DOI: 10.15587/2312-8372.2017.108532

МІНІМІЗАЦІЯ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ КОМБІНАТОРНИМ МЕТОДОМ

Різник В. В., Соломко М. Т.

1. Вступ

Проблеми та недоліки відомих методів мінімізації булевих функцій пов'язані зі стрімким зростанням обсягу обчислень, наслідком чого є збільшення розрядності обчислювальних операцій, і, отже, збільшенням числа змінних логічної функції.

Відомі такі методи мінімізації булевих функцій [1–5]:

– метод Блейка-Порецького;
– метод Нельсона;
– метод Карта Карно;
– метод Квайна;
– метод Квайна–Мак-Класкі;
– метод Діаграма Вейча;
– метод алгебричних перетворень;
– метод Петрика;
– метод Рота;
– метод мінімізації функцій у базисах ТА-НІ і АБО-НІ (базиси Шеффера та Пірса);
– метод невизначених коефіцієнтів;
– метод гіперкубів;
– метод функціональної декомпозиції;
– евристичний алгоритм мінімізації Espresso;

Булева функція $f(x_1,...,x_n)$, що описує функціонування логічного пристрою, може бути реалізована за допомогою диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ), яка у цьому випадку опише схему відповідного логічного пристрою. Проблема мінімізації ДНФ є однією з багатоекстемальних логіко-комбінаторних задач і зводиться до оптимального зменшення кількості логічних елементів вентильної схеми без втрати її функціональності.

Функції з великою кількістю змінних (більше 16 змінних) можуть бути мінімізовані лише у певному сенсі, не гарантуючи досягнення оптимального рішення за допомогою евристичного алгоритму Espresso, що на сьогодні є фактичним світовим стандартом [6].

Від результату мінімізації булевої функції залежить швидкодія обчислювального пристрою, його надійність та енергозбереження. Оскільки алгоритм мінімізації Espresso не гарантує оптимальну мінімізацію булевої функції при збільшенні кількості змінних, пошук нових методів мінімізації залишається актуальним. Проведення мінімізація логічної функції є однією з центральних та практично важливих проблем, яка постає під час проектування обчислювальних пристроїв.

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об’єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції комбінаторним методом є блок-схема з повторенням. Оскільки блок-схема з повторенням є власне таблиця істинності заданої функції, то це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах протоколу обчислення функції. Таблична організація математичного апарату блок-схеми з повторенням дає можливість також отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності (комбінаторної системи). Рівносильні перетворення графічними образами, що за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень, зокрема за допомогою бібліотеки підматриць. Зазначена ефективність комбінаторного методу дозволяє без труднощів проводити ручну мінімізацію 4-, 5-розрядних булевих функцій.

Графічні властивості комбінаторного методу дають можливість отримати мінімальну функцію декількома варіантами пошуку, що зменшує перебір, пошук функції стає більш визначеним, і, отже, складність алгоритму мінімізації зменшується.

Складність алгоритму пошуку комбінаторним методом складає O(n) і є лінійною – час виконання алгоритму зі збільшенням розрядності функції n зростає за лінійним законом.

Комбінаторний метод допускає автоматизацію за своїм протоколом та спроможний підтримувати агреговані системи мінімізації, шляхом об’єднання з відповідним апаратом інших методів мінімізації булевих функцій.

Недоліки комбінаторного методу ручної мінімізації пов’язані зі зростанням числа змінних (більше семи-восьми) логічної функції. Мінімізація функції з більшим числом змінних потребує оновлення бібліотеки підматриць, на якій ґрунтується образне числення комбінаторного методу.

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є створення методу мінімізації логічної функції, використовуючи комбінаторний апарат блок-схеми з повторенням та встановлення властивостей такого методу.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1. Встановити адекватність використання апарату комбінаторної блок-схеми з повторенням для створення методу мінімізації булевої функції.

2. Визначити властивості апарату комбінаторного методу мінімізації булевих функцій, зокрема представити апарат образного числення для рівносильних перетворень кон’юнктермів.

3. Визначити верифікацію комбінаторного методу та отримати оцінку складності алгоритму пошуку мінімальної функції комбінаторним методом.

4. Провести порівнянний аналіз продуктивності та якості мінімізації булевих функцій, отриманих комбінаторним методом, з прикладами мінімізації функції іншими методами.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

У [7] розглядаються умови логічного зведення до мінімуму булевої функції, поданої у ДНФ. Якщо функція задовольняє таким умовам то для її спрощення застосовують класичний алгоритм мінімізації Квайна – Мак-Класкі, що допускає автоматизацію. Зазначається, що число змінних функції для коду програми обмежується пам’яттю комп’ютера.

У [8] розглянуто узагальнені правила спрощення кон’юнктермів у поліноміальному теоретико-множинному форматі, які ґрунтуються на запропонованих теоремах для різних початкових умов перетворення пари кон’юнктермів, геммінгова відстань між якими може бути довільна. Зазначені правила можуть бути корисні для мінімізації у поліноміальному теоретико-множинному форматі довільних логічних функцій від n змінних. Ефективність запропонованих правил демонструється прикладами мінімізації функції, запозичених з робіт відомих авторів з метою порівняння. З огляду на порівняльні приклади запропоновані правила дають підставу для підтвердження доцільності застосування їх у процедурах мінімізації будь-якої логічної функції від n змінних у поліноміальній формі.

У [9] запропоновано простий і систематичний метод мінімізації логічної функції. Метод полягає у скороченні таблиці істинності від N змінних N–1, N – від 1 до N–2, і так далі у послідовності, поки всі змінні не будуть вичерпані з вбудованими всіма можливими спрощеннями, після кожного скорочення. Отриманий таким чином підсумковий вираз для F буде мінімальним.

У [10] представлений алгоритм і програма для мінімізації комбінаційних логічних функцій до 20 змінних, але число змінних обмежується тільки пам’яттю комп'ютерної системи. Алгоритм заснований на послідовній кластеризації термів, починаючи з групування термів з однією зміною. Алгоритм кластеризації закінчується тоді, коли змінні не можуть більше бути згруповані. Цей алгоритм аналогічний алгоритму Квайна – Мак-Класкі, але він є більш спрощеним, оскільки усуває ряд дій, необхідних для проведення алгоритму Квайна – Мак-Класкі

В [11] представлена дискусія про роль ступеня автосиметрії (autosymmetry) змінних булевої функції і чому вона заслуговує на увагу стосовно мінімізації логічної функції. Закономірність змінних булевої функції може бути виражена ступенем автосиметрії, що у підсумку дає новий інструмент ефективної мінімізації.

У [12] демонструється метод логіко-мінімізаційного стиснення зображень, який залежить від логічної функції. Процес мінімізації розглядає сусідні пікселі зображення як роз’єднані мінтерми, що представляють логічну функцію та стискає 24-розрядні кольорові зображення за допомогою процедури мінімізації функції. Коефіцієнт стиснення такого методу в середньому на 25 % більший, порівняно з існуючими методами стиснення зображень.

Робота [13] демонструє спосіб збільшення ефективності мінімізації логічної функції, застосовуючи М-терми. Зазначається, що реалізація методу можлива для будь-якій кількості змінних.

Робота [14] демонструє використання генетичного алгоритму для вибору побічних об’єктів процедури мінімізації логічної функції за допомогою карти Карно.

У [15] запропоновано новий евристичний алгоритм для максимальної мінімізації булевих функцій. Для реалізації запропонованого алгоритму використовуються графічні дані. Також представлені деякі умови для досягнення максимального рівня мінімізації булевої функції.

У [16] розглядається оптимальне спрощення булевих функцій за допомогою карт Карно, використовуючи об'єктно-орієнтований алгоритм мінімізації. Представлений аналіз продуктивності запропонованого алгоритму.

На відміну від [7–16], у даній роботі об'єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції є комбінаторна блок-схема з повторенням, що дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах таблиці істинності заданої функції. Особливості комбінаторного методу полягають у більшій інформативності процесу вирішення задачі, порівняно з алгебричним способом мінімізації функції, за рахунок табличної організації та впровадження апарату образного числення. У зв'язку з цим процедура мінімізації функції стає більш відчутною, і, отже, більш надійною, спрощеною. Комбінаторний метод допускає свою автоматизацію та спроможний підтримувати агреговані системи мінімізації, шляхом об'єднання з відповідним апаратом інших методів мінімізації булевих функцій.

5. Методи дослідження

5.1. Мінімізація булевих функцій за допомогою ациклічного графа

Мінімізувати функцію, що моделює роботу логічного пристрою, можливо й методом у якому використовують ациклічний граф [17]. Для цього з початкової вершини G (кореня графа) проводять дві дуги: ліва дуга відповідає значенню змінної x_j, а права – змінної $\overline{x}_j$. Із кожної вершини першого і наступних рівнів знову проводять дві дуги за тим же правилом, де кожна вершина утворює дві дочірні вершини нижчого рівня. Таким чином, з кожної вершини *i*-того рівня проводять по дві дуги, де ліві дуги відповідають прямому значенню змінної, а праві - інвертованому. Кількість таких проведень дорівнює кількості змінних, що входять до створеного мінтерма (а, отже, і кількості рівнів ациклічного графа) (рис. 1).

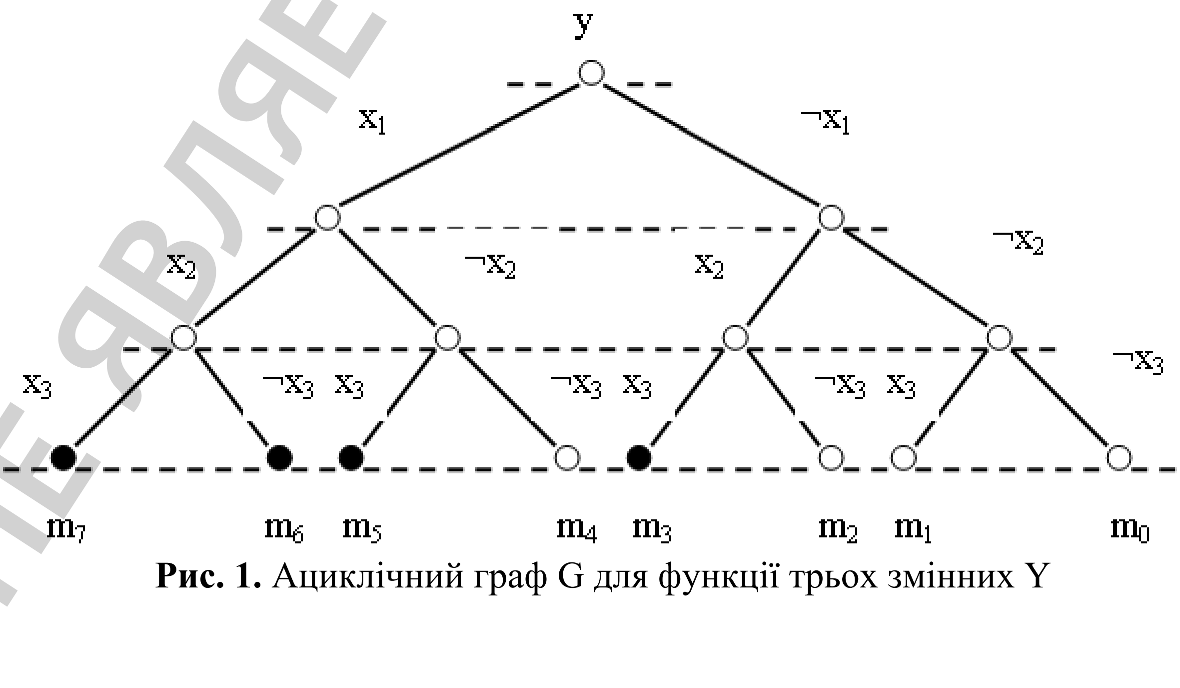


Рис. 1. Ациклічний граф G для функції трьох змінних Y

З рис. 1 бачимо, що кожний шлях у цьому графі від кінцевої вершини (у даному випадку від 3-го рівня) до кореня графа (до 0- рівня), ідентифікує певний мінтерм: $m_0 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}$, $m_1 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3$, …, $m_7 = x_1 x_2 x_3$.

