УДК 519.853.33
DOI: 10.15587/2312-8372.2017.118338

АНАЛИЗ И РАЗРАБОТКА КОМПРОМИССНЫХ РЕШЕНИЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ТРАНСПОРТНЫХ ЗАДАЧ

Раскин Л. Г., Серая О. В., Парфенюк Ю. Л.

1. Введение

В практике планирования и организации транспортировок грузов традиционно используются две разные математические модели:

– транспортная задача по критерию стоимости (при этом минимизируется средняя суммарная стоимость перевозок);

– транспортная задача по критерию времени (при этом минимизируется максимальная из продолжительностей перевозок).

Эти задачи альтернативны в том смысле, что их оптимальные планы, как правило, не совпадают (кратчайший по времени маршрут не обязательно самый дешевый). Технологии решения этих задач хорошо отработаны [1–3] и конструктивно учитывают разную специфику и особенности постановок каждой из них. По этой причине они принципиально различны и их объединение в единую вычислительную процедуру очень проблематично. Вместе с тем при решении практических задач транспортной логистики возникает потребность в решении компромиссных задач, например, таких:

а) найти план перевозок, минимизирующий среднюю суммарную стоимость перевозок, при условии, что наибольшая продолжительность из них не превосходит заданную;

б) найти план транспортировок, минимизирующий максимальную из продолжительностей перевозок, при условии, что их средняя суммарная стоимость не превосходит заданную.

Отметим, что при решении практических задач планирования транспортировок целесообразно учитывать еще один критерий – вероятность успешной реализации плана транспортировок по совокупности маршрутов от поставщиков к потребителям, которые определяются выбранным планом. Разработка метода решения этой задачи представляет теоретический и практический интерес.

2. Объект исследования и его технологический аудит

Объектом исследования является многокритериальная транспортная задача линейного программирования.

Одновременный учет нескольких критериев оптимальных решений – проблемная задача. Дело в том, что оптимальные решения по разным критериям, как правило, не совпадают. Это обстоятельство мотивирует отыскание компромиссных вариантов решений многокритериальной задачи. В связи с этим, предмет исследования – метод построения компромиссного решения.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – разработка технологии отыскания компромиссных решений транспортных задач линейного программирования по критериям: средняя суммарная стоимость, вероятность реализации плана транспортировок, максимальная продолжительность транспортировок.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

1. Проанализировать общие принципы достижения компромисса для совокупности критериев и выбор рационального.
2. Разработка вычислительной процедуры построения компромиссного решения.

4. Исследование существующих решений проблемы

Известны и на практике используются несколько разных подходов к решению многокритериальных задач. Один из наиболее употребляемых – формирование Парето-оптимального множества решений [4–8]. Пусть $X_j,\ j=1,2,..,n$ – множество возможных решений задачи, и $F_i,\ i=1,2,..,m$ – набор критериев оценки качества решения. Введем понятие доминирующего решения. Решение X_k является доминирующим, если:

$$F_i(X_k) \geq F_i(X_s),\ s=1,2,..,n, \quad s \neq k, \quad i=1,2,..,m,$$

причем для каждого i хотя бы одно из этих неравенств выполняется строго. Парето-оптимальным множетвом называется подмножество множества всех решений $X_1, X_2,.., X_n$, такое, что ни один из его элементов не является доминирующим. Недостатки этого похода очевидны. Во-первых, отсутствует конструктивный способ формирования Парето-множества (кроме перебора всех решений). Во-вторых, не ясно, как из полученного множества недоминируемых решений выбирать наилучшее.

Другой часто используемый прием – скаляризация [9–11]. Простейший способ реализации основной идеи – аддитивная свертка. При этом для совокупности критериев $F_1, F_2,.., F_m$ формируется её скалярное отображение по формуле:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(X), \quad \alpha_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Иной способ – свертка с использованием «идеальной точки» [11]. В этом случае для каждого критерия F_i выбирается наилучшее его значение $F_i^{(0)}$, и тогда уровень качества конкретного решения X_j оценивается числом:

$$L_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \left[F_i(X_j) - F_i^{(0)} \right]^2 .$$

Общий недостаток этого подхода – произвол при выборе числовых значений весовых коэффициентов $\alpha_i, i = 1,2,..,m.$

Наконец, при решении многокритериальных задач часто используется так называемый метод уступок [12, 13]. При этом из множества критериев выбирается основной критерий, остальные определяются как дополнительные. Далее задачи решаются по основному критерию и затем для полученного решения вычисляются значения по всем дополнительным критериям. Если эти значения устраивают лицо, принимающее решение, то решение задачи закончено. В противном случае делается уступка: отыскивается новое решение, которое будет хуже предыдущего по основному критерию, но несколько лучше по дополнительным. Процедура продолжается до тех пор, пока не будет получено компромиссное решение, удовлетворяющее по всем критериям. Достоинство этого подхода: простота, интерактивность и возможность управления моментом останова. Недостаток – отсутствует общий метод, описывающий процедуру перехода от имеющегося решения к альтернативному. Вместе с тем, если в соответствии с особенностями и характером задачи этот переход легко реализуем, то предложенный метод целесообразно использовать.

