

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ФІЛЬТРАЦІЇ РІДИНИ ЧЕРЕЗ БАГАТОШАРОВИЙ ФІЛЬТРУЮЧИЙ ЕЛЕМЕНТ

Вечерковська А. С., Поперешняк С. В.

1. Вступ

При час руху натуральних рідин (вода, нафта, газ) в природному ґрунті частки рідини переміщуються через шари ґрунту, тобто через дрібні канали, що утворилися між часткам ґрунту внаслідок нещільного прилягання один до одного. Такий рух рідин через багатошарову середу називається фільтрацією. Внаслідок надзвичайно малого поперечного перерізу отворів і малих швидкостей руху в'язкість рідини та інші емпіричні коефіцієнти в них, що враховують пористість відкладеного на стінках порового простору осаду, повинні грати при такому русі значну роль. Тому актуальною є побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини через багатошаровий фільтруючий елемент з метою оптимізації виробництва фільтрів для свердловин з поліпропіленовим покриттям в промисловості. При цьому буде врахований достатній дебіт води при встановленні в водоносний шар та збереженні якісних характеристик рідини.

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об'єктом дослідження є процес фільтрації рідини через багатошаровий фільтруючий елемент.

Фільтрація описується різного виду дослідними законами, які встановлюють зв'язок між вектором швидкості фільтрації рідини і полем тиску. Існує кілька способів математичного опису процесу кольтатації фільтра, розглянемо однокомпонентну модель течії суспензії через пористе середовище.

На основі технологічного аудиту в рамках побудови даної моделі пропонуються наступні наближення:

1. Фільтрується суспензія нерозпізнаних частинок.

2. Параметри чистого фільтра задаються всієї поровій системі: його проникність і пористість.

3. Модель враховує процеси мобілізації і захоплення частинок стінками каналу пір фільтра через швидкість фільтрації і градієнт тиску рідини.

4. Стисненням рідини і твердого тіла, а також дифузіїю домішки нехтуємо.

Для запису закону збереження компонент фільтрується суспензії, розглянемо модель середовища, що містить наступні фази (рис. 1) [1]:

1. Твердий скелет пористого середовища з пористістю m_0 .

2. Рухома рідина з об'ємною часткою порового простору S_1 .

3. Тверді частки в потоці рідини з об'ємною часткою порового простору S_2 .

4. Нерухома рідина в пористому шарі осіли частинок з об'ємною часткою порового простору S_3 .

5. Нерухомі частки, що осіли на стінках порової середовища з об'ємною часткою порового простору S_4 .

6. Швидкість частинок і швидкість несучої рідини збігаються.

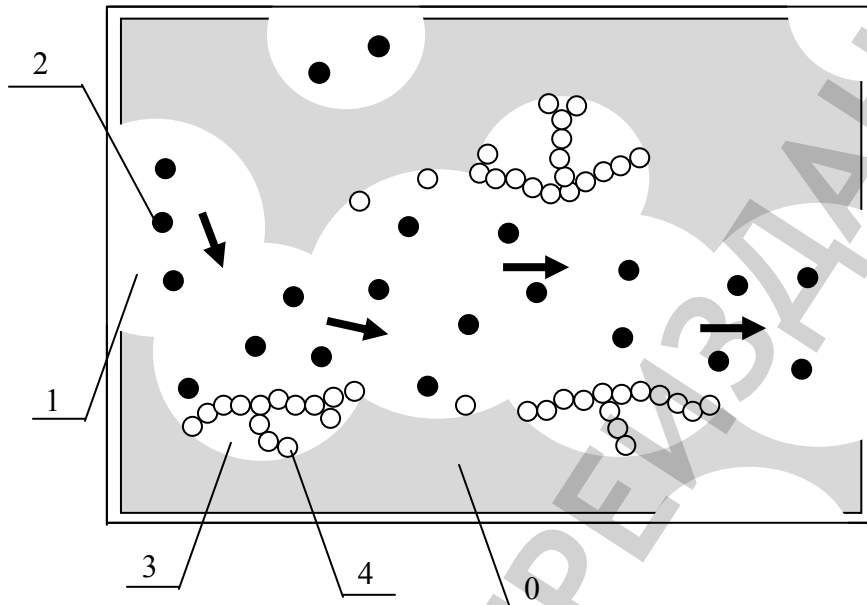


Рис. 1. Модель течії суспензії через пористе середовище:

