

# ИССЛЕДОВАНИЕ АЛГОРИТМА КОНСТРУИРОВАНИЯ ГЛАДКИХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ КРИВЫХ С ВОЗМОЖНОСТЬЮ ЗАДАНИЯ КРИВИЗНЫ И КРУЧЕНИЯ В УЗЛОВЫХ ТОЧКАХ

Ковтун А. М.

## 1. Введение

Известны и имеют применение такие варианты аналитического представления кривых линий (обводов):

- а) на основе функции Фергюссона (1);
- б) на основе функции Безье (2), (3);
- в) на основе рациональных функций (4), (5).

Кубические параметрические кривые в форме Фергюссона записываются в виде (рис. 1):

$$r = r(u) = r(0)\alpha_0(u) + r(1)\alpha_1(u) + r'(0)\beta_0(u) + r'(1)\beta_1(u), \quad (1)$$

где  $r(0)$ ,  $r(1)$  – векторы заданных двух точек;

$r'(0)$ ,  $r'(1)$  – векторы касательных в заданных точках;

$u$  – параметр, в пределах от точки 0 до точки 1 изменяющийся от 0 до 1;

$\alpha_0(u)$ ,  $\alpha_1(u)$ ,  $\beta_0(u)$ ,  $\beta_1(u)$  – функции третьей степени от параметра  $u$ :

$$\alpha_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3,$$

$$\alpha_1(u) = 3u^2 - 2u^3,$$

$$\beta_0(u) = u - 2u^2 + u^3,$$

$$\beta_1(u) = -u^2 + u^3.$$

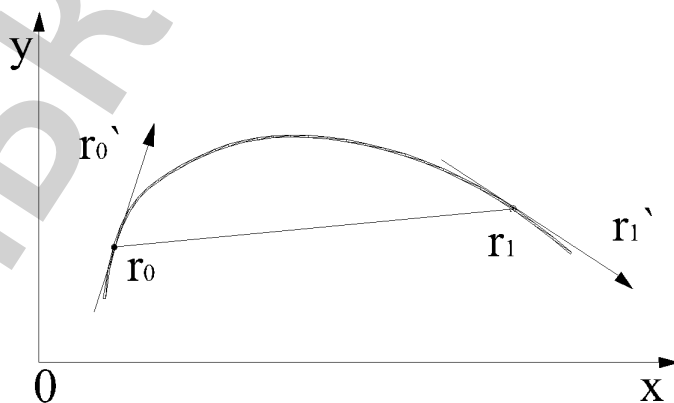


Рис. 1. Кубическая параметрическая кривая в форме Фергюссона

Как видно на рис. 1, управляющими факторами здесь есть две точки и векторы касательных в них. На основе кривой в форме Фергюссона строятся векторно-параметрические кубические сплайны.

В практике конструирования криволинейных обводов не всегда можно определить касательные векторы, а, тем более, определить необходимую их длину, что влияет на форму кривой. Как правило, в машиностроении первичными данными является точечный ряд точек без касательных.

Кубические кривые в форме Безье (рис. 2) имеют вид:

$$r = r_0(1-u)^3 + 3r_1u(1-u)^2 + 3r_2u^2(1-u) + r_3u^3, \quad (2)$$

где  $r_0, r_1, r_2, r_3$  – векторы точек 0, 1, 2, 3;

$u$  – параметр, в пределах от 1 до 3 изменяющийся от 0 до 1.

