

15. Дёмин, Д. А. Управление качеством в литейном производстве: технологические аспекты в выборе оптимальных стратегий технического перевооружения [Текст] / Д. А. Дёмин // Вестник НТУ "ХПИ". Серия: Новые решения в современных технологиях. – 2014. – № 7 (1050). – С. 42–52.

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук, професор Хорошилов О. М.  
Дата надходження рукопису 27.02.2017*

**Орендарчук Юлия Владимировна**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Дымко Егор Павлович**, заместитель начальника, Эксплуатационно-технический отдел, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Мариненко Дмитрий Витальевич**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002  
E-mail: litvo11@kpi.kharkov.ua

**Борисенко Сергей Владимирович**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Лоек Ирина Олеговна**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

**Ананьин Владислав Сергеевич**, кафедра литейного производства, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», ул. Кирпичева, 2, г. Харьков, Украина, 61002

УДК 663.1.047

DOI: 10.15587/2313-8416.2017.98978

## РОЗРОБКА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ ЗАМОРОЖУВАННЯ КЛІТИННОЇ СУСПЕНЗІЇ

© **І. А. Буртна, Ж. І. Остапенко, Л. І. Ружинська**

*В роботі розглядається математичне моделювання процесу заморожування клітинної суспензії перед сублімаційним сушінням. Вплив умов проведення технологічної операції заморожування можна оцінити розподіленням температур мікробної суспензії в процесі заморожування.*

*Математична модель дозволяє визначити розподіл температур при заморожуванні, а також швидкість заморожування в залежності від властивостей середовища, що заморожується, умов відведення теплової енергії та геометрії області, в якій протікає процес*

**Ключові слова:** клітинна суспензія, мікробна маса, математичне моделювання, сублімаційне сушіння, температура, швидкість заморожування

### 1. Вступ

В біотехнологічних та фармацевтичних виробництвах для зневоднення мікробної маси використовують сублімаційне сушіння. Сублімаційне сушіння, як технологічний процес, складається з декількох операцій, важливішими з яких є операції заморожування мікробної суспензії та її висушування при низьких температурах в умовах вакууму. Якість готового продукту визначається кількістю життєздатних клітин мікроорганізмів на одиницю маси або об'єму, кінцевою вологістю, біоактивністю, тощо, і залежить від способу, температури, швидкості заморожування, та умов проведення сублімаційного сушіння. Найбільш важливим питанням при виборі технологічного обладнання та температур для проведення процесів заморожування клітинних суспензій перед сублімаційним сушінням є швидкість заморожування, або швидкість переміщення границі розділу рідкої та мерзлої фази суспензії. Швидкість

заморожування впливає на ріст кристалів льоду, які при певних умовах, можуть руйнувати клітини. Для визначення розподілу температур в клітинній суспензії в процесі заморожування та швидкості переміщення границі розділу рідкої і мерзлої фази в залежності від умов проведення процесу та властивостей суспензії необхідно розробити математичну модель процесу заморожування.

### 2. Літературний огляд

Математична модель процесу заморожування клітинної суспензії перед сублімаційним сушінням найбільш відповідає процесу заморожування вологого ґрунту або спокійної води у водоймі [1, 2]. Математична модель складається з диференціальних рівнянь нестационарної теплопровідності для мерзлого та талого шарів початкових умов, граничних умов першого роду на зовнішніх границях та граничних умов четвертого роду на рухомій границі розділу шарів. Границя розді-

лу шарів (фаз) змінює своє положення у часі, тому задача математичного моделювання процесу заморожування клітинної суспензії перед сублімаційним сушінням належить до класу задач Стефана. Постановка і розв'язання цієї задачі ускладнюються вибором температури фазового переходу при заморожуванні вологи в клітинній суспензії.