У загальному випадку кожна логічна функція може бути представлена ациклічним графом вигляду:

$$G = \{M, X\},$$

де $M = \{m_1, m_2, ..., m_k\}$, $X = \{x_1, \overline{x_1}, x_2, \overline{x_2}, ..., x_n, \overline{x_n}\}$.

Ациклічний граф G з n рівнями підлягає розбиттю на компоненти $G_1, G_2, ..., G_{i,} ..., G_n$ з метою виявлення можливості склеювання *i*-ї змінної згідно з залежністю:

$$G_i x_i \vee G_i \overline{x_i} = G_i.$$

Мінтерми, значення яких дорівнюють одиниці на графі G, позначені чорними кружечками (рис. 1).

Розділення ациклічного графа G слід починати від кінцевих вершин до кореня графа. Наприклад, для графа на рис. 1:

$$\begin{aligned} &G_3 = \left\{M_3, \left(x_3 \vee \overline{x_3}\right)\right\}, \\ &G_2 = \left\{M_2, \left(x_2 \vee \overline{x_2}\right)\right\},\ M_2 = \left\{m_0^2, m_1^2, m_2^2, m_3^2\right\}, \quad (1) \\ &G_1 = \left\{M_1, \left(x_1 \vee \overline{x_1}\right)\right\},\ M_1 = \left\{m_0^1, m_1^1\right\}. \end{aligned}$$

Для *n*-ї змінної:

$$G_n = \left\{M_n, \left(x_n \vee \overline{x_n}\right)\right\},\ M_n = \left\{m_0^n, m_1^n, ..., m_n^n\right\}.$$

Аналізуючи систему рівнянь (1), одержану розділенням ациклічного графа на три (*n*=3) компоненти, легко бачити, що процес мінімізації досконалої диз'юнктивної нормальної форми (ДДНФ) булевої функції зводиться до проходження шляху від кінцевої вершини третього рівня до кореня графа. Мінімізація ДДНФ булевої функції здійснюється шляхом склеювання змінних на відповідних рівнях.

Ациклічний граф G для функції $Y = x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3}$, зображено на рис.1. Чорним замальовано мінтерми, з яких власне складається функція Y. Внаслідок розділення графа G, на 3-му рівні процедура склеювання пройде між змінними мінтермів $m_7^3 - m_8^3$ – отримаємо $x_1 x_2$. Для змінних мінтерма m_5 склеювання пройде на 2-му рівні – отримаємо $x_1 x_3$. Для змінних мінтерма m_2 склеювання пройде на 1-му рівні – отримаємо $x_2 x_3$. У підсумку знаходимо мінімізовану функцію:

$$Y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3. \qquad (2)$$

Функція (2) задовольняє задану таблицю істинності (табл. 1).

5.2. Комбінаторний метод мінімізації булевих функцій

Поняття булевих функцій і ДНФ тісно пов'язані з багатьма поняттями комбінаторного аналізу, зокрема з поняттям покриття. Нехай C=(X1, ..., Xn) – деяке сімейство підмножин множини X, і нехай $Y \subseteq X$. Тоді Y є покриттям для C, якщо для будь-якого X_i з C виконується умова $X_i \cap Y \neq \varnothing$. Покриття Y називається приведеним для C, якщо будь-яка його власна підмножина не є покриттям для C. Множина всіх приведених покриттів для C позначається через P(C).

З комбінаторного аналізу відомо, що граф можна представити у вигляді відповідної блок-схеми [18]. Звідси випливає, що ациклічний граф для логічної функції доречно аналізувати за таблицю істинності у вигляді блок-схеми з повторенням (табл. 1). А відтак, принцип мінімізації за допомогою ациклічного графа можна поширити на метод мінімізації з використанням комбінаторних блок – схем (табл. 2).

Таблиця 1

Таблиця істинності логічної функції $Y = x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3}$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	Y	№ з/п	x_1	x_2	x_3	Y
0	0	0	0	**0**	4	1	0	0	**0**
1	0	0	1	**0**	5	1	0	1	**1**
2	0	1	0	**0**	6	1	1	0	**1**
3	0	1	1	**1**	7	1	1	1	**1**

Таблиця 2

Теза́уруси методів мінімізації

№ з/п	Теза́урус мінімізації за допомогою ациклічного графа	Теза́урус мінімізації за допомогою блок-схеми з повторенням
1	ациклічний граф	комбінаторна система з повторенням
2	шлях (гілка) у графі	блок змінних комбінаторної системи
3	змінні	змінні
4	закони алгебри логіки	закони алгебри логіки
5	–	образне числення

Слід зазначити, що на відміну від мінімізації ДДНФ методом ациклічного графа, де процедура мінімізації зводиться до проходження шляху від кінцевої вершини нижнього рівня до кореня графа з метою склеювання змінних на відповідних рівнях, при використанні блок-схеми з повторенням процес мінімізації у частині склеювання змінних зводиться до пошуку блоків з однаковими змінними у відповідних розрядах, за виключенням однієї змінної. Враховуючи табличну організацію комбінаторного методу, це дає змогу підвищити ефективність пошуку мінімальної функції.

Мінімізація логічної функції комбінаторним методом здійснюється наступним чином. На першому кроці виявляють блоки (конституанти) зі змінними, що можна склеювати. Наступним кроком здійснюють пошук наборів пар блоків (імплікант) з можливістю їх мінімізації заміщенням (склеюванням, поглинанням) змінних у цих парах. Отримані набори блоків знову мінімізують подібним способом, і т. д. – до отримання тупикової ДНФ (ТДНФ). Серед множини ТДНФ містяться і мінімальні функції (МДНФ). На останньому кроці проводиться верифікація мінімізованої функції, застосовуючи критерій оптимальності та задану таблицю істинності.

Процес мінімізації комбінаторним методом логічної функції:

$$Y = x_1 x_2 x_3 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 \overline{x_2} x_3 + x_1 x_2 \overline{x_3},$$

що зображена на рис. 1 виглядає так:

1-й варіант:

$$Y = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \right|.$$

У першій матриці здійснюється склеювання змінних у 1-му та 2-му блоках, у другій матриці проведено заміщення змінних у 2-му та 4-му блоках.

2-й варіант:

$$Y = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & & \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ccc} & & \\ & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & \end{array} \right|.$$

У першій матриці здійснюється склеювання змінних у 1-му та 4-му блоках, у другій матриці проведено заміщення змінних у 2-му та 3-му блоках.

У підсумку мінімізована функція для двох варіантів має вигляд $Y = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_2 x_3$, що збігається з (2).

У загальному випадку, під час мінімізації комбінаторним методом, використовуються такі правила алгебри логіки:

– склеювання змінних – $ab + a\overline{b} = a$;
– узагальнене склеювання змінних – $xy + \overline{x}z = xy + \overline{x}z + yz$;
– заміщення змінної – $a + \overline{a}b = a + b$;
– поглинання змінної – $ab + a = a(b+1) = a$;
– ідемподентність змінних – $a + a = a$, $aa = a$;
– доповнення змінної – $a + \overline{a} = 1$, $a\overline{a} = 0$;
– повторення константи – $a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$ та інші.

Алгебричні перетворення комбінаторного методу мінімізації булевої функції можна замінити рівносильними перетвореннями за допомогою підматриць (графічних образів). Процедуру склеювання за допомогою підматриць можна проілюструвати так:

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2} + \overline{x_1}x_2 = \overline{x_1}(\overline{x_2} + x_2) = \overline{x_1},$$

$$\begin{matrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}0\\ 0\end{matrix} \rightarrow 0$$

$$x_1x_2 + \overline{x_1}x_2 + x_2(x_1 + \overline{x_1}) = x_2,$$

$$\begin{matrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1\\ 1\end{matrix} \rightarrow 1$$

Застосовуючи графічний образ можна проілюструвати й інші алгебричні перетворення.

Узагальнене склеювання:

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2\overline{x_3} = x_1x_3 + x_2\overline{x_3},$$

$$\begin{matrix}1 & 1 & \\ 1 & & 1\\ & 1 & 0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} & & \\ 1 & & 1\\ & 1 & 0\end{matrix}$$

$$x_1x_3 + x_2\overline{x_3} = x_1x_3 + x_2\overline{x_3} + x_1x_2,$$

$$\begin{matrix} & & \\ 1 & & 1\\ & 1 & 0\end{matrix} \rightarrow \begin{matrix}1 & 1 & \\ 1 & & 1.\\ & 1 & 0\end{matrix}$$

Заміщення змінної:

$$x_1x_2 + x_1\overline{x_2}x_3 = x_1(x_2 + \overline{x_2}x_3) =$$
$$= x_1(x_2 + x_3) = x_1x_2 + x_1x_3,$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & 1 & \\ 1 & & 1 \end{array}.$$

Поглинання змінної:

$$x_1x_3 + x_1\overline{x_2}x_3 = x_1x_3(1 + \overline{x_2}) = x_1x_3,$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc} 1 & & 1 \end{array}.$$

Іденподентність змінних:

$$x_1x_2 + x_1x_2 = x_1x_2,$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc} 1 & 1 \end{array}.$$

Оскільки графічні образи дають більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків комбінаторної системи, тому використання їх під час пошуку об’єктів для рівносильного перетворення, у процесі мінімізації логічної функції, є ефективним.

5.3. Мінімізація 4-розрядних булевих функцій

Комбінаторний метод без труднощів проводить мінімізацію 4-розрядних булевих функцій.

Приклад 1. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності (табл. 3) [17].

Таблиця 3

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	F	№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	F
0	0	0	0	0	**1**	8	1	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**1**	9	1	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**1**	10	1	0	1	0	**1**
3	0	0	1	1	**1**	11	1	0	1	1	**1**
4	0	1	0	0	**0**	12	1	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**0**	13	1	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**1**	14	1	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**0**	15	1	1	1	1	**1**

Складемо досконалу диз'юктивну нормальну форму (ДДНФ) заданої функції з блоків при яких функція отримує значення одиниці, тобто для наборів 0, 1, 2, 3, 6, 9, 10, 11, 13, 14, 15.

$$
\begin{aligned}
F(x_1,x_2,x_3,x_4) = {} & \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + \\
& + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + \overline{x}_1\overline{x}_2x_3x_4 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 + \\
& + x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 + x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 + x_1\overline{x}_2x_3x_4 + \\
& + x_1x_2\overline{x}_3x_4 + x_1x_2x_3\overline{x}_4 + x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}
$$

Перший крок – склеювання конституант (перших блоків).

Змінні для першого склеювання знаходяться у блоках 1 і 2, 3 і 4, 6 і 9, 7 і 8 та 10 і 11 (3). У (3) перший крок показано на трьох перших матрицях.

$$
F=\begin{vmatrix}
0&0&0&0\\
0&0&0&1\\
0&0&1&0\\
0&0&1&1\\
0&1&1&0\\
1&0&0&1\\
1&0&1&0\\
1&0&1&1\\
1&1&0&1\\
1&1&1&0\\
1&1&1&1
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
0&0&0& \\
0&0&0& \\
0&0&1& \\
0&0&1& \\
0&1&1&0\\
1& &0&1\\
1&0&1& \\
1&0&1& \\
1& &0&1\\
1&1&1& \\
1&1&1&
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 & & & \\
0&0&0& \\
 & & & \\
0&0&1& \\
0&1&1&0\\
 & & & \\
 & & & \\
1&0&1& \\
1& &0&1\\
 & & & \\
1&1&1&
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 & & & \\
0&0& & \\
 & & & \\
0&0& & \\
0&1&1&0\\
 & & & \\
 & & & \\
1& &1& \\
1& &0&1\\
 & & & \\
1& &1&
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
0&0& & \\
0&1&1&0\\
 & & & \\
 & & & \\
 & & & \\
1& &0&1\\
 & & & \\
1& &1&
\end{vmatrix}
= \qquad (3)
$$

Другий крок – склеювання імплікант – пошук пар блоків, які мають співпадання змінних у відповідних розрядах, за виключенням однієї змінної, з наступним заміщенням (склеюванням, поглинанням) у цих парах.

