовых технологий. – 2015. – Т. 2, № 5 (74). – С. 27–35. doi: 10.15587/1729-4061.2015.40569
7. Малафаев, Н. Т. Силовые особенности колебаний двухчастотного сферического маятника в неоднородном поле сил [Текст] / Н. Т. Малафаев // ScienceRise. – 2015. – Т. 10, № 2 (15). – С. 68–75. doi: 10.15587/2313-8416.2015.51842
8. Малафаев, Н. Т. Эллиптические колебания протонов молекул воды [Текст] / Н. Т. Малафаев // ScienceRise. – 2017. – Т. 1, № 2 (30). – С. 48–54. doi: 10.15587/2313-8416.2017.89712
9. Malenkov, G. G. Collective effects in molecular motions in liquids [Text] / G. G. Malenkov, Y. I. Naberukhin, V. P. Voloshin // Russian Journal of Physical Chemistry A. – 2012. – Vol. 86, Issue 9. – P. 1378–1384. doi: 10.1134/s003602441209004x
10. Makhlaichuk, P. V. Dimerization of Water Molecules. Modeling of the Attractive Part of the Interparticle Potential in the Multipole Approximation [Text] / P. V. Makhlaichuk, M. P. Malomuzh, I. V. Zhyganiuk // Ukrainian Journal of Physics. – 2013. – Vol. 58, Issue 3. – P. 278–288.
11. Kumar, P. Molecular dynamics study of orientational cooperativity in water [Text] / P. Kumar, G. Franzese, S. V. Buldyrev, H. E. Stanley // Physical Review E. – 2006. – Vol. 73, Issue 4. – P. 041505. doi: 10.1103/physreve.73.041505

Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Погужих М. І.

Дата надходження рукопису 21.02.2017

Малафаев Николай Тимофеевич, кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра физико-математических и инженерно-технических дисциплин, Харьковский государственный университет питания и торговли, ул. Клочковская, 333, г. Харьков, Украина, 61051

E-mail: mnt49@mail.ru