Температура заморожування вологи в клітинній суспензії залежить від виду зв'язку вологи з матеріалом [2–4]. Процес утворення льоду супроводжується фізичними, біофізичними та біохімічними явищами і впливає на структуру сухого каркасу клітинної маси. Заморожування клітинної суспензії супроводжується утворенням кристалів льоду, що можуть пошкоджувати і руйнувати клітини. Розміри кристалів льоду залежать від швидкості заморожування. Дрібні кристали утворюються при високих швидкостях, а великі при низьких. Досвід заморожування клітинної маси різного походження свідчить про те, що в першу чергу заморожується вільна волога в міжклітинному просторі, в якій розчинені мінеральні речовини. Заморожування води в розчині відбувається при температурах нижчих за криоскопічну температуру. Значення криоскопічної температури в процесі заморожування вільної води зменшується, внаслідок зростання концентрації розчинених речовин. Крім пошкодження клітин кристалами льоду часткова кристалізація води в клітинах збільшує концентрацію розчинених речовин в них. Концентрування електролітів діє на поліпептидні ланцюжки білка, що призводить до його денатурації та до порушення метаболізму внаслідок зростання різниці концентрації всередині і зовні клітини. Оцінити вплив негативних факторів при заморожуванні клітинної суспензії можливо при наявності інформації про розподіл температур та швидкості заморожування.

Разом з тим у літературі майже відсутні дані, щодо теоретичного або експериментального визна-

чення розподілу температур та швидкості заморожування клітинної суспензії в промислових або лабораторних умовах. Таким чином теоретичні дослідження процесу заморожування клітинної суспензії шляхом розробки математичної моделі є актуальним.

### 3. Мета та задачі дослідження

Мета дослідження – визначення розподілення температур та швидкості заморожування в клітинній суспензії в процесі заморожування перед сублімаційним сушінням.

Для досягнення мети були поставлені наступні задачі:

1. Аналіз особливостей процесу заморожування клітинної суспензії з метою формулювання умов однозначності.
2. Формулювання математичної моделі.
3. Розв'язання математичної моделі та аналіз результатів.

### 4. Аналіз процесу заморожування клітинної суспензії та побудова математичної моделі

Процес сублімаційного сушіння проводять розливаючи суспензію в флакони або лотки. Лотки мають прямокутну форму. Вони встановлюються на полицях камери, в якій відбувається заморожування або полицях сублімаційної сушарки, якщо процес заморожування і сублімації відбувається в одній камері.

Розглянемо процес заморожування мікробної суспензії в лотку прямокутної форми.

Лоток має розміри: висоту  $h_k$ , ширину  $b_k$  та довжину  $l_k$ , виготовлений з листового металу товщиною  $\delta_k$  коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_k$ .

Лоток наповнений мікробною суспензією на висоті  $h_{cn}$ , встановлений на плиту товщиною  $\delta_{nl}$  з отворами, (рис. 1). Плита виготовлена з матеріалу з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda_{nl}$ .

Розміщуємо систему координат як показано на рис. 2.