0 – твердий скелет пористого середовища; 1 – рухома рідина; 2 – тверді частинки в потоці рідини; 3 – рідина між осілими часточками; 4 – частини, які утворюють пористий осад

За визначенням:

$$S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 1, \quad (1)$$

в рамках моделі можна записати наступні рівняння законів збереження компонент:

$$\begin{aligned} m_0 \frac{\partial S_1}{\partial t} &= \operatorname{div}((1-\varphi)\vec{U}) - J_{1,3}, \\ m_0 \frac{\partial S_2}{\partial t} &= -\operatorname{div}(\varphi\vec{U}) - J_{2,4} + J_{4,2}, \\ m_0 \frac{\partial S_3}{\partial t} &= J_{1,3}, \quad m_0 \frac{\partial S_4}{\partial t} = J_{2,4} - J_{4,2}, \end{aligned} \quad (2)$$

де $\varphi = \frac{S_2}{S_1 + S_2}$ – об'ємна частка твердої фази в потоці;

$J_{1,3}$ – об'ємна щільність потоку рідини з вільно випадає в осад;

$J_{2,4}$ – об'ємна щільність потоку кольтматації;

$J_{4,2}$ – об'ємна щільність потоку суфозії.

Для того, щоб зв'язати вільні параметри в рівняннях руху, необхідно додати рівняння зв'язку. В якості додаткових рівнянь, що описують фізичні процеси відкладення осаду на стінках капілярів пористого середовища і особливості перебігу суспензії через забруднене фільтр, можна прийняти наступні співвідношення [1]:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \frac{S_3}{S_3 + S_4} = const, \\ \bar{U} &= -\frac{k(S_3, S_4)}{\mu(S_3, S_4)} \bar{\nabla} p, \\ J_{4,2} &= (\beta_s + \beta_d |\bar{\nabla} p|) S_4, \\ J_{2,4} &= (a_s + a_d |\bar{U}|) \varphi, \\ J_{1,3} &= (J_{2,4} - J_{4,2}) \frac{S_3}{S_4}.\end{aligned}\tag{3}$$

Запропонована модель для реалізації вимагає завдання 5 емпіричних коефіцієнтів (ε , β_s , β_d , a_s , a_d) та 2 функцій (густина $k(S_3, S_4)$ і проникність $\mu(S_3, S_4)$), які можуть бути отримані з дослідних даних.

3. Мета та задачі дослідження

Метою дослідження є аналіз математичної моделі процесу фільтрації рідини в пористому середовищі.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі задачі:

1. Визначити вплив емпіричних коефіцієнтів, що враховують пористість відкладеного на стінках порового простору осаду, та лінійних функцій, що описують адсорбцію і десорбції опадів на стінках пір і функціональної залежності для проникності фільтра і в'язкості суспензії на досліджувану систему.
2. Розробити модель обчислень, яка дозволяє максимально ефективно використовувати потужності паралельних обчислювальних систем.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

Фільтрувальні елементи, відрізняючись конструктивними особливостями, містять, як правило, три обов'язкових шарів фільтруючий - для затримання механічних домішок, коалесцентний або коагулюючий шар і водовідвідних або водовідштовхувальний шар [2, 3].

За технічною суттю найбільш близьким до розглянутих вище фільтрувальних елементів є багатошаровий волокнистий фільтрувальний елемент, виконаний з волокон термопластичного полімеру, в тому числі і з поліпропілену, описаний в [4].

Фільтрувальний елемент складається з шарів, які змінюють між собою тонковолокнисті та товстиволокнисті шари. Товстиволокнисті шари виготовлені з волокон діаметром 5–10 мікрон, а товстиволокнисті шари – з волокон ді-

метром 10–30 мікрон. Товщина товстолокнистого шару може становити 12–254 мікрона, а товщина тонковолокнистого шару – 10–30 мікрон. Фільтруючим середовищем є тонковолокнисті шари, а товстолокнисті шари виконують роль прокладки між тонковолокнистими шарами.

В [4] пропонується створення недорогого багатошарового фільтрувального елемента фільтра-сепаратора, який забезпечить високу ступінь очищення газоподібних і рідких середовищ, таких як природний газ і рідке паливо. Забезпечить очищення як від механічних домішок, так і від вільної вологи, що міститься в середовищі, яке фільтрується у вигляді аерозолів [5].