Очевидним є заміщення змінних для 4-го, 5-го та 9-го, 11-го блоків четвертої матриці (3):

$$
\begin{aligned}
& \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1x_2x_3\overline{x}_4 = \overline{x}_1(\overline{x}_2 + x_2x_3\overline{x}_4) = \\
& = \overline{x}_1(\overline{x}_2 + x_3\overline{x}_4) = \overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1x_3\overline{x}_4,
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
0&0& & \\
0&1&1&0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc}
0&0& & \\
0& &1&0
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_1\overline{x_3}x_4 + x_1x_3 = x_1(\overline{x_3}x_4 + x_3) = \\
& = x_1(x_4 + x_3) = x_1x_4 + x_1x_3,
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
1 & & 0 & 1 \\
1 & & 1 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc}
1 & & & 1 \\
1 & & 1 &
\end{array}
$$

Після процедур (4) і (5) отримуємо проміжну матрицю:

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 0 & & \\
0 & & 1 & 0 \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 &
\end{vmatrix}=
$$

Очевидним є заміщення змінних для 2-го та 4-го блоків проміжної матриці:

$$
\begin{aligned}
& \overline{x_1}x_3\overline{x_4} + x_1x_3 = x_3(\overline{x_1 x_4} + x_1) = \\
& = x_3(\overline{x_4} + x_1) = x_1x_3 + x_3\overline{x_4},
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

$$
\begin{array}{cccc}
0 & & 1 & 0 \\
1 & & 1 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 0 \\
1 & & 1 &
\end{array}
$$

Після процедури (6) отримуємо останню проміжну матрицю:

$$
=\begin{vmatrix}
0 & 0 & & \\
 & & 1 & 0 \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 &
\end{vmatrix}=
$$

Очевидним є узагальнене заміщення змінних для 2-го, 3-го та 4-го блоків останньої проміжної матриці:

$$
x_3\overline{x_4} + x_1x_4 + x_1x_3 = x_3\overline{x_4} + x_1x_4.
$$

$$
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 0 \\
1 & & & 1 \\
1 & & 1 &
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{cccc}
 & & 1 & 0 \\
1 & & & 1 \\
 & & &
\end{array}
$$

$$=\begin{vmatrix} 0 & 0 & & \\ & & 1 & 0 \\ 1 & & & 1 \\ & & & \end{vmatrix}.$$

У підсумку отримуємо мінімальну функцію:

$$F=\overline{x}_1\,\overline{x}_2+x_1x_4+x_3\,\overline{x}_4. \qquad (7)$$

Третій крок – верифікація отриманої мінімізованої функції (7) за допомогою вихідної таблиці істинності (табл. 3).

Мінімізована логічна функція (7) задовольняє вихідну таблицю істинності.

У табл. 4 представлені результати мінімізації функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$ за допомогою ациклічного графа [17] та комбінаторним методом.

Таблиця 4

Результат мінімізації функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$

Мінімізація за допомогою ациклічного графа	Мінімізація комбінаторним методом
$F=\overline{x}_1\,\overline{x}_2+x_1x_4+x_1x_3\,\overline{x}_4+\overline{x}_1x_2x_3\,\overline{x}_4$	$F=\overline{x}_1\,\overline{x}_2+x_1x_4+x_3\,\overline{x}_4$

З огляду табл. 4 бачимо, що комбінаторний метод дає функцію з меншим числом вхідних змінних.

5.4. Мінімізація 5-розрядних булевих функцій

Комбінаторна структура таблиці істинності 5-розрядної функції є більш складною, порівняно з 4-розряною функцією, через що з'являється більше варіантів мінімізації, починаючи з першого кроку. Так, наприклад, на першому кроці мінімізації 5-розрядної функції, можна виявляти пари блоків та набори з трьох блоків, які допускають процедури склеювання і заміщення змінних. У загальному випадку мінімізація комбінаторним методом 5-розрядної функції проходить аналогічно мінімізації 4-розрядної функції.

Приклад 2. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ комбінаторним методом, що задана наступною таблицею істинності (табл. 5) [19].

Таблиця 5

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F	№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
0	0	0	0	0	0	**0**	16	1	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	0	1	**1**	17	1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	0	1	0	–	18	1	0	0	1	0	**1**
3	0	0	0	1	1	–	19	1	0	0	1	1	**0**
4	0	0	1	0	0	**1**	20	1	0	1	0	0	–
5	0	0	1	0	1	**1**	21	1	0	1	0	1	**0**
6	0	0	1	1	0	**0**	22	1	0	1	1	0	**1**
7	0	0	1	1	1	**1**	23	1	0	1	1	1	**0**
8	0	1	0	0	0	**0**	24	1	1	0	0	0	**0**
9	0	1	0	0	1	**1**	25	1	1	0	0	1	**0**
10	0	1	0	1	0	**0**	26	1	1	0	1	0	–
11	0	1	0	1	1	**1**	27	1	1	0	1	1	**0**
12	0	1	1	0	0	**1**	28	1	1	1	0	0	**1**
13	0	1	1	0	1	**1**	29	1	1	1	0	1	**0**
14	0	1	1	1	0	–	30	1	1	1	1	0	–
15	0	1	1	1	1	–	31	1	1	1	1	1	**1**

Використовуючи табл. 5 складемо ДДНФ заданої 5-розрядної функції з блоків при яких функція отримує значення одиниці, тобто для наборів 1, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 16, 17, 18, 22, 28, 31.

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = {} & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \\
+ {} & \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \\
+ {} & \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \\
+ {} & x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + \\
+ {} & x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Нагадаємо, значення « – » функції F означає довільний стан, який вказує на те, що такого набору вхідних змінних не очікується і значення функції може бути довільним – нулем або одиницею у процесі мінімізації.

Довизначимо функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ заміною значення « – » функції на одиницю.

Після заміни значення « – » функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ на одиницю таблиця істинності (табл. 5) прийме такий вигляд (табл. 6).

Таблиця 6

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ після заміни значення «–» функції на одиницю

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F	№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
0	0	0	0	0	0	**0**	16	1	0	0	0	0	**1**
1	0	0	0	0	1	**1**	17	1	0	0	0	1	**1**
2	0	0	0	1	0	**1**	18	1	0	0	1	0	**1**
3	0	0	0	1	1	**1**	19	1	0	0	1	1	**0**
4	0	0	1	0	0	**1**	20	1	0	1	0	0	**1**
5	0	0	1	0	1	**1**	21	1	0	1	0	1	**0**
6	0	0	1	1	0	**0**	22	1	0	1	1	0	**1**
7	0	0	1	1	1	**1**	23	1	0	1	1	1	**0**
8	0	1	0	0	0	**0**	24	1	1	0	0	0	**0**
9	0	1	0	0	1	**1**	25	1	1	0	0	1	**0**
10	0	1	0	1	0	**0**	26	1	1	0	1	0	**1**
11	0	1	0	1	1	**1**	27	1	1	0	1	1	**0**
12	0	1	1	0	0	**1**	28	1	1	1	0	0	**1**
13	0	1	1	0	1	**1**	29	1	1	1	0	1	**0**
14	0	1	1	1	0	**1**	30	1	1	1	1	0	**1**
15	0	1	1	1	1	**1**	31	1	1	1	1	1	**1**

Використовуючи табл. 6 складемо ДДНФ 5-розрядної функції з блоків при яких функція отримує значення одиниці, тобто для наборів 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 31.

$$
\begin{aligned}
F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = {} & \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + \\
& + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \\
& + \bar{x}_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 x_5 + \\
& + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 x_5 + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \\
& + \bar{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 x_5 + \\
& + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 \bar{x}_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + \\
& + x_1 x_2 \bar{x}_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 \bar{x}_5 + x_1 x_2 x_3 x_4 x_5.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Розглянемо два варіанти мінімізації 5-розрядної булевої функції (9).

За *першим варіантом* спочатку виявляють пари блоків, які допускають процедури склеювання і заміщення змінних.

На першому кроці здійснюють склеювання конституант і заміщення змінних.

Алгебричні перетворення 1-ї матриці (результат перетворення записаний у 2-у матрицю):

$F=$

№	1					2					3					4				
з / п	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		1
2	0	0	0	1	0															
3	0	0	0	1	1	0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1	
4	0	0	1	0	0	0	0	1	0		0	0	1	0		0	0	1	0	
5	0	0	1	0	1	0	0	1		1	0	0	1		1	0	0	1		1
6	0	0	1	1	1															
7	0	1	0	0	1															
8	0	1	0	1	1	0	1	0		1	0	1	0		1	0	1	0		1
9	0	1	1	0	0															
10	0	1	1	0	1	0	1	1	0		0	1	1	0		0	1	1		
11	0	1	1	1	0															
12	0	1	1	1	1	0	1	1	1											
13	1	0	0	0	0															
14	1	0	0	0	1	1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0	
15	1	0	0	1	0	1	0		1	0	1	0		1	0	1	0		1	0
16	1	0	1	0	0	1	0	1		0	1	0	1		0	1	0	1		0
17	1	0	1	1	0															
18	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1		1	0
19	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1		0
20	1	1	1	1	0															
21	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1			1	1	1	

=

– склеювання змінних 2 та 3 блоків:

$$\overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3}X_4\overline{X_5} + \overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3}X_4X_5 = \overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3}X_4\left(\overline{X_5} + X_5\right) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}\,\overline{X_3}X_4,$$

– склеювання і заміщення змінних 4, 5 та 6 блоків:

$$\overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\overline{X_4}X_5 + \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3X_4X_5 = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3 \times$$
$$\times\left(\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4}X_5 + X_4X_5\right) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\left(\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4}X_5 + \overline{X_4} + X_4X_5\right) =$$
$$= \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\left(\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4}X_5 + \overline{X_4} + X_5\right) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3 \times$$
$$\times\left(\overline{X_4}\left(\overline{X_5} + X_5\right) + \overline{X_4} + X_5\right) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\left(\overline{X_4} + \overline{X_4} + X_5\right) =$$
$$= \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\left(\overline{X_4} + X_5\right) = \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3\overline{X_4} + \overline{X_1}\,\overline{X_2}X_3X_5,$$

– склеювання змінних 7 та 8 блоків:

$$\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5+\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5=\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_5\left(\overline{x_4}+x_4\right)=\overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_5,$$

– склеювання змінних 9 та 10 блоків:

$$\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}+\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5=\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\left(\overline{x_5}+x_5\right)=\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4},$$

– склеювання змінних 11 та 12 блоків:

$$\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5}+\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5=\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4\left(\overline{x_5}+x_5\right)=\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4,$$

– склеювання змінних 13 та 14 блоків:

$$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}+x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\left(\overline{x_5}+x_5\right)=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4},$$

– склеювання і заміщення змінних 15, 16 та 17 блоків:

$$\begin{aligned}
&x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5}+x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}+x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5}=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\times\\
&\times\left(\overline{x_3}\,x_4+x_3\,\overline{x_4}+x_3\,x_4\right)=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\left(\overline{x_3}\,x_4+x_3\,x_4+x_3\,\overline{x_4}\right)=\\
&=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\left(\overline{x_3}\,x_4+x_3\,x_4+x_4+x_3\,\overline{x_4}\right)=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\left(x_4\left(\overline{x_3}+x_3\right)+x_4+x_3\right)=\\
&=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\left(x_4+x_4+x_3\right)=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}\left(x_4+x_3\right)=x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_5}+x_1\,\overline{x_2}\,x_4\,\overline{x_5},
\end{aligned}$$

– склеювання змінних 20 та 21 блоків:

$$x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}+x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\left(\overline{x_5}+x_5\right)=x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}.$$

На **другому кроці** виконують склеювання імплікант і заміщення змінних.