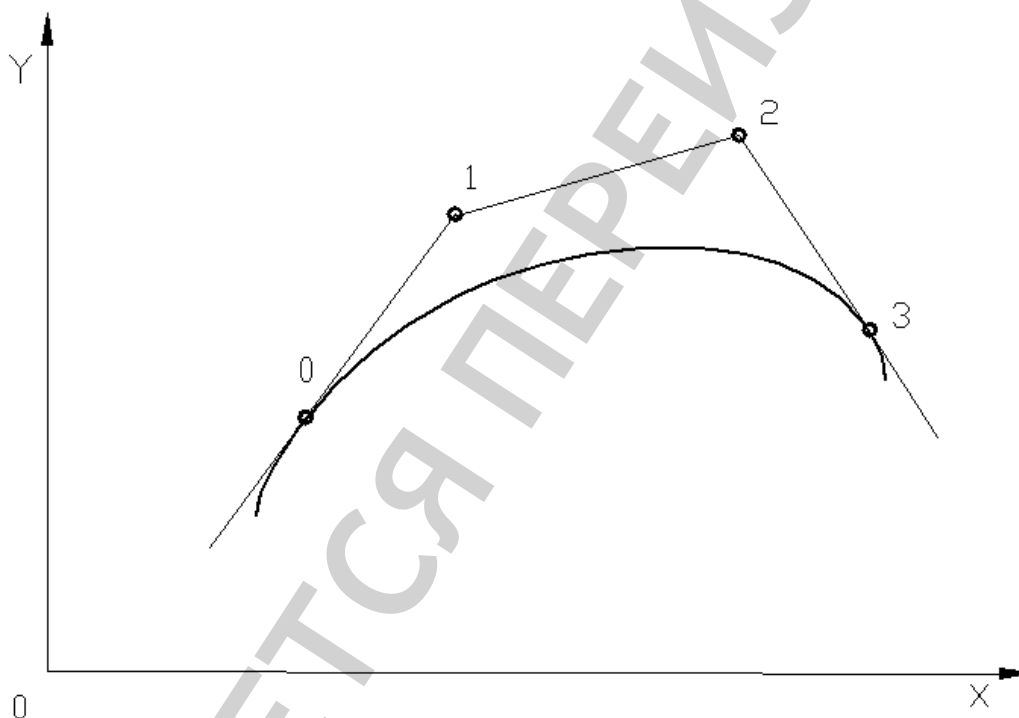


Рис. 2. Векторно-параметрическая кривая в форме Безье

Как видно на рис. 2, точки 1 и 2 не лежат на кривой, а векторы 01 и 23 являются касательными к кривой в точках 0 и 3.

Этот вид кривой также не всегда удовлетворяет конструкторским требованиям в том случае, когда нет касательных к кривой.

Кроме кубической кривой еще известны кривые полиномов Бернштейна-Безье:

$$r = r(u) = \sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!i!} u^i (1-u)^{n-i} r^i. \quad (3)$$

Эти кривые обобщают кубическую кривую Безье на более высокие степени, но также нет простого и надежного способа получения кривой с наперед заданной кривизной и кручением, что осложняет проектирование каналовых поверхностей.

Кроме того, на основе кривых Безье создан метод FFD (Free Form Deformation) – метод произвольной деформации формы, где управляющими факторами для образования геометрического тела есть точки, которые не все лежат на поверхности тела.

Обобщением кривой Безье являются рациональные кривые. Приведем формулы для кривой 2-го и 3-го порядков:

$$r = \frac{w_0 r_0 (1-u)^2 + 2 w_1 r_1 u(1-u) + w_2 r_2 u^2}{w_0 (1-u)^2 + 2 w_1 u(1-u) + w_2 u^2}. \quad (4)$$

$$r = \frac{w_0 r_0 (1-u)^3 + 3 w_1 r_1 u(1-u)^2 + 3 w_2 r_2 u^2 (1-u) + w_3 r_3 u^3}{w_0 (1-u)^3 + 3 w_1 u(1-u)^2 + 3 w_2 u^2 (1-u) + w_3 u^3}. \quad (5)$$

В этих кривых, в отличие от кривых Безье, есть возможность руководить «весами»  $w_i$ , что обеспечивает форму кривой. В целом они имеют такой же вид, как и кривые Безье, и тоже не всегда являются удобными для конструктора.

Таким образом, видим, что актуальным является последующее исследование в разработке других вариантов представления алгебраических кривых, а именно: с помощью заданных двух точек с известными кривизной и кручением. Это дает возможность более удобно конструировать реальный объект. Причем можно руководить кривизной, кручением и гладкостью. Что дает дополнительные преимущества в проектировании гладких каналовых поверхностей.

## 2. Объект исследования и его технологический аудит

*Объект исследования* – математический аппарат для описания гладких сплайновых пространственных кривых, заданных двумя точками с известными в них величинами кривизны и кручения. Одним из наиболее проблемных мест в данном аппарате является несовершенство алгоритмов, применяемых для конструирования гладких обводов – склонность существующих сплайнов к осцилляциям (волнообразованию). Причиной этого является недостаточное количество работ и исследований (в особенности по сплайнам с наперед заданным графиком кривизны и кручения), позволяющих улучшить положение.