Відомий багатошаровий фільтрувальний елемент для рідких і газових середовищ, виготовлений з волокон термопластичного полімеру, переважно поліпропілену, який складається з шарів, що змінюють між собою – товстолокнисті та тонковолокнисті шари. Цей елемент виконаний методом екструзії у вигляді порожнього циліндра з товстолокнистим зовнішнім шаром, причому товстолокнисті шари складаються з волокон діаметром 100–150 мікрон, а тонковолокнисті шари – з волокон діаметром 1–5 мікрон [6].

З волокон поліпропілену методом екструзії формували фільтрувальний елемент у вигляді порожнього циліндра, що складається з семи шарів [5]. Характеристика шарів приведена в табл. 1.

Таблиця 1

Характеристики пористості шарів

Товщина шару в %	Щільність шару, г/см ³	Діаметр волокна, мкм
20	0,20	100–150
15	0,40	1–5
7,5	0,20	100–150
15	0,30	1–5
7,5	0,20	100–150
15	0,25	1–5
20	0,20	100–150

Один з матеріалів характеризується нелінійною залежністю коефіцієнтів фільтрації від порового тиску, що робить модель істотно нелінійною.

Для математичного моделювання гідродинамічного впливу пористий циліндр може бути представлений як двофазне насичене пористе середовище, що складається з твердої фази скелета і рідкої фази, флюїду, який фільтрується в порах.

Якщо деформація пористого тіла до уваги береться, то пористе середовище може бути представлена тільки рівнянням фільтрації.

З робіт [7, 8] відомо, що рух в'язкої рідини описується рівнянням Нав'є-Стокса, тому для опису руху в'язкої рідини в пористому середовищі досить проінтегрувати дане рівняння в області руху. Однак, внаслідок різкої неоднорідності порового простору та відсутності інформації про конкретну будову порових каналів дана задача практично нездійсненна. Вирішення цієї задачі можливе для обмеженого набору ідеальних періодичних структур, які є наближенням ре-

ального будови певного типу пористого пласта, може служити лише для якісного опису [9] і не має користі для практичних розрахунків.

5. Методи дослідження

Для того, щоб записати рівняння для імпульсів припускають в загальному випадку таку залежність швидкості фільтрації:

$$\vec{u} = f(\nabla p, k, \mu, \phi),$$

де p – гідродинамічний тиск;

k – проникність пористого середовища;

μ – динамічна в'язкість.

Конкретний вид функції залежить від розглянутої задачі. Найбільш проста і широко використовувана модель – це модель лінійного закону Дарсі [10]. Дана модель теоретично і практично добре вивчена і передбачає лінійну зв'язок між градієнтом тиску і швидкістю фільтрації:

$$\vec{v} = \vec{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (4)$$

де \vec{v} – середня справжня швидкість рідини.

Необхідно також відзначити і інші емпіричні залежності швидкості фільтрації від градієнта тиску. У загальному випадку нелінійний закон фільтрації можна записати у вигляді [11]:

$$\nabla p = -f\left(\frac{|\vec{u}|}{|\vec{u}|}\right) \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}, \quad (5)$$

або

$$\vec{u} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|} f^{-1}(|\nabla p|), \quad (6)$$

де f^{-1} – функція обернена до f .

Закон фільтрації іноді задається в показниковому вигляді [11]:

$$\vec{u} = -\frac{\nabla p}{|\nabla p|} C |\nabla p|^n \quad (7)$$

де C – константа, яка визначена з експерименту;

n – показник режиму фільтрації [11].

Також поширений двочленний закон фільтрації:

$$-\nabla p = \frac{\mu}{k} \vec{u} + C \rho \vec{u} |\vec{u}|, \quad (8)$$

де C – експериментальна константа.

У разі фільтрації з початковим градієнтом зсуву закон Дарсі приймає наступний вигляд:

$$\vec{u} = \begin{cases} \frac{k}{\mu} (\nabla p - G \frac{\nabla p}{|\nabla p|}), & |\nabla p| > G \\ 0, & |\nabla p| < G \end{cases}$$

де G – величина граничного градієнта зсуву.