Алгебричні перетворення 2-ї матриці (результат перетворення записаний у 3-ю матрицю):

– склеювання змінних 12 та 21 блоків:

$$\overline{x_1}\,x_2\,x_3\,x_4+x_1\,x_2\,x_3\,x_4=x_2\,x_3\,x_4\left(\overline{x_1}+x_1\right)=x_2\,x_3\,x_4.$$

Алгебричні перетворення 3-ї матриці (результат перетворення записаний у 4-у матрицю):

– заміщення змінних для 10, 18, 19 та 21 блоків:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4 x_5} + x_2 x_3 x_4 = \\
&= x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 \overline{x_4} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4 x_5} + x_2 x_3 x_4 + \\
&+ x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} = x_2 x_3 \left(x_4 + \overline{x_1 x_4} + x_1 \overline{x_4 x_5} \right) + \\
&+ x_2 x_4 \left(x_3 + x_1 \overline{x_3 x_5} \right) = x_2 x_3 \left(x_4 + \overline{x_1} + x_1 \overline{x_5} \right) + \\
&+ x_2 x_4 \left(x_3 + x_1 \overline{x_5} \right) = x_2 x_3 \left(x_4 + \overline{x_1} + x_1 \overline{x_5} \right) + \\
&+ x_2 x_4 \left(x_3 + x_1 \overline{x_5} \right) = x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 + \\
&+ x_1 x_2 x_3 \overline{x_5} + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 \overline{x_5} = x_2 x_3 x_4 + \\
&+ \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_5} + x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 \overline{x_5} = \\
&= x_2 x_3 x_4 + \overline{x_1} x_2 x_3 + x_1 x_2 x_3 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_4 \overline{x_5}.
\end{aligned}
$$

– заміщення змінних для 1 та 3 блоків:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1 x_2 x_3 x_4} x_5 + \overline{x_1 x_2 x_3} x_4 = \overline{x_1 x_2 x_3} \left(\overline{x_4} x_5 + x_4 \right) = \\
&= \overline{x_1 x_2 x_3} \left(x_5 + x_4 \right) = \overline{x_1 x_2 x_3} x_5 + \overline{x_1 x_2 x_3} x_4.
\end{aligned}
$$

Алгебричні перетворення 4-ї матриці (результат перетворення записаний у 5-у матрицю):

– склеювання змінних 15 та 18 блоків:

$$x_1 \overline{x_2} x_4 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_4 \overline{x_5} = x_1 x_4 \overline{x_5} \left(\overline{x_2} + x_2 \right) = x_1 x_4 \overline{x_5},$$

– склеювання змінних 16 та 19 блоків:

$$x_1 \overline{x_2} x_3 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_5} = x_1 x_3 \overline{x_5} \left(\overline{x_2} + x_2 \right) = x_1 x_3 \overline{x_5},$$

– заміщення змінних для 8 та 10 блоків:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1} x_2 \overline{x_3} x_5 + \overline{x_1} x_2 x_3 = \overline{x_1} x_2 \left(\overline{x_3} x_5 + x_3 \right) = \\
&= \overline{x_1} x_2 \left(x_5 + x_3 \right) = \overline{x_1} x_2 x_5 + \overline{x_1} x_2 x_3,
\end{aligned}
$$

– заміщення змінних для 4 та 10 блоків:

$$
\begin{aligned}
&\overline{x_1 x_2} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3 = \overline{x_1} x_3 \left(\overline{x_2 x_4} + x_2 \right) = \\
&= \overline{x_1} x_3 \left(\overline{x_4} + x_2 \right) = \overline{x_1} x_3 \overline{x_4} + \overline{x_1} x_2 x_3,
\end{aligned}
$$

– склеювання змінних 1 та 5 блоків:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 x_5 + \overline{x}_1\overline{x}_2 x_3 x_5 = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_5(\overline{x}_3 + x_3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 x_5.$$

=

№	5					6					7					8				
з / п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1																				
2																				
3	0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1	
4	0		1	0		0		1	0		0		1	0						
5	0	0			1															
6																				
7																				
8	0	1			1	0				1	0				1	0				1
9																				
10	0	1	1			0	1	1												
11																				
12																				
13																				
14	1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0	
15																				
16													1	0	0			1	0	0
17																				
18	1			1	0	1			1	0	1			1	0	1			1	0
19	1		1		0	1		1		0	1		1		0					
20																				
21		1	1	1			1	1	1			1	1	1			1	1	1	

Алгебричні перетворення 5-ї матриці (результат перетворення записаний у 6-у матрицю):

– склеювання змінних 5 та 8 блоків:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 x_5 + \overline{x}_1 x_2 x_5 = \overline{x}_1 x_5(\overline{x}_2 + x_2) = \overline{x}_1 x_5.$$

Алгебричні перетворення 6-ї матриці (результат перетворення записаний у 7-у матрицю):

– узагальнене заміщення змінних для 4, 8 та 16 блоків:

$$\overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 + x_2 x_3 x_4 = \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 +$$
$$+ x_2 x_3 x_4 + \overline{x}_1 x_2 x_3 = \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 + x_2 x_3 x_4,$$

– узагальнене заміщення змінних для 4, та 19 блоків:

$$\overline{x_1}\, x_3 \overline{x_4} + x_1 x_3 \overline{x_5} = \overline{x_1}\, x_3 \overline{x_4} + x_1 x_3 \overline{x_5} +$$
$$+ x_3 x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} = \overline{x_1}\, x_3 \overline{x_4} + x_1 x_3 \overline{x_5} + x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5}.$$

Алгебричні перетворення 7-ї матриці (результат перетворення записаний у 8-у матрицю):

– узагальнене заміщення змінних для 4, 10 та 21 блоків:

$$\overline{x_1}\, x_5 + x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\, x_3 \overline{x_4} = \overline{x_1}\, x_5 + x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5},$$

– узагальнене заміщення змінних для 16, 18 та 19 блоків:

$$x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_1 x_4 \overline{x_5} = x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_1 x_4 \overline{x_5} + x_1 x_3 \overline{x_5}\,\overline{x_5} =$$
$$= x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_1 x_4 \overline{x_5} + x_1 x_3 \overline{x_5} = x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_1 x_4 \overline{x_5}.$$

Третій крок передбачає перевірку кожної простої імпліканти у ДДНФ на надлишковість з метою її видалення та верифікація отриманої функції за допомогою таблиці істинності (табл. 6).

Спроби подальшого застосування операцій алгебричного перетворення не дають результату (матриця (8)). Отже, отримана тупикова ДНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що представлена табл. 6. Далі завдання пошуку мінімальної ДНФ вирішується на підставі таблиці покриття (табл. 7). У загальному випадку для одержання мінімальної ДНФ необхідно забрати з тупикової ДНФ усі зайві прості імпліканти.

Таблиця 7

Таблиця покриття функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Конституанти	$\bar{x}_1 x_5$	$x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4$	$x_1 x_4 \bar{x}_5$	$\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4$	$x_2 x_3 x_4$	$x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5$
00001	●	–	–	–	–	–
00010	–	–	–	●	–	–
00011	●	–	–	–	–	–
00100	–	–	–	–	–	●
00101	●	–	–	–	–	–
00111	●	–	–	–	–	–
01001	●	–	–	–	–	–
01011	●	–	–	–	–	–
01100	–	–	–	–	–	●
01101	●	–	–	–	–	–
01110	–	–	–	–	●	–
01111	●	–	–	–	●	–
10000	–	●	–	–	–	–
10001	–	●	–	–	–	–
10010	–	–	●	–	–	–
10100	–	–	–	–	–	●
10110	–	–	●	–	–	–
11010	–	–	●	–	–	–
11100	–	–	–	–	–	●
11110	–	–	●	–	●	–
11111	–	–	–	–	●	–

У стовпцях табл. 7 знаходяться прості імпліканти скороченої ДНФ функції (матриця (8)). Рядки табл. 7 представляють конституанти одиниці ДДНФ функції, що представлена табл. 6.

Проста імпліканта поглинає деяку конституанту одиниці тоді, коли є її власною частиною. Відповідна клітинка табл. 7 на перетині стовпця (з розглянутою простою імплікантою) і рядка (з конституантою одиниці) позначається значком ● чорного кольору.

З огляду табл. 7 бачимо, що зайві імпліканти відсутні, і, отже, табл. 7 представляє мінімальну ДНФ функції (9), що представлена табл. 6.

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) &= \bar{x}_1 x_5 + x_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \\ &+ x_1 x_4 \bar{x}_5 + \bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_3 \bar{x}_4 \bar{x}_5. \end{aligned} \qquad (10)$$

Таблиця істинності (табл. 6) створена з метою отримання більш зручного процесу мінімізації. Однак вихідна логічна функція (8) представлена таблицею істинності (табл. 5), у якій присутні набори змінних, що не очікуються. Значення функції F для таких наборів позначається « – » і означає довільний стан.

У зв’язку з цим пошук мінімальної ДНФ функції, що представлена вихідною таблицею істинності (табл. 5) вирішується за допомогою таблиці покриття (табл. 7), видаленням з її рядків наборів змінних, що не очікуються. Табл. 7 після видалення наборів, які не очікуються набуде вигляду табл. 8.

Таблиця 8

Таблиця покриття функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ з видаленими наборами змінних, що не очікуються

Конституанти	$\overline{x_1}x_5$	$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}$	$x_1x_4\overline{x_5}$	$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$	$x_2x_3x_4$	$x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}$
00001	●	–	–	–	–	–
00100	–	–	–	–	–	●
00101	●	–	–	–	–	–
00111	●	–	–	–	–	–
01001	●	–	–	–	–	–
01011	●	–	–	–	–	–
01100	–	–	–	–	–	●
01101	●	–	–	–	–	–
10000	–	●	–	–	–	–
10001	–	●	–	–	–	–
10010	–	–	●	–	–	–
10110	–	–	●	–	–	–
11100	–	–	–	–	–	●
11111	–	–	–	–	●	–

З огляду табл. 8 бачимо, що зайвою є імпліканта $\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4$, яку видаляємо з виразу функції (10).

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x_1}x_5 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1x_4\overline{x_5} + x_2x_3x_4 + x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}. \tag{11}$$

Вираз (11) представляє тупикову і мінімальну ДНФ вихідної функції (8), що представлена табл. 5.

У табл. 9 подані результати мінімізації методом «симетричних карт» [19] та комбінаторним методом.

Таблиця 9

Результат мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Мінімізація методом «симетричних карт»
$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x_1}x_5 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5} + x_2x_3x_4 + x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}.$
$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x_1}x_5 + \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}x_5 + x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5} + x_2x_3x_4 + x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}.$
Мінімізація комбінаторним методом

$$\boxed{F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \overline{x_1}\,x_5 + x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4} + x_1 x_4\,\overline{x_5} + x_2 x_3 x_4 + x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}.}$$

Основну відмінність мінімальних функцій табл. 9 демонструє третя імпліканта. Для функції мінімізованої методом «симетричних карт» імпліканта – $x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_5}$ для підтримки своєї функціональності вимагає два інвертори. Для функції мінімізованої комбінаторним методом імпліканта – $x_1 x_4\,\overline{x_5}$ для підтримки своєї функціональності вимагає один інвертор. Таким чином, використовуючи, наприклад, технологію К-МОН (комплементарна структура метал-окис-напівпровідник), апаратна реалізація функції (11) буде потребувати на один інвертор менше.

Мінімізована логічна функція (11) задовольняє задану таблицю істинності (табл. 5).

Другий варіант мінімізації 5-розрядної логічної функції (9). На першому кроці виявляються набори з трьох блоків, які допускають процедури склеювання і заміщення змінних.

Перший крок – склеювання конституант і заміщення змінних.

Алгебричні перетворення представлені тільки для першої матриці.