Для выявления особенностей разработки сплайн-функций с заданными в опорных точках величинами кривизны и кручения проводился технологический аудит. Целью аудита является исследование способности такого вида сплайнов давать форму, пригодную для проектирования путепроводов для сыпучих и жидких объектов, выпускных коллекторов двигателей внутреннего сгорания и т. д. Существенную помощь разработчику может оказать возможность задания дополнительных условий: графика кривизны и кручения, для корректировки формы сплайна в соответствии с решаемой задачей. Исследование имеет уклон

в сторону практического применения специальных сплайн-функций и в большей степени связан с запросами пользователей САПР, предлагая дополнительные возможности конструктору.

### 3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – развитие и усовершенствование имеющегося математического аппарата, который позволит более корректно и «адекватно» поставленной задаче отобразить объекты реального мира. Особенно это важно для описания каналовых поверхностей при проектировании продуктопроводов, проводящих сыпучие и жидкие массы, выпускных коллекторов двигателей внутреннего сгорания, газотурбинных двигателей и т. д. То есть для описания реальных объектов, к которым предъявляются повышенные требования по соответствию графику кривизны и кручения.

Для достижения поставленной цели необходимо выполнить такие задачи:

1. Получить формулу для расчета векторно-параметрического сегмента седьмой степени (по двум конечным точкам, двум первым, вторым и третьим производным в них).

2. По заданным точкам, значениям *гладкости*, *кривизны* и *кручения* в них (все они являются функцией соответствующей, либо смешанной производной) получить векторно-параметрический сегмент с нужными разработчику свойствами.

### 4. Исследование существующих решений проблемы

Среди основных направлений конструирования гладких каналовых поверхностей в ресурсах мировой периодики выявлены следующие направления, применяемые для аналитического представления гладких поверхностей, также использована «классическая» литература по аналитической геометрии. Могут быть выделены такие подходы к решению проблемы [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**–**Ошибка! Источник ссылки не найден.**]:

- аналитические поверхности;
- поверхности Кунса;
- поверхности Безье;
- сплайновые поверхности;
- поверхности Эрмита;
- поверхности Гордона;
- поверхности перехода;
- рациональные поверхности;
- NURBS поверхности.

Каждый из этого далеко не полного списка приведенных методов обладает своими недостатками и преимуществами, не изобретено универсального, «волшебного» метода. Обычно приходится «платить» за каждое из преимуществ, выбирая из существующих алгоритмов наиболее подходящий инструментарий.

В [**Ошибка! Источник ссылки не найден.**–**Ошибка! Источник ссылки не найден.**] приведены исследования, в которых делаются попытки построения векторно-параметрических сегментов (а на их основе и порций поверхностей) с «особыми свойствами». Успешных попыток получения гладкой кривой с необ-

ходимыми свойствами, увязывая свойства сегмента со значениями кривизны и кручения сделано не было. С таким же успехом были проведены исследования для трубопроводов [Ошибка! Источник ссылки не найден.]. Делались попытки управлять кривизной и кручением при проектировании NURBS.

В работе предлагается новый алгоритм управления кривизной и кручением кривой еще на этапе разработки. Это даст возможность конструктору проще и точнее выполнить техническое задание.

## 5. Методы исследования

Векторно-параметрические кривые задаются в виде  $r=r(u)$ , что означает: по каждой координате существуют отдельные кривые, а именно:

$$x=x(u), y=y(u), z=z(u).$$

При задании точечного ряда в каждой точке назначаются произвольным образом конкретные значения параметра  $u$ . Наиболее простым способом является назначение значений  $u$ , которые равняются порядковому номеру точки, то есть  $u_i=i, i=0, 1, \dots, N$ . При этом уравнения сплайнов значительно упрощаются, т. к. точки по параметру  $u$  размещаются равномерно (это не означает, что они равномерно размещаются в пространстве). Кроме того, дистанция между точками по параметру  $u$  равняется единице, то есть:

$$u_{i+1}-u_i=(i+1)-i=1.$$

Но более адекватным является назначение параметра  $u$ , который равен реальной дистанции в пространстве, то есть:

$$u_{i+1}-u_i=\sqrt{(x_{i+1}-x_i)^2+(y_{i+1}-y_i)^2+(z_{i+1}-z_i)^2},$$

где:  $u_i$  и  $u_{i+1}$  – параметры в точке  $i$  и  $i+1$ ;

$x_i, x_{i+1}, y_i, y_{i+1}$  – координаты узловых точек.