У деяких випадках коректно описати фільтрацію можна лише з використанням повномасштабної 3D гідродинамічної моделі. При такому підході інтегрування системи диференціальних рівнянь буде здійснюватися чисельними методами. Одним з найпоширеніших на даний момент чисельних методів є метод кінцевих різниць. Основна перевага даного методу полягає в його універсальності. Однак, при вирішенні зворотних задач виникають обчислювальні труднощі в його використанні. Тому для проведення оціночних розрахунків необхідні аналітичні та чисельно-аналітичні моделі, позбавлені даного недоліку. Необхідно також зауважити, що для хорошої апроксимації рішення поблизу особливостей, потрібно доробити крок, що також має вплив на оперативності розрахунку. В даному випадку також допомагає використання аналітичних моделей для асимптотичного опису рішення поблизу особливості, тоді як далеко від особливості можна використовувати чисельні методи [12].

Ефективним способом розрахунку складних моделей є застосування паралельних методів програмування, що дозволяють розбити обчислення на потоки, що виконуються на базі суперкомп'ютерів, кластерів та інших високопродуктивних обчислювальних систем.

Так як найбільш витратним за часом є етап рішення лінійної системи рівнянь, то для ефективної реалізації розподілених обчислень можна або розробляти варіанти розпаралелювання для відомих алгоритмів рішення СЛАР, або конструювати нові алгоритми, що використовують паралелізм.

Розподілені прямі вирішувачі можна застосовувати для паралельної архітектури з невеликим числом процесорів, оскільки вони вимагають частого сполучення між процесорами. Більш ефективними для розпаралелювання є ітераційні процедури через їх низьких вимог до зберігання. Однак, останнім часом прямі вирішувачі використовуються в поєднанні з ітераційним вирішувачем для розробки надійних передумов.

Ефективні розподілені ітераційні вирішувачі засновані на передумовленому методі сполучених градієнтів. Прикладами є розподілений перед умовлений

метод сполучених градієнтів (Distributed PCG, DPCG) і розподілений метод сполучених градієнтів з передумовою по Якобі (Distributed JCG, DJCG).

6. Результати дослідження

Рішення кінцево-елементних завдань з використанням паралельних комп'ютерів з розподіленою пам'яттю полягає в наступному [13]. Спочатку готуються вхідні дані для окремих процесорів, потім відбувається паралельна генерація звичайно-елементної сітки, далі паралельне ансамблювання матриць і векторів невязок, потім паралельне рішення систем рівнянь і в кінцевому підсумку – паралельна обробка результатів рішення.

Рішення кінцево-елементної системи можливо наступним чином:

1. Уявімо задану сітку за допомогою матриці, елементи якої будуть відповідати вузлам сітки.
2. Далі розіб'ємо цю матрицю на стрічки за кількістю розрахованих вузлів, передавши їм відповідні ділянки матриці (рис. 2).

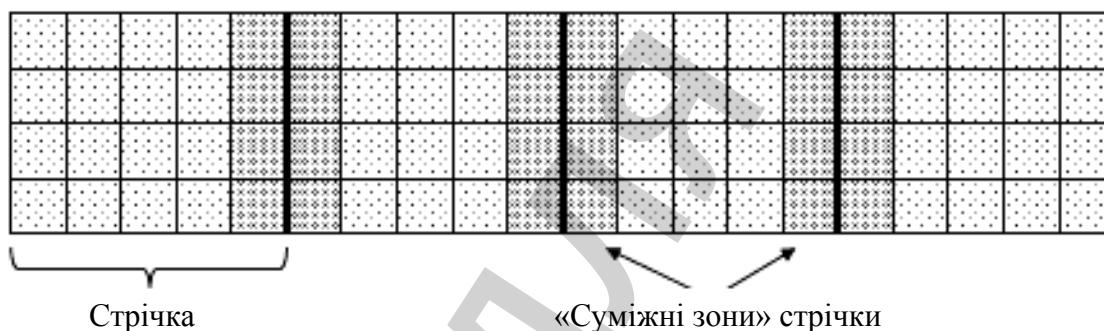


Рис. 2. Матричне представлення сітки

3. Початкове значення функції тиску в кожному осередку задається початковими умовами завдання.

4. Обчислювальні вузли пересилають сусідам відповідні «суміжні зони» своїх стрічок.

5. Для кожної стрічки розраховується значення всіх її елементів в момент часу t_k з використанням їх значень на момент часу t_{k-1} , граничних умов, а також значень елементів з отриманих суміжних зон сусідніх стрічок (рис. 3).