– склеювання і заміщення змінних 1, 2 та 3 блоків:

$$\begin{aligned}
&\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 x_5 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\times \\
&\times(\overline{x_4}\,x_5 + x_4\,\overline{x_5} + x_4 x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(\overline{x_4}\,x_5 + x_4 x_5 + x_4\,\overline{x_5}) = \\
&= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(\overline{x_4}\,x_5 + x_4 x_5 + x_5 + x_4\,\overline{x_5}) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\times \\
&\times(\overline{x_4}\,x_5 + x_4 x_5 + x_5 + x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_5(\overline{x_4} + x_4) + x_5 + x_4) = \\
&= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_5,
\end{aligned}$$

– склеювання і заміщення змінних 4, 5 та 6 блоків:

$$\begin{aligned}
&\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 x_4 x_5 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\times \\
&\times(\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_4}\,x_5 + x_4 x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3(\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_4} + x_4 x_5) = \\
&= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3(\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_4}\,x_5 + \overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3(\overline{x_4}(\overline{x_5} + x_5) + \overline{x_4} + x_5) = \\
&= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3(\overline{x_4} + \overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3(\overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3 x_5,
\end{aligned}$$

$$
\left|\begin{array}{ccccc||ccccc||ccccc||ccccc||ccccc||ccccc}
0&0&0&0&1&0&0&0& &1& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&0&0&1&0& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&0&0&1&1&0&0&0&1& &0&0&0&1& &0&0&0&1& &0&0&0&1& &0&0&0&1& \\
0&0&1&0&0&0&0&1&0& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&0&1&0&1&0&0&1& &1&0&0& & &1&0&0& & &1&0&0& & &1&0&0& & &1\\
0&0&1&1&1& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&1&0&0&1& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&1&0&1&1&0&1&0& &1&0&1&0& &1&0& &0& &1&0& &0& &1&0& &0& &1\\
0&1&1&0&0&0&1&1&0& &0& &1&0& &0& &1&0& &0& &1&0& &0& &1&0& \\
0&1&1&0&1& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
0&1&1&1&0&0&1&1& &0&0&1&1& &0&0&1&1& &0&0&1&1& &0&0&1&1& &0\\
0&1&1&1&1& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & &0&1&1& & \\
1&0&0&0&0& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
1&0&0&0&1&1&0&0&0& &1&0&0&0& &1&0&0&0& &1&0&0&0& &1&0&0&0& \\
1&0&0&1&0& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
1&0&1&0&0&1&0&1& &0& & & & & & & & & & & & & & & & & &1&0&0\\
1&0&1&1&0&1&0& &1&0& & & & & & &1&1&1&0& & & & & & & & & & \\
1&1&0&1&0& & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & & \\
1&1&1&0&0&1&1&1& &0&1& &1& &0&1& &1& &0&1& &1& &0&1& &1& &0\\
1&1&1&1&0&1&1& &1&0&1& & &1&0&1& & &1&0&1& & &1&0&1& & &1&0\\
1&1&1&1&1& &1&1&1&1& &1&1&1&1& &1&1&1&1& &1&1&1& & &1&1&1&
\end{array}\right| =
$$

– склеювання змінних 7 і 8 блоків:

$$\overline{X_1} X_2 \overline{X_3}\,\overline{X_4} X_5 + \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_4 X_5 = \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_5 (\overline{X_4} + X_4) = \overline{X_1} X_2 \overline{X_3} X_5,$$

– склеювання і заміщення змінних 9, 10 та 11 блоків:

$$\begin{aligned}
&\overline{X_1} X_2 X_3 \overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_1} X_2 X_3 \overline{X_4} X_5 + \overline{X_1} X_2 X_3 X_4 \overline{X_5} = \overline{X_1} X_2 X_3 \times \\
&\times(\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4} X_5 + X_4 \overline{X_5}) = \overline{X_1} X_2 X_3 (\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4} X_5 + \overline{X_4} + X_4 \overline{X_5}) = \\
&= \overline{X_1} X_2 X_3 (\overline{X_4}\,\overline{X_5} + \overline{X_4} X_5 + \overline{X_4} + \overline{X_5}) = \overline{X_1} X_2 X_3 (\overline{X_4} (\overline{X_5} + X_5) + \overline{X_4} + \overline{X_5}) = \\
&= \overline{X_1} X_2 X_3 (\overline{X_4} + \overline{X_4} + \overline{X_5}) = \overline{X_1} X_2 X_3 (\overline{X_4} + \overline{X_5}) = \overline{X_1} X_2 X_3 \overline{X_4} + \overline{X_1} X_2 X_3 \overline{X_5},
\end{aligned}$$

– склеювання змінних 12 і 21 блоків:

$$\overline{X_1} X_2 X_3 X_4 X_5 + X_1 X_2 X_3 X_4 X_5 = X_2 X_3 X_4 X_5 (\overline{X_1} + X_1) = X_2 X_3 X_4 X_5,$$

– склеювання змінних 13 і 14 блоків:

$$x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5}+x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}x_5=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}(\overline{x_5}+x_5)=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4},$$

– склеювання і заміщення змінних 15, 16 та 17 блоків:

$$\begin{aligned}
&x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4\overline{x_5}+x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}+x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5}=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5}\times\\
&\times(\overline{x_3}x_4+x_3\overline{x_4}+x_3x_4)=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4\overline{x_5}+x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5}+\\
&+x_1\overline{x_2}x_3x_4\overline{x_5}=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5}(\overline{x_3}x_4+x_3\overline{x_4}+x_3x_4)=\\
&=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5}(x_4(\overline{x_3}+x_3)+x_4+x_3)=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5}(x_4+x_4+x_3)=\\
&=x_1\overline{x_2}\,\overline{x_5}(x_4+x_3)=x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_5}+x_1\overline{x_2}x_4\overline{x_5},
\end{aligned}$$

=

0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1	
0	0			1	0	0			1															
0		1		1																				
0		0		1	0				1	0				1	0				1	0				1
0		1	0		0		1	0		0		1	0		0		1	0						
0	1	1			0	1	1			0	1	1												
1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0	
		1	0	0			1	0	0			1	0	0			1	0	0			1	0	0
1			1	0	1			1	0	1			1	0	1			1	0	1			1	0
	1	1	1			1	1	1			1	1	1			1	1	1			1	1	1	

– склеювання і заміщення змінних 18, 19 та 20 блоків:

$$x_1 x_2 \overline{x_3} x_4 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_3 \overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x_5} = x_1 x_2 \overline{x_5} \times$$
$$\times(\overline{x_3} x_4 + x_3 \overline{x_4} + x_3 x_4) = x_1 x_2 \overline{x_5}(\overline{x_3} x_4 + x_3 x_4 + x_3 \overline{x_4}) =$$
$$= x_1 x_2 \overline{x_5}(\overline{x_3} x_4 + x_3 x_4 + x_4 + x_3 \overline{x_4}) = x_1 x_2 \overline{x_5} \times$$
$$\times(\overline{x_3} x_4 + x_3 x_4 + x_4 + x_3) = x_1 x_2 \overline{x_5}(x_4(\overline{x_3} + x_3) + x_4 + x_3) =$$
$$= x_1 x_2 \overline{x_5}(x_4 + x_4 + x_3) = x_1 x_2 \overline{x_5}(x_4 + x_3) = x_1 x_2 x_3 \overline{x_5} + x_1 x_2 x_4 \overline{x_5}.$$

Особливістю другого варіанту мінімізації є зміна початкового стану кожної конституанти логічної функції на першому кроці мінімізації.

Спроби подальшого застосування операцій алгебричного перетворення у другому варіанті мінімізації не дають результату. Отже, отримана тупикова ДНФ функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ (9).

Для отримання мінімальної ДНФ функції, що представлена вихідною таблицею істинності (табл. 5) необхідно провести дії, аналогічні першому варіанту мінімізації.

Приклад 3. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, що задана наступною таблицею істинності (табл. 10) [20].

Таблиця 10

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F	№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	F
0	0	0	0	0	0	**1**	8	1	0	1	0	1	**1**
1	0	0	1	0	1	**1**	9	1	0	1	1	0	**1**
2	0	0	1	1	1	**1**	10	1	0	1	1	1	**1**
3	0	1	0	1	1	**1**	11	1	1	0	0	0	**1**
4	0	1	1	0	0	**1**	12	1	1	1	0	0	**1**
5	0	1	1	0	1	**1**	13	1	1	1	0	1	**1**
6	0	1	1	1	1	**1**	14	1	1	1	1	0	**1**
7	1	0	0	0	0	**1**	15	1	1	1	1	1	**1**

Образне числення (без демонстрації алгебричних перетворень) комбінаторного методу мінімізації булевої функції виглядає так:

$$
Y=\left|\begin{array}{ccccc}
0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&1\\
0&0&1&1&1\\
0&1&0&1&1\\
0&1&1&0&0\\
0&1&1&0&1\\
0&1&1&1&1\\
1&0&0&0&0\\
1&0&1&0&1\\
1&0&1&1&0\\
1&0&1&1&1\\
1&1&0&0&0\\
1&1&1&0&0\\
1&1&1&0&1\\
1&1&1&1&0\\
1&1&1&1&1
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
0&0&1& &1\\
0&1&0&1&1\\
0&1&1&0& \\
0&1&1& &1\\
 & & & & \\
 &0&0&0&0\\
1&0&1& &1\\
1&0&1&1& \\
 & & & & \\
1&1&0&0&0\\
 & & & & \\
1&1&1&0& \\
 & & & & \\
1&1&1&1&
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
0&1&0&1&1\\
0&1&1&0& \\
0& &1& &1\\
 & & & & \\
 &0&0&0&0\\
1&0&1& &1\\
1&0&1&1& \\
 & & & & \\
1&1&0&0&0\\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
1&1&1& &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
0&1&0&1&1\\
 &1&1&0& \\
0& &1& &1\\
 & & & & \\
 &0&0&0&0\\
1& &1& &1\\
1& &1&1& \\
 & & & & \\
1&1& &0&0\\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
1&1&1& &
\end{array}\right|
=\left|\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
0&1& &1&1\\
 &1&1&0& \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 &0&0&0&0\\
 & &1& &1\\
1& &1&1& \\
 & & & & \\
1&1& &0&0\\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & & \\
 & & & &
\end{array}\right|
$$

У першій матриці проведено 6 процедур склеювання і заміщення змінних, у другій матриці проведено 2 процедури склеювання змінних, у третій матриці проведено 4 процедури склеювання, у четвертій матриці проведено 1 процедура склеювання і 1 процедура узагальненого склеювання – всього 14 алгебричних перетворень.

Зайві імпліканти в отриманій мінімальній логічній функції (12) відсутні.

$$
\begin{aligned}
&F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_3x_5+x_1x_3x_4+x_2x_3\overline{x}_4+\\
&+\overline{x}_1x_2x_4x_5+x_1x_2\overline{x}_4\overline{x}_5+\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5.
\end{aligned}
\qquad (12)
$$

Результат мінімізації комбінаторним методом (12) збігається з результатом мінімізації, отриманим за допомогою карти Карно [20].

Мінімізована логічна функція (12) задовольняє задану таблицю істинності (табл. 10).

Процес мінімізації функції прикладу 3 демонструє апаратну компактність комбінаторного методу.

6. Результати дослідження

Проблеми скорочення булевої функції та встановлення оцінки складності мінімізації ДНФ вивчаються з 50-х років 20-го століття. [21–25]. Характерна трудність таких задач полягає у тому, що, з однієї сторони, процедури мінімізації булевих функцій не можуть бути здійснені без перебору [22], а з іншої сторони, потужність перебору зазвичай дуже велика. Як відмічено у [23, 24], максимальне число ТДНФ логічної функції від n змінних має порядок, більший, ніж 2^{2^n}.

У процесі зазначених досліджень були вироблені алгоритми, що здійснюють строго менший перебір, ніж алгоритм перебору серед усіх ТДНФ булевої функції з вибраного класу. Математичним апаратом такого алгоритму є граф інтервалів [25].

Були описані алгоритми знаходження МДНФ для класу булевих функцій, так названого спрощеного графу інтервалів. Складність побудованих алгоритмів виявилась лінійно залежною від числа вершин-кон'юнкцій у вихідному графі.