В этом случае необходимо решать системы уравнений для сплайнов с учетом неравномерности расположения точек.

## 6. Результаты исследования

Очевидно, что полином седьмой степени задается восемью коэффициентами, или восьмью геометрическими условиями.

Можно предложить вариант описания этих условий, для чего будем искать полиномиальную функцию седьмой степени в виде:

$$y = \alpha_0(u)y_0 + \alpha_1(u)y_1 + h [\beta_0(u)y'_0 + \beta_1(u)y'_1] + h^2 [\gamma_0(u)y''_0 + \gamma_1(u)y''_1] + h^3 [\delta_0(u)y'''_0 + \delta_1(u)y'''_1], \quad (6)$$

где  $y_0, y_1$  – заданные ординаты точек  $0, 1$ ;

$y_0', y_1'$  – заданные первые производные в точках  $0, 1$ ;

$y_0'', y_1''$  – заданные вторые производные в точках  $0, 1$ ;

$y_0''', y_1'''$  – заданные третьи производные в точках  $0, 1$ ;

$h = (x_1 - x_0)$  – разница между абсциссами точек  $0, 1$ ;

$u = (x - x_0)/(x_1 - x_0)$  – параметр, рис. 1.

$\alpha_0(u), \alpha_1(u), \beta_0(u), \beta_1(u), \gamma_0(u), \gamma_1(u), \delta_0(u), \delta_1(u)$  – функции седьмой степени от параметра  $u$ .

Будем искать функции седьмой степени в виде:

$$\alpha_0(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\alpha_1(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\beta_0(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\beta_1(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\gamma_0(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\gamma_1(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\delta_0(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

$$\delta_1(u) = a + bu + cu^2 + du^3 + eu^4 + fu^5 + ju^6 + ku^7.$$

Для нахождения функций седьмой степени, подставив значения полиномов в узловых точках, получим:

$$\alpha_0(0) = 1 \quad \alpha_0(1) = 0 \quad \alpha_0'(0) = 0 \quad \alpha_0'(1) = 0$$

$$\alpha_1(0) = 0 \quad \alpha_1(1) = 1 \quad \alpha_1'(0) = 0 \quad \alpha_1'(1) = 0$$

$$\beta_0(0) = 0 \quad \beta_0(1) = 0 \quad \beta_0'(0) = 1 \quad \beta_0'(1) = 0$$

$$\beta_1(0) = 0 \quad \beta_1(1) = 0 \quad \beta_1'(0) = 0 \quad \beta_1'(1) = 1$$

$$\gamma_0(0) = 0 \quad \gamma_0(1) = 0 \quad \gamma_0''(0) = 0 \quad \gamma_0''(1) = 0$$

$$\gamma_1(0) = 0 \quad \gamma_1(1) = 0 \quad \gamma_1''(0) = 0 \quad \gamma_1''(1) = 0$$

$$\delta_0(0) = 0 \quad \delta_0(1) = 0 \quad \delta_0'''(0) = 0 \quad \delta_0'''(1) = 0$$

$$\delta_1(0) = 0 \quad \delta_1(1) = 0 \quad \delta_1'''(0) = 0 \quad \delta_1'''(1) = 0$$

$$\alpha_0''(0) = 0 \quad \alpha_0'''(0) = 0 \quad \alpha_0''(1) = 0 \quad \alpha_0'''(1) = 0$$

$$\alpha_1''(0) = 0 \quad \alpha_1'''(0) = 0 \quad \alpha_1''(1) = 0 \quad \alpha_1'''(1) = 0$$

$$\beta_0''(0) = 0 \quad \beta_0'''(0) = 0 \quad \beta_0''(1) = 0 \quad \beta_0'''(1) = 0$$