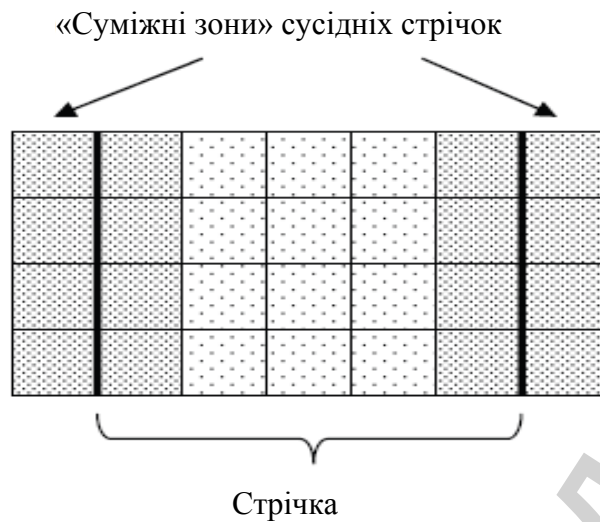


Рис. 3. Елементи, які використовуються розрахунковим вузлом

6. Обчислення (пункти 4, 5) тривають до тих пір, поки система не досягне рівноваги.

7. SWOT-аналіз результатів дослідження

Strengths. Запропонована модель обчислень дозволяє максимально ефективно використовувати потужності паралельних обчислювальних систем, мінімізуючи передачу даних між їх вузлами за рахунок пересилання тільки суміжних зон, а також час простою окремих вузлів завдяки симетричному розподілу навантаження [14, 15].

Примітка 1. У разі рівномірної сітки значення елемента можна обчислювати як середнє арифметичне сусідніх елементів.

Примітка 2. У разі квазірівномірної сітки значення елемента можна обчислювати як середнє арифметичне сусідніх елементів з поправкою на спеціальним чином введені вагові коефіцієнти.

Weaknesses. Дана математична модель процесу фільтрації рідини через багат шаровий фільтруючий елемент вимагає наявності високоточних вимірювальних приладів та кваліфікованих спеціалістів, внаслідок чого збільшується безпосередньо вартість виробництва еталонних фільтрувальних елементів для різних типів рідини.

Opportunities. Запропонована модель дасть змогу автоматизувати виробництво фільтрувальних елементів з метою оптимізації кількості шарів за їх структурою та об'ємом для досягнення певних визначених властивостей фільтру, як то брудноємність, перепади тиску, особливості фільтрації, продуктивність, враховуючи особливості суспензії. Перспективним напрямком подальших досліджень є поєднання математичної моделі фільтрації рідини через багат шаровий фільтруючий елемент з методом оптимізації процесу перфорації обсадних труб шляхом визначення поєднання параметрів циклу з прив'язкою до координатних верстатів. Це забезпечить оптимальне розташування отворів та визначення їх розмі-

рів з урахуванням формування фільтрувальних шарів визначеної щільності та товщини на перфоровану трубу, а також достатній дебіт рідини доброї якості.

Threats. Необхідність в такій моделі обумовлена тим, що на виробництві традиційно використовуються методики і програми, які засновані на практично сформованому підході, що, як правило, містять сім фільтрувальних шарів з усередненим значенням товщини фільтру [5]. На даний час на підприємствах України не використовується автоматичне виробництво багатошарових фільтрувальних елементів. Впровадження даної моделі на підприємствах вимагає додаткових витрат на переобладнання та розширення матеріальної бази виробництва, а також необхідні лабораторні дослідження експериментальних зразків фільтруючих елементів з заданою щільністю та товщиною шару.

8. Висновки

1. Визначено, що емпіричні коефіцієнти (ϵ , β_s , β_d , a_s , a_d) та функції густини $k(S_3, S_4)$ і проникності $\mu(S_3, S_4)$, що враховують пористість відкладеного на стінках порового простору осаду, а також лінійні функції, що описують адсорбцію і десорбцію опадів на стінках пір і функціональної залежності для проникності фільтра і в'язкості суспензії, мають суттєвий вплив на дослідження системи і можуть бути отримані з експериментально-дослідних даних.

2. Запропоновано модель обчислень, яка дозволяє максимально ефективно використовувати потужності паралельних обчислювальних систем, мінімізуючи передачу даних між їх вузлами за рахунок пересилання тільки суміжних зон, а також час простою окремих вузлів завдяки симетричному розподілу навантаження.

Література

1. Parmakli, I. I. Rasprostraneniye volny zagriazneniia pri fil'tratsii suspensii v poristoї srede [Text] / I. I. Parmakli, S. A. Poslavskii // Materialy mezhdunarodnoi konferentsii «Sovremennye problemy matematiki i eio prilozheniia v estestvennyh naukah i informatsionnyh tehnologiiiah». – Kharkiv, 2012. – P. 84.