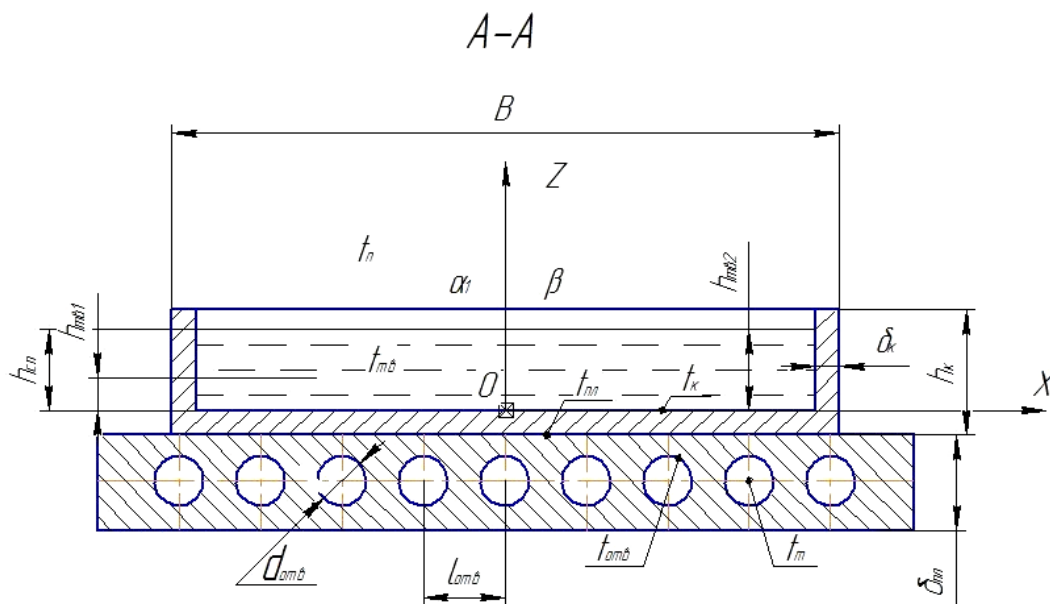


Рис. 1. Розрахункова схема заморожування клітинної суспензії

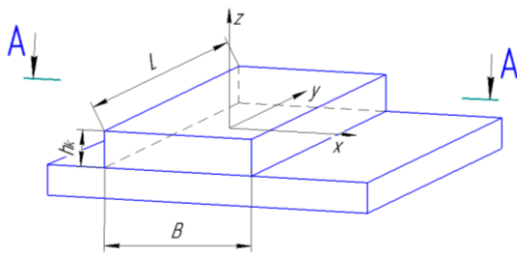


Рис. 2. Схема розміщення лотка на плиті

Оцінимо вплив вільної конвекції на процес переносу теплоти в суспензії.

За попередніми оцінками добуток критерія Прандтля на критерій Грасгофа для клітинної суспензії в лотку в процесі охолодження лежить в межах:

$$10^6 > Gr \cdot Pr > 10^3.$$

В цьому випадку вплив вільної конвекції на перенос теплоти можна оцінити коефіцієнтом  $\epsilon_k$ , а коефіцієнт теплопровідності мікробної суспензії буде визначитися як  $\lambda_p = \epsilon_k \cdot \lambda_{cn}$ .

Враховуючи що плита і лоток виконані із матеріалу, що має високий коефіцієнт теплопровідності і при умові щільного контакту дна лотка і поверхні плити, можна прийняти припущення, що температура на внутрішній поверхні лотка, що контактує з суспензією,  $t_k$ , – постійна.

В отвори плити подається теплоносієм з середньою температурою  $t_m$ .

Тепловий потік від мікробної суспензії відводиться теплоносієм. Позначимо температуру на поверхні отворів  $t_{oms}$ , температуру на поверхні плити  $t_{nl}$  та температуру на поверхні лотка  $t_k$ . Тепловий потік, що передається до поверхні отворів від поверхні плити знаходимо з рівняння:

$$Q_T = K_{nl} \cdot (t_{nl} - t_{oms}), \quad (1)$$

де  $K_{nl}$  – приведений коефіцієнт тепло переносу для плити з отворами, Вт/К.

Цей коефіцієнт  $K_{nl}$  знаходиться з виразу [5]:

$$K_{nl} = \frac{2 \cdot \pi \cdot l_k \cdot \lambda_{nl}}{\ln \left[ \frac{l_{oms}}{\pi \cdot r} \cdot sh \frac{\pi \cdot \delta_{nl}}{2 \cdot l_{oms}} \right]}. \quad (2)$$

Запишемо по аналогії з рівнянням (1) вирази для визначення теплових потоків від теплоносія і для стінки лотка:

$$Q = K_m (t_{oms} - t_m);$$

$$Q = K_k (t_k - t_{nl}), \quad (3)$$

де  $K_k = \frac{\lambda_k}{\delta_k} F_{nl}$  – приведений коефіцієнт тепло переносу для стінки лотка, Вт/К;

$K_m = \alpha_m \cdot F_m$  – приведений коефіцієнт тепло переносу для теплоносія, Вт/К;

$F_m = \pi \cdot r^2 \cdot z_m$  – бокова поверхня отворів плити,  $z_m$  – число отворів в плиті, м<sup>2</sup>.