$$\beta_1''(0) = 0 \quad \beta_1'''(0) = 0 \quad \beta_1''(1) = 0 \quad \beta_1'''(1) = 0$$

$$\gamma_0''(0) = 1 \quad \gamma_0'''(0) = 1 \quad \gamma_0''(1) = 0 \quad \gamma_0'''(1) = 1$$

$$\gamma_1''(0) = 0 \quad \gamma_1'''(0) = 0 \quad \gamma_1''(1) = 1 \quad \gamma_1'''(1) = 0$$

$$\delta_0''(0) = 0 \quad \delta_0'''(0) = 1 \quad \delta_0''(1) = 0 \quad \delta_0'''(1) = 0$$

$$\delta_1''(0) = 0 \quad \delta_1'''(0) = 0 \quad \delta_1''(1) = 0 \quad \delta_1'''(1) = 1$$

Если перегруппировать все  $\alpha_0$ , то получим систему для ее нахождения, аналогично найдем  $\alpha_1, \beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1, \delta_0, \delta_1$ . Для чего выберем:

$$\begin{aligned} \alpha_0(0) &= 1 & \alpha_1(0) &= 0 & \beta_0(0) &= 0 & \beta_1(0) &= 0 \\ \alpha_0(1) &= 0 & \alpha_1(1) &= 1 & \beta_0(1) &= 0 & \beta_1(1) &= 0 \\ \alpha'_0(0) &= 0 & \alpha'_1(0) &= 0 & \beta'_0(0) &= 1 & \beta'_1(0) &= 0 \\ \alpha'_0(1) &= 0 & \alpha'_1(1) &= 0 & \beta'_0(1) &= 0 & \beta'_1(1) &= 1 \\ \alpha''_0(0) &= 0 & \alpha''_1(0) &= 0 & \beta''_0(0) &= 0 & \beta''_1(0) &= 0 \\ \alpha''_0(1) &= 0 & \alpha''_1(1) &= 0 & \beta''_0(1) &= 0 & \beta''_1(1) &= 0 \\ \alpha'''_0(0) &= 0 & \alpha'''_1(0) &= 0 & \beta'''_0(0) &= 0 & \beta'''_1(0) &= 0 \\ \alpha'''_0(1) &= 0 & \alpha'''_1(1) &= 0 & \beta'''_0(1) &= 0 & \beta'''_1(1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \gamma_0(0) &= 0 & \gamma_1(0) &= 0 & \delta_0(0) &= 0 & \delta_1(0) &= 0 \\ \gamma_0(1) &= 0 & \gamma_1(1) &= 0 & \delta_0(1) &= 0 & \delta_1(1) &= 0 \\ \gamma'_0(0) &= 0 & \gamma'_1(0) &= 0 & \delta'_0(0) &= 0 & \delta'_1(0) &= 0 \\ \gamma'_0(1) &= 0 & \gamma'_1(1) &= 0 & \delta'_0(1) &= 0 & \delta'_1(1) &= 0 \\ \gamma''_0(0) &= 1 & \gamma''_1(0) &= 0 & \delta''_0(0) &= 0 & \delta''_1(0) &= 0 \\ \gamma''_0(1) &= 0 & \gamma''_1(1) &= 1 & \delta''_0(1) &= 0 & \delta''_1(1) &= 0 \\ \gamma'''_0(0) &= 0 & \gamma'''_1(0) &= 0 & \delta'''_0(0) &= 1 & \delta'''_1(0) &= 0 \\ \gamma'''_0(1) &= 0 & \gamma'''_1(1) &= 0 & \delta'''_0(1) &= 0 & \delta'''_1(1) &= 1 \end{aligned}$$

Решив системы методом Крамера, определим:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= 1.0 - 35u^4 + 84u^5 - 70u^6 + 20u^7 ; \\ \alpha_1 &= 35u^4 - 84u^5 + 70u^6 - 20u^7 ; \\ \beta_0 &= -20u^4 + 45u^5 - 36u^6 + 10u^7 ; \\ \beta_1 &= 35u^4 - 84u^5 + 70u^6 - 20u^7 ; \\ \gamma_0 &= -5u^4 + 10u^5 - 7.5u^6 + 2u^7 ; \\ \gamma_1 &= 2.5u^4 - 7u^5 + 6.5u^6 - 2u^7 ; \\ \varphi_0 &= 0.166667u^3 - 0.666667u^4 + u^5 - 0.666667u^6 + 0.166667u^7 ; \\ \varphi_1 &= -0.166667u^4 + 0.5u^5 - 0.5u^6 + 0.166667u^7 . \end{aligned}$$