Особливістю комбінаторного методу мінімізації є отримання мінімальної функції декількома варіантами пошуку, що зменшує перебір. Зазначена особливість є обґрунтуванням до вироблення відповідного протоколу мінімізації.

Складність алгоритму – це кількісна характеристика, що відображує споживані алгоритмом ресурси під час його виконання. Основними ресурсами, що оцінюються, є час виконання (тобто максимальна кількість операцій, необхідних алгоритму для отримання відповіді) і простір пам'яті.

Для оцінки алгоритмічної складності пошуку мінімальної функції комбінаторним методом в якості споживаних алгоритмічних ресурсів приймемо операції алгебричних перетворень, які здійснюються під час мінімізації функції. Наприклад, поглинання, заміщення або ідемподентність змінних є одна операція, але число елементарних операцій у зазначених алгебричних перетвореннях може бути різним.

Мінімізація логічної функції методом Квайна – Мак-Класкі передбачає розділення всіх наборів змінних на групи за числом одиниць у них. Операція склеювання може бути тільки у наборах з сусідніх груп, які відрізняються змінною в одному розряді. Розмістивши набори по групам, на першому етапі, проводять усі можливі склеювання змінних. На другому етапі знову розділяють всі набори змінних після склеювання на групи за числом одиниць у них та враховують координатний знак (наприклад, «~»). Проводять усі можливі склеювання другого етапу.

Отримавши тупикову ДНФ, будується таблиця покриття, стовбці якої іменовані конституантами вихідної функції, а рядки відповідають отриманим імплікантам на етапах склеювання змінних. За допомогою таблиці покриття знаходять мінімальну функцію (МДНФ).

Основними ресурсами, що витрачаються алгоритмом пошуку методом Квайна – Мак-Класкі, є алгебричні операції на етапах склеювання змінних. У зв'язку з цим оцінку алгоритмічної складності пошуку мінімальної функції методом Квайна – Мак-Класкі будемо визначати шляхом обрахунку кількості споживаних ресурсів (кількості алгебричних операцій) на етапах склеювання, поглинання та ідемподентності змінних, які здійснюються під час мінімізації функції.

Приклад 4. Мінімізувати 3-розрядну булеву функцію методом Квайна – Мак-Класкі. Вихідна функція задана наступною таблицею істинності (табл. 11) [23].

Таблиця 11

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3)$

№ з/п	x_3	x_2	x_1	F	№ з/п	x_3	x_2	x_1	F
0	0	0	0	**1**	4	1	0	0	**1**
1	0	0	1	**0**	5	1	0	1	**1**
2	0	1	0	**1**	6	1	1	0	**1**
3	0	1	1	**1**	7	1	1	1	**0**

Для мінімізації заданої функції обираємо набори змінних при яких функція отримує значення одиниці:

$$F=\{000, 010, 011, 100, 101, 110\}. \qquad (13)$$

Розбиваємо набори змінних на групи у залежності від числа одиниць у них та проводимо склеювання змінних у сусідніх групах (рис. 2).

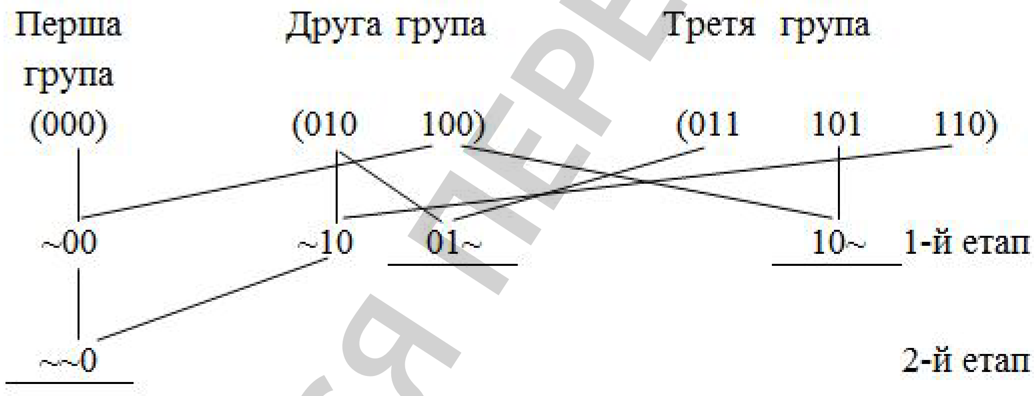


Рис. 2. Розбивка наборів змінних функції (13) на групи, за числом одиниць у них

З рис. 2 бачимо, що на двох етапах склеювання змінних витрачається 5 алгебричних перетворень. Підкреслені імпліканти утворюють *Z*-покриття:

$$Z=\begin{cases}01\sim\\10\sim\\\sim\sim 0\end{cases}.$$

Таким чином, отримана тупикова ДНФ (14) функції F (13):

$$F_{ДНФ}=\overline{x_3}x_2+x_3\overline{x_2}+\overline{x_1}. \qquad (14)$$

Для видалення надлишкових імплікант і отримання МДНФ будується таблиця покриття (табл. 12).

Таблиця 12

Таблиця покриття функції $F(x_1, x_2, x_3)$

Імпліканти	Конституанти					
	000	010	100	011	101	110
$01\sim$	–	●	–	●	–	–
$10\sim$	–	–	●	–	●	–
$\sim\sim 0$	●	●	●	–	–	●

З таблиці покриття виходить, що всі отримані імпліканти входять до ядра функції. Отже, МДНФ заданої функції має такий вигляд:

$$F_{ДНФ} = \overline{x_3}\,x_2 + x_3\,\overline{x_2} + \overline{x_1}. \qquad (15)$$

Мінімізація комбінаторним методом логічної функції (13) виглядає так:

$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & & \\ 0 & 1 & \\ & & \\ 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & & 0 \\ & & \\ 0 & 1 & \\ & & \\ 1 & 0 & \\ 1 & & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & \\ & & \\ 0 & 1 & \\ & & \\ 1 & 0 & \\ & & 0 \end{vmatrix}.$$

У першій матриці проведено 2-ві процедури склеювання змінних, у другій матриці проведено 2-ві процедури заміщення змінних, у третій матриці проведена 1-на процедура склеювання змінних – всього 5 алгебричних перетворень. Мінімізована функція комбінаторним методом співпадає з виразом (15).

Приклад 5. Мінімізувати 4-розрядну булеву функцію методом Квайна – Мак-Класкі. Вихідна функція задана наступною таблицею істинності (табл. 13) [24].

Таблиця 13

Таблиця істинності логічної функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	F	№ з/п	x_1	x_2	x_3	x_4	F
0	0	0	0	0	**0**	8	1	0	0	0	**0**
1	0	0	0	1	**0**	9	1	0	0	1	**1**
2	0	0	1	0	**0**	10	1	0	1	0	**0**
3	0	0	1	1	**1**	11	1	0	1	1	**0**
4	0	1	0	0	**1**	12	1	1	0	0	**0**
5	0	1	0	1	**1**	13	1	1	0	1	**1**
6	0	1	1	0	**0**	14	1	1	1	0	**1**
7	0	1	1	1	**1**	15	1	1	1	1	**1**

Для мінімізації заданої функції обираємо набори змінних при яких функція отримує значення одиниці:

$$F=\{0011,\ 0100,\ 0101,\ 0111,\ 1001,\ 1101,\ 1110,\ 1111\}. \qquad (16)$$

Розбиваємо набори змінних на групи у залежності від числа одиниць у них та проводимо склеювання змінних у сусідніх групах (рис. 3).

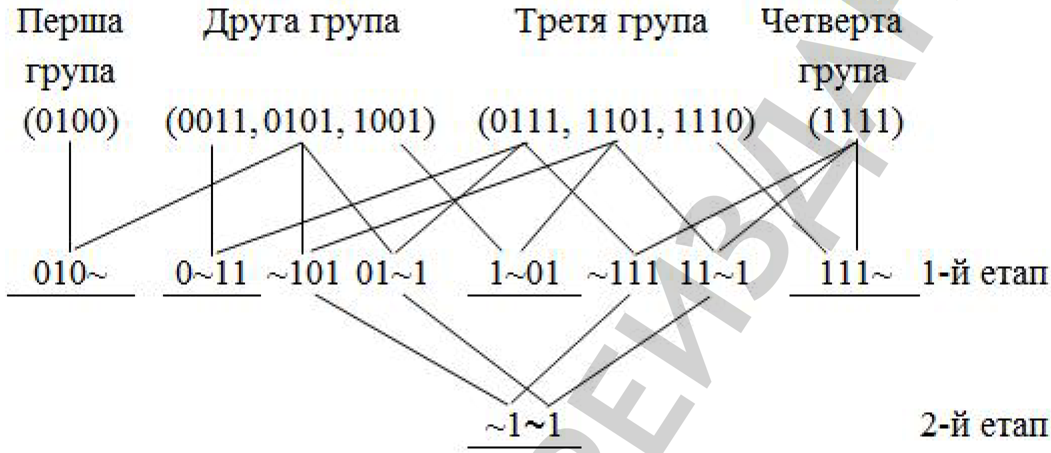


Рис. 3. Розбивка наборів змінних функції (16) на групи за числом одиниць у них

З рис. 3 бачимо, що на двох етапах склеювання змінних витрачається 11 алгебричних перетворень (10 склеювання та 1 ідемподентність змінних). Підкреслені імпліканти утворюють Z-покриття:

$$Z=\begin{cases}010\sim\\0\sim 11\\1\sim 01\\111\sim\\\sim 1\sim 1\end{cases}.$$

Таким чином, отримана тупикова ДНФ функції F (16):

$$F_{ДНФ}=\overline{x_1}x_2\overline{x_3}+\overline{x_1}x_3x_4+x_1\overline{x_3}x_4+x_1x_2x_3+x_2x_4.$$

Для видалення надлишкових імплікант і отримання МДНФ будується таблиця покриття (табл. 14).

Таблиця 14

Таблиця покриття функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

Імпліканти	Конституанти							
	0011	0100	0101	0111	1001	1101	1110	1111
$010\sim$	–	●	●	–	–	–	–	–
$0\sim11$	●	–	–	●	–	–	–	–
$1\sim01$	–	–	–	–	●	●	–	–
$111\sim$	–	–	–	–	–	–	●	●
$\sim1\sim1$	–	–	●	●	–	●	–	●

Необхідно вибрати мінімальне число рядків, які покривають усі стовбці. Розпочинається розв'язок задачі з вибору стовбців, що містять одну мітку. Таким є стовпець 0011: у розв'язок необхідно взяти імпліканту 0~11, інакше конституанта 0011 не буде покрита (не увійде до розв'язку).