Запишемо рівняння для визначення теплового потоку від теплоносія до внутрішньої поверхні лотка:

$$Q_m = K_{np} \cdot (t_k - t_m), \quad (4)$$

де

$$K_{np} = \frac{1}{\frac{1}{K_k} + \frac{1}{K_m} + \frac{1}{K_{nl}}}.$$

З цього рівняння знаходимо температуру на внутрішній поверхні лотка:

$$t_k = t_m + \frac{Q}{K_{np}}. \quad (5)$$

Вільна поверхня суспензію контактує з повітрям холодильної камери, після утворення на цій поверхні шару льоду теплообмін відбувається за законом Ньютона-Ріхмана.

Отже на границі  $z = h_{cn}$ , записуємо граничні умови третього роду:

$$\alpha_n (t - t_n) = \pm \lambda_m \frac{\partial t}{\partial n}. \quad (6)$$

В процесі охолодження частина суспензії переходить в твердий стан, положення границі, що розділяє суспензію в твердому стані і рідину, змінюється, крім того процес твердіння суспензії відбувається також з вільної поверхні.

Відведення теплової енергії від мікробної суспензії в лотку здійснюється через нижню стінку лотка та від вільної поверхні суспензії. До моменту утворення на вільній поверхні мікробної суспензії шару льоду теплова енергія в повітря відводиться за рахунок конвекції та з вологою, що випаровується. Загальна густина теплового потоку з вільної поверхні рідини визначається за формулою:

$$q_n = \alpha_n \cdot (t_p - t_n) + r_n \cdot \beta_n \cdot (\rho_{np} - \rho_n), \quad (7)$$

де  $\alpha_n$  – коефіцієнт тепловіддачі з вільної поверхні мікробної суспензії, Вт/м<sup>2</sup>К;  $t_p$  – температура вільної поверхні мікробної суспензії, С°;  $t_n$  – температура повітря, С°;  $r_n$  – питома теплота пароутворення, Дж/кг;  $\beta_n$  – коефіцієнт масовіддачі, м/с;  $\rho_{np}$  та  $\rho_n$  – густина пари, що відповідає температурі насичення та густина пари в газовому середовищі відповідно, кг/м<sup>3</sup>.

Коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_n$  з достатньою для інженерних розрахунків точністю визначають за формулами для конвекції від твердої поверхні [6]. Коефіцієнт масовіддачі знаходять за формулою [6]:

$$\beta_n = \frac{\alpha_n}{c_n \cdot \rho_n}. \quad (8)$$

В процесі охолодження та заморожування в мікробній суспензії утворюються три шари: 1 та 3 – шари мерзлої суспензії, 2 – шар рідкої суспензії. Координати шарів, позначимо  $h_{me1}(\tau)$  та  $h_{me2}(\tau)$ , залежать від часу охолодження.

Позначимо фізичні властивості мерзлої мікробної суспензії  $\lambda_m, \rho_m, c_m$ , а фізичні властивості рідкої суспензії  $\lambda_p, \rho_p, c_p$ , тоді зміна температур в шарі рідкої мікробної суспензії описується рівнянням:

$$0 < z < h_{me1}(\tau) \text{ і } h_{me2}(\tau) < z < h_{cn}, \quad (9)$$

а в шарах мерзлої мікробної суспензії рівнянням:

$$h_{me1}(\tau) < z < h_{me2}(\tau). \quad (10)$$

На границях розділу шарів температури рідкої мікробної суспензії та мерзлої мікробної суспензії рівні і дорівнюють температурі замерзання.

Позначимо питомий тепловий потік, що відводиться на границі шарів в мерзлий шар  $q_m$ , питомий тепловий потік, що відводиться від рідкого шару  $q_p$ .

Запишемо вирази для визначення  $q_m$  і  $q_p$  (11):

$$\begin{aligned} q_m &= -\lambda_m \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right) d\tau, \\ q_p &= -\lambda_p \left( \frac{\partial t}{\partial z} \right) d\tau. \end{aligned} \quad (11)$$

З рівняння теплового балансу кількість теплоти, що відводиться від границі розділу фаз в мерзлий шар дорівнює теплоті, що надходить з рідкого шару і теплоті фазового переходу  $q_\phi$ . Теплота фазового переходу визначається з рівняння:

$$q_\phi = W \cdot r_{пл} \cdot \rho_m \cdot d_h, \quad (12)$$

де  $r_{пл}$  – теплота плавлення, Дж/кг;  $d_h$  – переміщення границі розділу фаз за час  $dt$ , м.