Таким образом, найден векторно-параметрический сегмент, определяемый по 2-м точкам и заданным 1-м, 2-м и 3-м производным в них:

$$r(t) = \alpha_0 r_0 + \alpha_1 r_1 + \beta_0 r'_0 + \beta_1 r'_1 + \gamma_0 r''_0 + \gamma_1 r''_1 + f_0 r'''_0 + f_1 r'''_1, \quad (7)$$

где  $r_0, r_1$  – векторы точек  $0, 1$ ;

$\alpha_0(u), \alpha_1(u), \beta_0(u), \beta_1(u), \gamma_0(u), \gamma_1(u), \delta_0(u), \delta_1(u)$  – функции седьмой степени от параметра  $u$ .

Из дифференциальной геометрии, для векторно-параметрической кривой в виде:

$$r = r(t); [x = x(t); y = y(t); z = z(t)],$$

кривизна задается формулой:

$$k^2_1(t) = \frac{\begin{vmatrix} x'' & y'' \\ x' & y' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y'' & z'' \\ y' & z' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z'' & x'' \\ z' & x' \end{vmatrix}^2}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)}. \quad (8)$$

Кручение определяется формулой:

$$k_2 = \frac{(r' r'' r''')}{(r' \times r'')^2},$$

где  $(r' r'' r''')$  – смешанное произведение;  $(r' \times r'')$  – векторное произведение.

Очевидно, кручение реально только для трехмерной кривой, что соответствует нашему случаю (построению гладких каналовых векторно-параметрических поверхностей).

Применим алгоритм:

1. Задаем две точки  $r_0$  и  $r_1$  и первые производные в них  $r'_0 (x'_0, y'_0, z'_0)$  и  $r'_1 (x'_1, y'_1, z'_1)$ .

2. Далее задаем кривизны в этих точках  $k_0$  и  $k_1$ . Задаем вторые производные  $x''_0, y''_0, x''_1, y''_1$ . Из формулы (7) находим  $z''_0$  и  $z''_1$ .

3. Задаем величины кручения в этих двух точках  $kr_0$  и  $kr_1$ . Далее, задаем величины третьих производных по двум координатам  $x'''_0$  и  $y'''_0, x'''_1$  и  $y'''_1$ . И, наконец, из формулы (8) находим  $z'''_0$  и  $z'''_1$ .

4. Все необходимые входные данные получены, подставляем в формулу (6).

По выполнению: имеем векторно-параметрический сегмент (7), причем можно задать, на усмотрение разработчика первые, вторые и третьи производные (что автоматически дает кривую третьего порядка гладкости). К тому же возможен контроль значений кривизны и кручения еще на этапе конструирования пространственной кривой.



## 7. SWOT-анализ результатов исследований

*Strengths.* К сильным сторонам можно отнести полученные результаты: найден векторно-параметрический сегмент, определяемый по 2-м точкам и заданным 1-м, 2-м и 3-м производным в них. Также разработан алгоритм для векторно-параметрического сегмента, причем на усмотрение разработчика задаются первые, вторые и третьи производные (что автоматически дает кривую третьего порядка гладкости). К тому же возможен контроль значений *кривизны* и *кручения* еще на этапе конструирования пространственной кривой.

Произведено исследование *нового* алгоритма описания гладких каналовых векторно-параметрических поверхностей, полезные свойства которых можно применять при построении объектов реального мира.

*Weaknesses.* Слабые стороны данного исследования обусловлены малым количеством завершенных готовых моделей, выполненных с применением метода, что объясняется его новизной.