5. Методы исследования

Пусть имеется m центров – поставщиков груза и n центров его потребления. При этом заданы:

a_i – объем груза, который нужно перевезти от i-го поставщика;

b_j – объем груза, который нужно привезти к j-му потребителю;

c_{ij} – средняя стоимость перевозки единицы груза от i-го поставщика к j-му потребителю;

p_{ij} – вероятность успешной реализации перевозки груза от i-го поставщика к j-му потребителю;

t_{ij} – продолжительность соответствующей транспортировки.

Введем набор:

$$X = \left(x_{ij} \right),$$

где x_{ij} – объем груза, планируемого для перевозки от i-го поставщика к j-му потребителю, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Сформулируем критерии эффективности плана транспортировок X:

$$L(X) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}, \tag{1}$$

$$T(X) = \max_{i,j}\left\{t_{ij} \cdot \delta(x_{ij})\right\}, \tag{2}$$

$$P = \prod_{i=1}^{m}\prod_{j=1}^{n} P_{ij}\delta\left(x_{ij}\right), \tag{3}$$

где $\delta\left(x_{ij}\right) = \begin{cases} 0, \text{ если } x_{ij} = 0, \\ 1, \text{ если } x_{ij} > 0. \end{cases}$

Искомый план транспортировок должен удовлетворять ограничениям:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i,\ i = 1,2,...,m, \tag{4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,\ j = 1,2,...,n, \tag{5}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = 1,2,...,m,\ j = 1,2,...,n. \tag{6}$$

При этом предполагается, что выполняется условие баланса $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, и кроме того, продолжительность транспортировки от i-го поставщика к j-му потребителю не зависит от объема перевозки x_{ij}, $i = 1,2,...,m$, $j = 1,2,...,n$.

Поставим задачу разработки метода отыскания плана транспортировок $X = \left(x_{ij}\right)$, удовлетворяющего ограничениям (4)–(6) и компромиссно оптимизирующего критерии (1)–(3).

6. Результаты исследования

Рассмотрим вначале двухкритериальную задачу по критериям (1), (3), используя следующую итерационную процедуру.

Итерация 1. С использованием стандартных методов решается транспортная задача по критерию стоимости: найти план $X = \left(x_{ij}\right)$, минимизирующий (1), удовлетворяющий ограничениям (4)–(6).

Пусть $X^{(1)} = \left(x_{ij}^{(1)}\right)$ – решение задачи. С использованием этого плана найдем ненулевой набор $\left\{p_{ij}\delta_{ij}(x_{ij}{}^{(1)})\right\}$. При этом будут выделены только те элементы матрицы $P = \left(p_{ij}\right)$, которым соответствуют ненулевые поставки плана $X^{(1)}$. Найдем теперь пару индексов:

$$\left(i_1, j_1\right) = \arg\min\left\{p_{ij}\delta\left(x_{ij}^{(1)}\right)\right\}. \tag{7}$$

Ясно, что маршрут от поставщика i_1 к потребителю j_1 является наименее надежным из маршрутов плана $X^{(1)}$. Назовем его критическим.

Теперь модифицируем исходные матрицы C и P, следующим образом:

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} c_{ij}, \text{если } p_{ij} > p_{i_1 j_1}, \\ M, \text{если } p_{ij} \le p_{i_1 j_1}; \end{cases} \tag{8}$$

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p_{ij}, \text{если } p_{ij} > p_{i_1 j_1}, \\ 0, \text{если } p_{ij} \le p_{i_1 j_1}. \end{cases} \tag{9}$$

Операции (8) и (9) исключают возможность использования маршрутов, надежность которых хуже критической. Итерация 1 завершена. При этом выполнен первый этап процедуры уступки.

Итерация 2. С использованием полученной матрицы $C^{(1)} = (c_{ij}^{(1)})$ вновь решим транспортную задачу (1), (4)–(6). Пусть $X^{(2)} = (x_{ij}^{(2)})$ – решение этой задачи. Понятно, что план $X^{(2)}$ будет не лучше плана $X^{(1)}$ по критерию (1), но заведомо лучше этого плана по критерию (3). Таким образом, уступка по критерию (1) в пользу критерия (3) реализована.