У випадку замерзання чистих рідин  $W=1$ . Враховуючи, що клітини містять рідини більше 90 % приймаємо  $W=0,9$  [2].

Запишемо рівняння нестационарної теплопровідності [7–9], що описують розподілення тем-

ператур в процесі заморожування мікробної суспензії:

– для мерзлої зони 1:

$$0 < z < h_{me1}(\tau)$$

$$\rho_m C_m \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = \lambda_m \left( \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (13)$$

– для рідкої зони 2:

$$h_{me1}(\tau) < z < h_{me2}(\tau)$$

$$\rho_p C_p \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = \lambda_p \left( \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (14)$$

– для мерзлої зони 3:

$$h_{me2}(\tau) < z < h_{cn}$$

$$\rho_m C_m \left( \frac{\partial t}{\partial \tau} \right) = \lambda_m \left( \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right); \quad (15)$$

Граничні умови:

$$z = 0 \quad t = t_\kappa; \quad (16)$$

$$z = h_{me1}(\tau) \text{ та } z = h_{me2}, \quad t = t_{me}$$

$$\lambda_m \frac{\partial t}{\partial z} = \lambda_p \frac{\partial t}{\partial z} + q_\phi; \quad (17)$$

$$h = h_{cn}, \quad q_n = \lambda_p \frac{\partial t}{\partial z}. \quad (18)$$

Математична модель процесу складається з системи диференціальних рівнянь в частинних похідних [10], які відносяться до нелінійних задач Стефана, і описують перенос теплової енергії в рідкій і твердій (замороженій) фазах мікробної суспензії. Ці рівняння розв'язані методом кінцевих різниць.

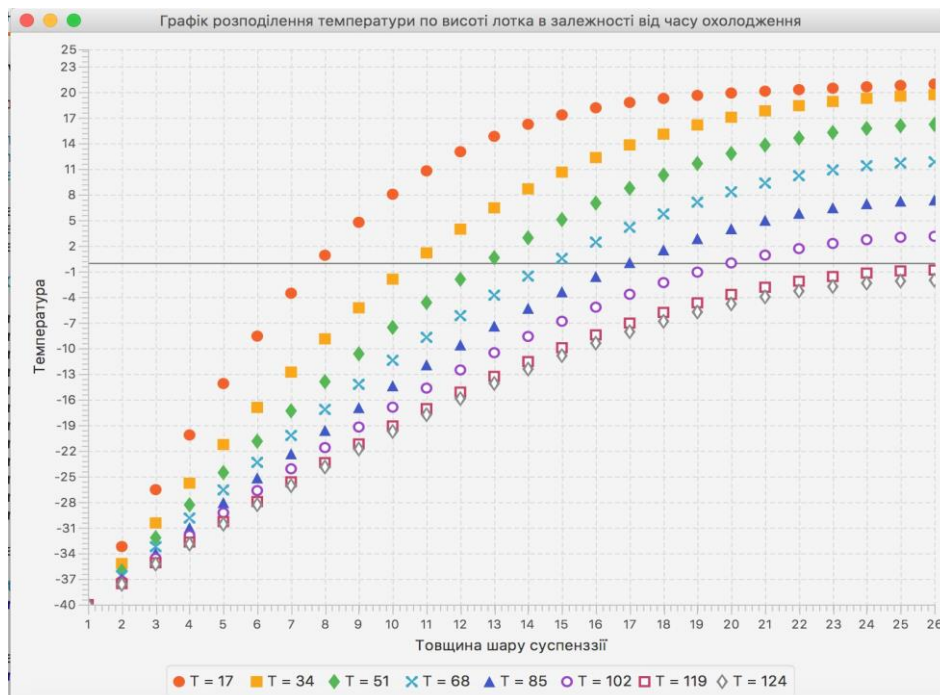


Рис. 3. Графік розподілення температур в мікробній суспензії в процесі охолодження

На рис. 3 показані результати числового розв'язання математичної моделі процесу заморожування мікробної суспензії, що дозволило визначити розподілення температури по висоті суспензії в залежності від часу охолодження. Приклад графіку цієї залежності представлений на рис. 3.