З таблиці покриття 14 виходить, що імпліканта $\sim1\sim1$ є зайвою. Отже, МДНФ заданої функції (16) має вигляд (17):

$$F_{ДНФ} = \overline{x_1}x_2\overline{x_3} + \overline{x_1}x_3x_4 + x_1\overline{x_3}x_4 + x_1x_2x_3. \qquad (17)$$

Мінімізація комбінаторним методом логічної функції (16) виглядає так:

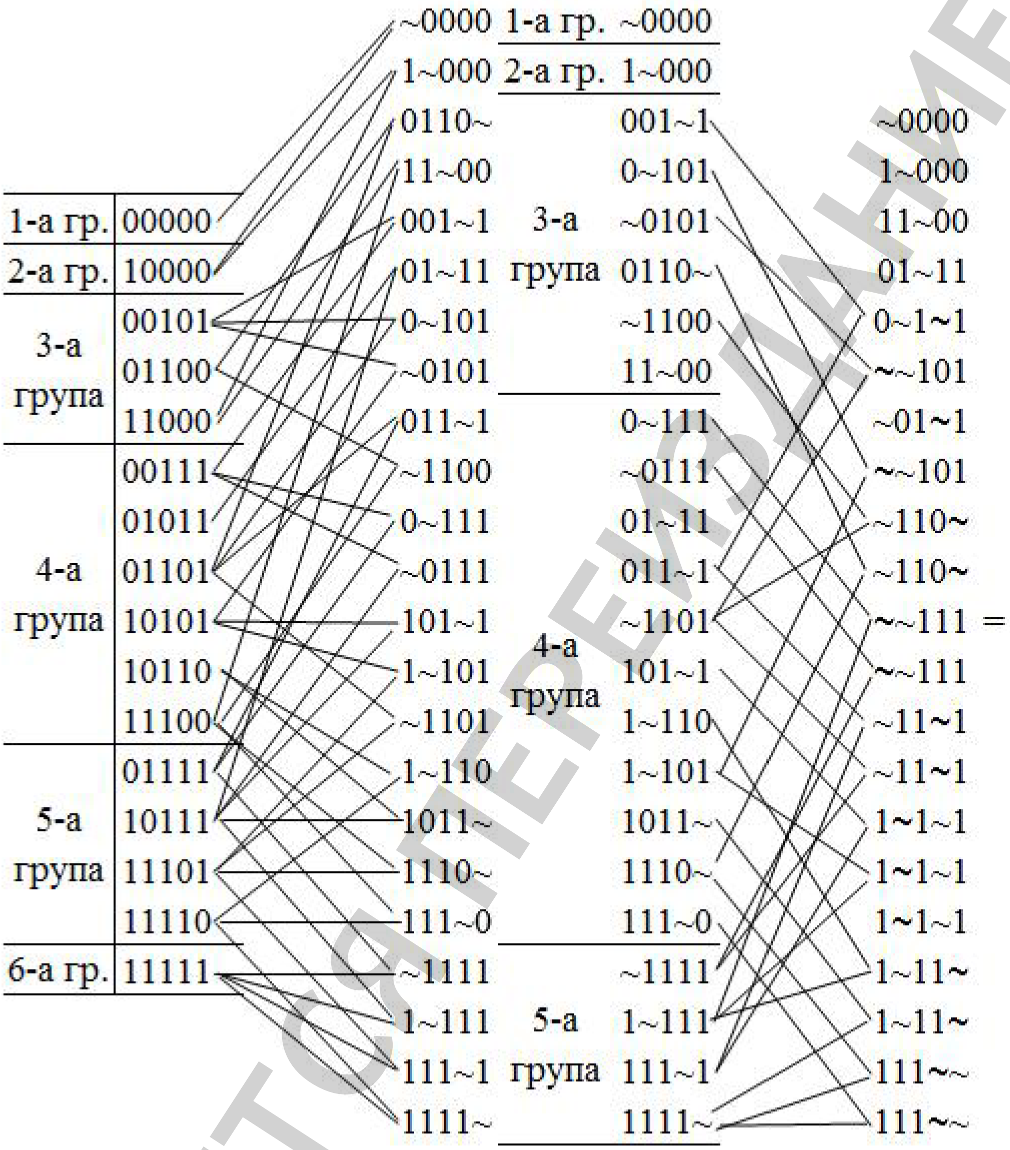
$$F = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & & 1 & 1 \\ & & & \\ 1 & & 0 & 1 \\ & & & \\ 1 & 1 & 1 & \end{vmatrix}.$$

У першій матриці проведено 4-ри процедури склеювання змінних – всього 4 алгебричних перетворення. Мінімізована функція комбінаторним методом співпадає з виразом (17).

Приклад 6. Мінімізувати 5-розрядну булеву функцію методом Квайна – Мак-Класкі. Вихідна функція задана таблицею істинності (табл. 10). Для мінімізації заданої функції обираємо набори змінних при яких функція отримує значення одиниці:

F= {00000, 00101, 00111, 01011, 01100, 01101, 01111, 10000, 10101, 10110, 10111, 11000, 11100, 11101, 11110, 11111}. (18)

Розбиваємо набори змінних на групи у залежності від числа одиниць у них та проводимо склеювання змінних у сусідніх групах (рис. 4).



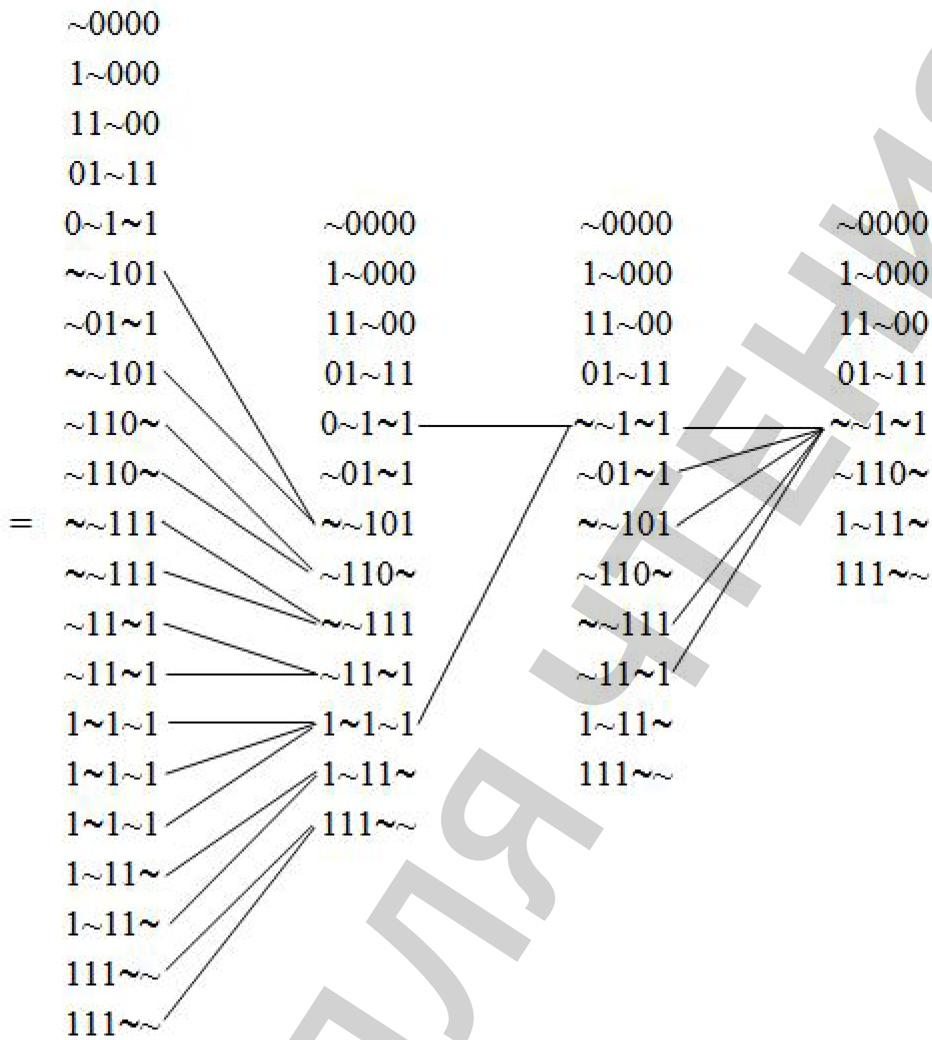


Рис. 4. Розбивка наборів змінних функції (18) на групи з наступними процедурами склеювання, поглинання, ідемподентністі імплікант

Отримана тупикова ДНФ функції F(18) має вигляд (19):

$$
\begin{aligned}
F_{ДНФ} &= \overline{x_2\, x_3\, x_4\, x_5} + x_1\,\overline{x_3\, x_4\, x_5} + x_1\, x_2\,\overline{x_4\, x_5} + \\
&+ \overline{x_1}\, x_2\, x_4\, x_5 + x_3\, x_5 + x_2\, x_3\,\overline{x_4} + x_1\, x_3\, x_4 + x_1\, x_2\, x_3.
\end{aligned}
\qquad (19)
$$

Для видалення надлишкових імплікант і отримання МДНФ будується таблиця покриття (табл. 15).

Таблиця 15

Таблиця покриття функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Конститу-анти	Імпліканти							
	~0000	1~000	11~00	01~11	~~1~1	~110~	1~11~	111~~
00000	●	–	–	–	–	–	–	–
10000	●	●	–	–	–	–	–	–
00101	–	–	–	–	●	–	–	–

01100	–	–	–	–	–	●	–	–
11000	–	●	●	–	–	–	–	–
00111	–	–	–	–	●	–	–	–
01011	–	–	–	●	–	–	–	–
01101	–	–	–	–	●	●	–	–
10101	–	–	–	–	●	–	–	–
10110	–	–	–	–	–	–	●	–
11100	–	–	●	–	–	●	–	●
01111	–	–	–	–	●	–	–	–
10111	–	–	–	–	●	–	●	–
11101	–	–	–	–	●	●	–	●
11110	–	–	–	–	–	–	●	●
11111	–	–	–	–	●	–	●	●

Необхідно вибрати мінімальне число стовбчиків, які покривають усі рядки. З таблиці покриття 15 виходить, що імпліканти $1\sim000$ і $111\sim$ є зайвими. Відповідні клітинки табл. 15 на перетині стовпця (з імплікантами $1\sim000$, $111\sim$) і рядка (з конституантою одиниці) позначені значком ● зеленого кольору. Клітинки табл. 15 на перетині стовбця з імплікантами, що входять до мінімальної функції і рядка (з конституантою одиниці) позначені значком ● синього кольору.

Отже, МДНФ заданої функції (18) має вигляд (20), що збігається з (12):

$$
\begin{aligned}
F_{ДНФ} &= \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5 + x_1 x_2 \overline{x}_4\overline{x}_5 + \overline{x}_1 x_2 x_4 x_5 + \\
&+ x_3 x_5 + x_2 x_3 \overline{x}_4 + x_1 x_3 x_4 .
\end{aligned}
\qquad (20)
$$

За результатами прикладів 4-6 проведемо обрахунок кількості споживаних алгебричних перетворень методом Квайна – Мак-Класкі, що здійснюються на етапах склеювання, поглинання та ідемподентністі змінних, під час мінімізації логічної функції. Встановимо також оцінку алгоритмічної складності пошуку мінімальної функції цим методом.

Результати обрахунку кількості алгебричних перетворень представлені у табл. 16.

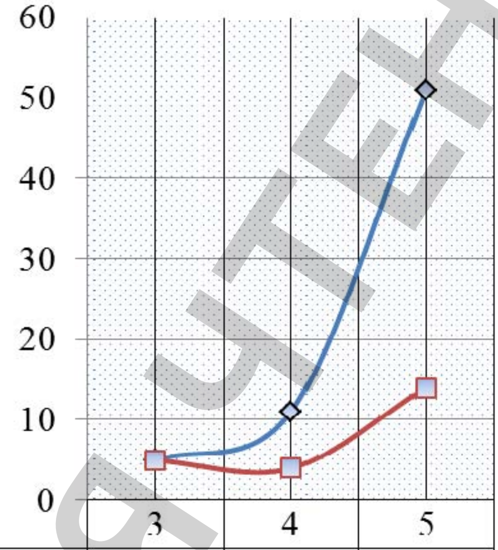
Таблиця 16

Порівняльна таблиця витрачених алгебричних перетворень для двох методів мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$

Розрядність функції	Кількість алгебричних перетворень	
	Метод Квайна – Мак-Класкі	Комбінаторний метод
3	5	5
4	11	4
5	51	14

На рис. 5 представлена динаміка зростання кількості алгебричних перетворень, які здійснюються під час мінімізації логічної функції методом Квайна – Мак-Класкі та комбінаторним методом зі збільшенням розрядності функції.

З огляду рис. 5 бачимо, що динаміка зростання кількості алгебричних перетворень, зі збільшенням розрядності логічної функції, для комбінаторного методу мінімізації є більш повільним процесом.