*Opportunities.* К дополнительным возможностям, обеспечивающим достижение цели исследования могут быть отнесены и вероятные внешние факторы:

- повышающийся спрос на специализированное программное обеспечение;
- разработка гладких каналовых векторно-параметрических поверхностей является передовым направлением исследований, промышленность, особенно «наукоемкая» требует все более совершенных подходов и алгоритмов;
- результаты исследования могут быть интегрированы в пакеты САПР, которые востребованы как в Украине, так и за ее пределами.

*Threats.* Сложности во внедрении полученных результатов исследования связаны с нынешней политико-экономической ситуацией, что обусловлено недостатком финансирования, медленным обновлением машинно-станочного парка, слабым внедрением тяжелого САПР и т. д.

Затраты для предприятий обещают быть небольшими в силу некоммерческого вида разработки.

Про точные аналоги не известно, по крайней мере, в открытых источниках.

Таким образом, SWOT-анализ результатов исследований позволяет обозначить основные направления для дальнейшей разработки более совершенных алгоритмов и программного обеспечения, продвижения их на вновь открывающиеся внешние и внутренние рынки ИТ.

## 8. Выводы

1. Получена формула для расчета векторно-параметрического сегмента седьмой степени (7) (по двум конечным точкам, двум первым, вторым и третьим производным в них). Формула позволяет более гибко управлять формой искомого сплайна, произвольно задавая исходные данные.

2. По заданным точкам  $\theta$ ,  $I$ , по значениям *кривизны*  $k_1$  и *кручения*  $k_2$  в них получен векторно-параметрический сегмент (7) с нужными разработчику свойствами. Причем гладкость третьего порядка обеспечивается автоматически (в силу равенства производных, вплоть до третьей, на концах сегмента). Значе-

ния кривизны  $k_1$  и кручения  $k_2$  являются функцией соответствующей, либо смешанной производной:  $r', r'', r'''$ .

### Литература

1. Голованов, Н. Н. Геометрическое моделирование [Текст] / Н. Н. Голованов. – М.: Издательство Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
2. Rogers, D. F. Mathematical Elements for Computer Graphics [Text] / D. F. Rogers, J. A. Adams. – Ed. 2. – McGraw-Hill Science, 1989. – 512 p.
3. Faux, I. D. Computational Geometry for Design and Manufacture [Text] / I. D. Faux, M. J. Pratt. – Ellis Horwood Ltd, 1980. – 329 p.
4. Завьялов, Ю. С. Методы сплайн-функций [Текст] / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. – Москва: Наука, 1982. – 352 с.
5. Fu, Y. L. Simultaneous Measurement of Torsion and Curvature Using Curvature Fiber Optic Sensor [Text] / Y. L. Fu, H. T. Di // Key Engineering Materials. – 2009. – Vol. 392–394. – P. 448–453. doi:[10.4028/www.scientific.net/kem.392-394.448](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/kem.392-394.448)
6. Rovenski, V. Geometry of Curves and Surfaces with MAPLE [Text] / V. Rovenski. – Birkhäuser Basel, 2000. – 310 p. doi:[10.1007/978-1-4612-2128-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2128-9)
7. Погорелов, А. В. Геометрия [Текст] / А. В. Погорелов. – М.: Наука, Матгиз, 1983. – 288 с.
8. Heller, H. R. Internationaler Handel [Text] / H. R. Heller. – Physica-Verlag HD, 1975. – 250 p. doi:[10.1007/978-3-642-93617-3](https://doi.org/10.1007/978-3-642-93617-3)
9. Lambek, J. Torsion Theories, Additive Semantics, and Rings of Quotients [Text] / J. Lambek // Lecture Notes in Mathematics. – Berlin, Heidelberg: Springer, 1971. – 94 p. doi:[10.1007/bfb0061029](https://doi.org/10.1007/bfb0061029)
10. Yaremenko, N. Derivation of Field Equations in Space with the Geometric Structure Generated by Metric and Torsion [Text] / N. Yaremenko // Journal of Gravity. – 2014. – Vol. 2014. – P. 1–13. doi:[10.1155/2014/420123](https://doi.org/10.1155/2014/420123)
11. Vasudevaiah, M. Effect of torsion in a helical pipe flow [Text] / M. Vasudevaiah, R. Patturaj // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – 1994. – Vol. 17, № 3. – P. 553–560. doi:[10.1155/s0161171294000803](https://doi.org/10.1155/s0161171294000803)