### 5. Результати досліджень та їх обговорення

В результаті теоретичних досліджень встановлено, що в процесі охолодження та заморожування в клітинній суспензії утворюються три шари: 1 та 3 – шари мерзлої суспензії, 2 – шар рідкої суспензії.

Математична модель процесу заморожування складається з трьох диференціальних рівнянь нестационарної теплопровідності та початкових і граничних умов, що описують розподіл температур в клітинній суспензії в початковий момент часу та перенос теплової енергії на границях шарів.

Математична модель процесу розв'язана методом кінцевих різниць. В результаті розв'язання отримані масиви значень температур по висоті су-

спензії в лотку при різних значеннях часу охолодження.

Координата границі мерзлого і рідкого шару клітинної суспензії відповідає температурі замерзання і може бути встановлена для кожного значення часу заморожування.

### 6. Висновки

1. Розроблена математична модель процесу заморожування клітинної суспензії.

2. Розв'язання математичної моделі процесу заморожування клітинної суспензії дозволяє визначити розподілення температури по висоті суспензії, швидкість просування границі розділу мерзлої і рідкої фази, час промерзання суспензії, що розлита у лотки, в залежності від умов проведення процесу охолодження і властивостей клітинної суспензії.

3. Результати розв'язку математичної моделі можуть використовуватися при аналізі роботи існуючого та проектуванні нового обладнання для сублімаційного сушіння клітинних суспензій та інших продуктів біотехнологічних виробництв.

### Література

1. Карпов, А. М. Сушка продуктов микробиологического синтеза [Текст] / А. М. Карпов, А. А. Улумиев. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1982. – 216 с.
2. Богданов, С. Н. Теоретические основы хладотехники. Теплообмен [Текст] / С. Н. Богданов, Н. А. Бучко, Э. И. Гуйго и др.; ред. Э. И. Гуйго. – М.: Агропромиздат, 1986. – 320 с.
3. Гаврилов, В. П. Физико-химические свойства внутри и внеклеточных сред при низких температурах [Текст] / В. П. Гаврилов // Биофизика. – 1977. – Т. 22, № 3. – С. 544.
4. Андросов, В. В. Определение эвтектических температур сублимируемых материалов [Текст] / Т. В. Клюкина, Н. Г. Алексеев // Химия и химическая технология. – 1982. – Т. 5, № 9. – С. 1158–1159.
5. Уонг, Х. Основные формулы и данные по теплообмену для инженеров [Текст] / Х. Уонг. – М.: Атомиздат, 1979. – 216 с.
6. Кутателадзе, С. С. Теплопередача и гидродинамическое сопротивление [Текст] / С. С. Кутателадзе. – М.: Энергоиздат, 1990. – 367 с.
7. Кутателадзе, С. С. Основы теории теплообмена [Текст] / С. С. Кутателадзе. – М.: Атомиздат, 1979. – 415 с.
8. Теория теплообмена [Текст] / ред. А. И. Леонтьева. – М.: Высшая школа, 1979. – 495 с.
9. Лыков, А. В. Теория теплопроводности [Текст] / А. В. Лыков. – М.: Высшая школа, 1967. – 599 с.
10. Самарский, А. А. Теория разностных схем [Текст] / А. А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 656 с.

*Рекомендовано до публікації д-р техн. наук Мельник В. М.  
Дата надходження рукопису 20.02.2017*

**Буртна Інесса Анатоліївна**, кандидат технічних наук, доцент, кафедра біотехніки та інженерії, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056

**Остапенко Жанна Ігорівна**, кафедра біотехніки та інженерії, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056  
E-mail: zhanna.ost@gmail.com

**Ружинська Людмила Іванівна**, кандидат технічних наук, доцент, кафедра біотехніки та інженерії, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського», пр. Перемоги, 37, м. Київ, Україна, 03056  
E-mail: ruzhli@ukr.net