	3	4	5
Мстод Квайна-Мак-Класкі	5	11	51
Комбінаторний метод	5	4	14

Рис. 5. Динаміка зростання кількості алгебричних перетворень під час мінімізації функції методом Квайна – Мак-Класкі та комбінаторним методом, зі збільшенням розрядності функції

Зростання кількості алгебричних перетворень у методі Квайна – Мак-Класкі. Таким чином пошук мінімальної функції комбінаторним методом є більш ефективним, порівняно з пошуком за допомогою метода Квайна – Мак-Класкі.

Складність методу мінімізації Куайна – Мак-Класкі експоненціально зростає зі збільшенням розрядності вхідних змінних [25].

За даними, що є у нашому розпорядженні, можна у першому наближенні описати складність алгоритму пошуку комбінаторним методом лінійно залежною від числа алгебричних перетворень з оцінкою складності – O(n).

7. SWOT-аналіз результатів досліджень

Strengths. До сильної сторони комбінаторного методу можна віднести те, що об’єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції є блок-схема з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах протоколу обчислення функції і, таким чином, обійтись без допоміжних об’єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф і т. п. Рівносильні перетворення графічними образами, що за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень. Підвищена інформаційна ємність комбінаторного методу дозволяє достатньо легко проводити ручну мінімізацію 4-, 5-розрядних булевих функцій.

Це вигідніше у порівнянні з аналогами за такими чинниками:

− меншою вартістю розробки та впровадження, оскільки принцип мінімізації методу залишається у межах таблиці істинності заданої функції і не потребує інших допоміжних об'єктів;

− збільшенням продуктивності процедури ручної мінімізації для 4-, 5-розрядних функцій та збільшенням продуктивності автоматизованої мінімізації при більшому числі змінних функції, зокрема за рахунок того, що декілька варіантів пошуку дають однакову мінімальну функцію.

Weaknesses. Слабка сторона комбінаторного методу при ручній мінімізації пов'язана зі зростанням числа змінних (більше семи-восьми) логічної функції. При такому числі змінних трудомісткість обчислення ручної мінімізації зростає.

Негативні внутрішні фактори притаманні комбінаторному методу ручної мінімізації булевої функції полягають у збільшенні часу отримання мінімальної функції при зростанні числа змінних заданої функції.

Opportunities. Перспективою подальших досліджень комбінаторного методу може бути вироблення протоколу оптимального чергування алгебричних перетворень над імплікантами булевої функції, з метою подальшої оптимізації часу виконання пошукового алгоритму мінімальної функції.

Додаткові можливості, що може принести впровадження комбінаторного методу мінімізації булевої функції полягають у використанні та підтримці бібліотеки підматриць, що буде сприяти оптимізації часу отримання відповіді пошуковим алгоритмом мінімізації функції.

Threats. Протокол мінімізації булевої функції комбінаторного методу є незалежним від протоколів інших методів мінімізації, тому загроза негативної дії на об'єкт дослідження зовнішніх чинників відсутня.

До певної міри аналогом комбінаторного методу мінімізації булевої функції є метод Куайна – Мак-Класкі. На даний момент метод Куайна – Мак-Класкі кращий тим, що для нього вже створений алгоритм автоматизованого пошуку мінімальної функції.

8. Висновки

1. Встановлено, що об'єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції є комбінаторна блок-схема з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах протоколу обчислення функції і, таким чином, обійтись без допоміжних об'єктів пошуку мінімальної функції .

2. Виявлено, що таблична організація математичного апарату блок-схеми з повторенням дозволяє отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків комбінаторної системи, а, отже, і блоків таблиці істинності заданої функції. Рівносильні перетворення графічними образами, що за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень, зокрема

за допомогою бібліотеки підматриць.

3. Встановлено, що результати верифікації мінімізованої функції, отриманої комбінаторним методом, задовольняють вихідний протокол обчислення заданої функції і, отже, засвідчують оптимальне зменшення кількості змінних функції без втрати її функціональності. Оцінка складності алгоритму пошуку мінімальної функції комбінаторним методом складає O(n) і є лінійною – час виконання алгоритму зі збільшенням розрядності функції n зростає за лінійним законом.

4. Ефективність комбінаторного методу демонструється прикладами мінімізації функції, запозичених з робіт інших авторів з метою порівняння: *приклад* 1 [17], – мінімізація 4-розрядної булевої функції, *приклади* 2 [19], 3 [20] – мінімізація 5-розрядних булевих функцій. З огляду на зазначені приклади комбінаторний метод мінімізації функції дає підставу для доцільності застосування його у процедурах мінімізації логічної функції.

Встановлено, що динаміка зростання кількості алгебричних перетворень, зі збільшенням розрядності логічної функції, для комбінаторного методу мінімізації є більш повільним процесом, порівняно з динамікою зростання кількості алгебричних перетворень за методом Квайна – Мак-Класкі. У зв'язку з цим, комбінаторний метод є більш ефективним, порівняно з пошуком за допомогою метода Квайна – Мак-Класкі.

Література

1. Matviienko, M. P. Kompiuterna lohika [Text] / M. P. Matviienko. – Kyiv: TOV «Tsentr navchalnoi literatury», 2012. – 288 p.

2. Igoshin, V. I. Matematicheskaia logika i teoriia algoritmov [Text]: Handbook / V. I. Igoshin. – Moscow: Izdatel'skii tsentr «Akademiia», 2007. – 304 p.

3. Kutiura, L. Algebra logiki [Text] / L. Kutiura. – Moscow: Librokom, 2011. – 128 p.

4. Kolmogorov, A. N. Matematicheskaia logika [Text] / A. N. Kolmogorov, A. G. Dragalin. – Ed. 3. – Moscow: KomKniga, 2006. – 240 p.

5. Venn, J. I.On the diagrammatic and mechanical representation of propositions and reasonings [Text] / J. Venn // Philosophical Magazine Series 5. – 1880. – Vol. 10, No. 59. – P. 1–18. doi:10.1080/14786448008626877

6. Nelson, V. P. Digital Logic Circuit Analysis and Design [Text] / V. P. Nelson, H. Troy Nagle, B. D. Carroll, D. Irwin. – Pearson, 1995. – 842 p.

7. Manojlovic, V. Minimization of Switching Functions using Quine-McCluskey Method [Text] / V. Manojlovic // International Journal of Computer Applications. – 2013. – Vol. 82, No. 4. – P. 12–16. doi:10.5120/14103-2127

8. Rytsar, B. The Minimization Method of Boolean Functions in Polynomial Set-theoretical Format [Electronic resource] / B. Rytsar // Conference: Proc. 24th Inter. Workshop, CS@P'2015, Sept. 28–30, 2015. – Poland, Rzeszow, 2015. – Vol. 2. – P. 130–146. – Available at: \www/URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/87194

9. Rathore, T. S. Minimal Realizations of Logic Functions Using Truth Table Method with Distributed Simplification [Text] / T. S. Rathore // IETE Journal of Education. – 2014. – Vol. 55, No. 1. – P. 26–32. doi:10.1080/09747338.2014.921412

10. Rotar, D. Software for The Minimization of The Combinational Logic Functions [Text] / D. Rotar // The Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics. – 2010. – Vol. 37. – P. 95–99.

11. Bernasconi, A. Three-level logic minimization based on function regularities [Text] / A. Bernasconi, V. Ciriani, F. Luccio, L. Pagli // IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems. – 2003. – Vol. 22, No. 8. – P. 1005–1016. doi:10.1109/tcad.2003.814950

12. Zolfaghari, B. A New Case for Image Compression Using Logic Function Minimization [Text] / B. Zolfaghari, H. Sheidaeian // The International journal of Multimedia & Its Applications. – 2011. – Vol. 3, No. 2. – P. 45–62. doi:10.5121/ijma.2011.3204

13. Mohana Ranga Rao, R. An Innovative procedure to minimize Boolean function [Text] / R. Mohana Ranga Rao // International Journal of Advanced Engineering Sciences and Technologies. – 2011. – Vol. 3, No. 1. – P. 12–14.

14. Nosrati, M. Minimization of Boolean Functions Using Genetic Algorithm [Text] / M. Nosrati, R. Karimi, M. Nariri // Annals. Computer Science Series. – 2012. – Vol. 10, No. 1. – P. 73–77.

15. Nosrati, M. An Algorithm for Minimizing of Boolean Functions Based on Graph DS [Text] / M. Nosrati, M. Nariri // World Applied Programming. – 2011. – Vol. 1, No. 3. – P. 209–214.

16. Solairaju, A. Optimal Boolean Function Simplification through K-Map using Object-Oriented Algorithm [Text] / A. Solairaju, R. Periyasamy // International Journal of Computer Applications. – 2011. – Vol. 15, No. 7. – P. 28–32. doi:10.5120/1959-2621

17. Buniak, A. Elektronika ta mikroskhemotekhnika [Text] / A. Buniak. – Ternopil: Aston, 2001. – 382 p.

18. Tonchev, V. Kombinatornye konfiguratsii. Blok-shemy, kody, grafy [Text] / V. Tonchev. – Kyiv: Holovne vydavnytstvo vydavnychoho obiednannia «Vyshcha shkola», 1988. – 178 p.

19. Plehanov, A. Simmetrichnye karty kak sredstvo minimizatsii bulevyh funktsii [Electronic resource] / A. Plehanov // Geektimes. – March 8, 2016. – Available at: \www/URL: https://geektimes.ru/post/272294/

20. Sudnitson, A. Diskretnaia matematika. F.4. Minimizatsiia bulevyh funktsii [Electronic resource] / A. Sudnitson. – 2008. – Available at: \www/URL: http://ati.ttu.ee/~alsu/DM%20_MinBF_2008_lecture.pdf. – 15.07.2017.

21. Kudriavtsev, V. B. O slozhnosti algoritmov [Electronic resource] / V. B. Kudriavtsev, A. E. Andreev // Intellektual'nye sistemy. – 2006. – Vol. 10, No. 1-4. – P. 695–760. – Available at: \www/URL: http://intsys.msu.ru/magazine/archive/v10(1-4)/andreev-695-760.pdf

22. Nechiporuk, E. I. O korrektnosti obryvov v ventil'nyh i kontaktnyh shemah [Text] / E. I. Nechiporuk // Kibernetika. – 1968. – Vol. 5. – P. 40–48.

23. Redkin, N. P. O samokorrektirovanii kontaktnyh shem [Text] / N. P. Redkin // Problemy kibernetiki. – 1978. – Vol. 33. – P. 119–138.

24. Kirienko, G. I. Sintez samokorrektiruiushchihsia shem iz funktsional'nyh elementov dlia sluchaia rastushchego chisla oshibok v sheme [Text] / G. I. Kirienko // Diskretnyi analiz. – 1970. – Vol. 16. – P. 38–43.

25. Serikov, Yu. A. Algebraicheskii metod resheniia logicheskih uravnenii [Text] / Yu. A. Serikov // Izvestiia AN SSSR. Tehnicheskaia kibernetika. – 1972. – Vol. 2. – P. 114–124.

26. Zhabin, V. I. Prykladna teoriia tsyfrovykh avtomativ [Text] / V. I. Zhabin, I. A. Zhukov, I. A. Klymenko, V. V. Tkachenko. – Ed. 2. – Kyiv: Vydavnytstvo Natsionalnoho aviatsiinoho universytetu «NAU – druk», 2009. – 360 p.

27. Bitiutskii, V. P. Minimizatsiia perekliuchatel'nyh funktsii [Electronic resource]: Educational electronic text edition / V. P. Bitiutskii, S. V. Grigorieva. – Ekaterinburg: UrFU, 2012. – 22 p. – Available at: \www/URL: http://docplayer.ru/46853788-Minimizaciya-pereklyuchatelnyh-funkciy.html

28. Amerbaev, V. M. Library implementation of modular arithmetic operations, based on logic functions minimization algorithms [Electronic resource] / V. M. Amerbaev, R. A. Solovyev, D. V. Telpukhov // Izvestiya SFedU. Engineering Sciences. – 2013. – Vol. 7. – P. 221–225. – Available at: \www/URL: http://izv-tn.tti.sfedu.ru/wp-content/uploads/2013/7/40.pdf