2. Tieffilterpatrone und methode und vorrichtung zu deren herstellung [Electronic resource]: Patent DE 69331102 T2 / Szczepanski C., Aune M., Schneider J.; assignee: Osmonics Inc. – Appl. No. DE1993631102; Filed August 19, 1993; Publ. August 22, 2002. – Available at: <http://www.google.com.pg/patents/DE69331102T2>

3. Koaleszenzelement [Electronic resource]: Patent DE 69723714 D1 / Whitney A., Williamson M., Clendenning A., Hibbard R., Griffin M.; assignee: Pall Corp. – Appl. No. DE1997623714; Filed September 30, 1997; Publ. August 28, 2003. – Available at: <http://www.google.com.pg/patents/DE69331102T2>

4. Construction of filter (versions) and method of filtration [Electronic resource]: Patent RU2182509C2 / Calbau B., Dadri D. J.; assignee: Donaldson Company, Inc. – Appl. No. RU2000109355A; Filed September 9, 1997; Publ. May 20, 2002. – Available at: <https://patents.google.com/patent/RU2182509C2/en>

5. Fil'troval'nyi element dlia zhidkih i gazovyh sred [Text]: Patent

RU 2326716; MPK VOID 39/16 (2006.01) / Troian D. A.; assignee: Scientific and Productive Firm «Rubicon», Private Enterprise «Unifilter». – Appl. No. 2006124622/15; Filed January 20, 2008; Publ. June 20, 2008, Bull. No. 17. – 5 p.

6. Vecherkovskaya, A. Comparative analysis of mathematical models forming filter elements [Text] / A. Vecherkovskaya, S. Popereshnyak // 2017 XIIIth International Conference on Perspective Technologies and Methods in MEMS Design (MEMSTECH). – IEEE, 2017. doi:[10.1109/memstech.2017.7937545](https://doi.org/10.1109/memstech.2017.7937545)

7. Basniev, K. S. Neftegazovaia gidromekhanika [Text]: Handbook / K. S. Basniev, N. M. Dmitriev, G. D. Rozenberg. – Moscow-Izhevsk: Institute for Computer Research, 2005. – 544 p.

8. Selivanov, V. V. Mehanika razrusheniia deformiruemogo tela [Text]: Handbook / V. V. Selivanov // Prikladnaia mehanika sploshnyh sred. – Moscow: MSTU n. a. N. E. Bauman, 1999. – Vol. 2. – 420 p.

9. Hasanov, M. M. Opredelenie optimal'nogo perioda otrabotki nagnetatel'noi skvazhiny na neft' [Text] / M. M. Hasanov, V. A. Krasnov, V. A. Korotovskii // Nauchno-tehnicheskii Vestnik OAO «NK «Ros-neft». – 2007. – No. 5. – P. 19–22.

10. Darcy, H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon [Text] / H. Darcy. – Paris, 1856. – 647 p.

11. Charnyi, I. A. Podzemnaia gidrogazodinamika [Text] / I. A. Charnyi. – Moscow-Izhevsk: SIC «Regular and chaotic dynamics», Institute for Computer Research, 2006. – 436 p.

12. Andrianov, I. V. Asimptoticheskaia matematika i sinergetika: put' k tselostnoi prostote [Text] / I. V. Andrianov, R. G. Barantsev, L. I. Manevich. – Moscow: Editorial URSS, 2004. – 304 p.

13. Wriggers, P. Nonlinear Finite Element Methods [Text] / P. Wriggers. – Springer Berlin Heidelberg, 2008. – 560 p. doi:[10.1007/978-3-540-71001-1](https://doi.org/10.1007/978-3-540-71001-1)

14. Sementsov, H. N. Development of informative support for automatic antisure protection system and regulation of gas pumping plant [Text] / H. N. Sementsov, L. I. Davydenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2014. – Vol. 4, No. 11 (70). – P. 20–24. doi:[10.15587/1729-4061.2014.26311](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2014.26311)

15. Vambol, S. Assessment of improvement of ecological safety of power plants by arranging the system of pollutant neutralization [Text] / S. Vambol, V. Vambol, O. Kondratenko, Y. Suchikova, O. Hurenko // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2017. – Vol. 3, No. 10 (87). – P. 63–73. doi:[10.15587/1729-4061.2017.102314](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2017.102314)