Далее вновь выделим набор $\left\{ p_{ij}\delta(x_{ij}^{(2)}) \right\}$, найдем $(i_2, j_2) = \arg\min \left\{ p_{ij}\delta(x_{ij}^{(2)}) \right\}$ и модифицируем матрицы $C^{(1)},\ P^{(1)}$:

$$c_{ij}^{(2)} = \begin{cases} c_{ij}^{(1)}, \text{ если } p_{ij}^{(1)} > p_{i_2 j_2}^{(1)}, \\ M, \text{ если } p_{ij}^{(1)} \le p_{i_2 j_2}^{(1)}; \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(2)} = \begin{cases} p_{ij}^{(1)}, \text{ если } p_{ij}^{(1)} > p_{i_2 j_2}^{(1)}, \\ 0, \text{ если } p_{ij}^{(1)} \le p_{i_2 j_2}^{(1)}. \end{cases}$$

Итерация 2 завершена.

Проведение каждой итерации сокращает число возможных маршрутов. Решение задачи продолжается до тех, пока очередные решения задачи (1), (4)–(6) дают допустимый план.

Рассмотрим пример. Для системы из трех производителей и четырех потребителей с числовыми характеристиками:

$$a_1 = 10,\ a_2 = 30,\ a_3 = 20,$$
$$b_1 = 18,\ b_2 = 8,\ b_3 = 12,\ b_4 = 22,$$

введем матрицы стоимостей C и вероятностей P:

$$C^{(0)}=\begin{vmatrix}4 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 10 & 3 & 5\\ 2 & 6 & 5 & 4\end{vmatrix},\ P^{(0)}=\begin{vmatrix}0.25 & 0.9 & 0.75 & 0.8\\ 0.5 & 0.45 & 0.2 & 0.8\\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4\end{vmatrix}.$$

Итерация 1. Решение задачи (1), (4)–(6) дает план перевозок:

$$X^{(1)}=\begin{vmatrix}0 & 8 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 12 & 18\\ 18 & 0 & 0 & 2\end{vmatrix}.$$

Значения критериев (1) и (3) для плана $X^{(1)}$ равны:

$$L\left(X^{(1)}\right)=244;\ P\left(X^{(1)}\right)=0.0138.$$

Получим ненулевой набор вероятностей:

$$\left\{p_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\right\}=\{0.9;0.8;0.2;0.8;0.3;0.4\}.$$

При этом $P_{min}=0.2=P_{23}$. Модификация исходных матриц C и P в соответствии с (8), (9) дает:

$$C^{(1)}=\begin{vmatrix}4 & 7 & 8 & 9\\ 7 & 10 & M & 5\\ 2 & 6 & 5 & 4\end{vmatrix},\ P^{(1)}=\begin{vmatrix}0.25 & 0.9 & 0.75 & 0.8\\ 0.5 & 0.45 & 0 & 0.8\\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4\end{vmatrix}.$$

Итерация 1 закончена.

Итерация 2. Действуя аналогично предыдущему, получаем план:

$$X_2=\begin{vmatrix}8 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 8 & 0 & 22\\ 10 & 0 & 10 & 0\end{vmatrix}.$$

Значение критериев (1) и (3) для плана $X^{(2)}$ равны:

$$L\left(X^{(2)}\right)=308;\ P\left(X^{(2)}\right)=0.0144.$$

При этом $L\left(X^{(2)}\right) > L\left(X^{(1)}\right),\ P\left(X^{(2)}\right) > P\left(X^{(1)}\right)$. Ненулевой набор вероятностей, соответствующий $X^{(2)}$, имеет вид:

$$\left\{p_{ij}\delta(x_{ij}^{(2)})\right\} = \{0.25; 0.7; 0.45; 0.8; 0.3; 0.8\},$$

откуда $P_{min} = 0.25$. Модификация матриц $C^{(1)}$ *и* $P^{(1)}$ дает:

$$C^{(2)} = \begin{vmatrix} M & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 10 & M & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix},\ P^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 0.9 & 0.75 & 0.8 \\ 0.5 & 0.45 & 0 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4 \end{vmatrix}.$$

Итерация 2 завершена.

Все расчеты на последующих итерациях выполняются аналогично предыдущему, приведем их результаты без пояснений.

Итерация 3.

$$X^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 0 \\ 10 & 0 & 0 & 20 \\ 8 & 0 & 10 & 2 \end{vmatrix},$$

$$L\left(X^{(3)}\right) = 316;\ P\left(X^{(3)}\right) = 0.0324,$$

$$L\left(X^{(3)}\right) > L\left(X^{(2)}\right);\ \ P\left(X^{(3)}\right) > P\left(X^{(2)}\right),$$

$$\left\{p_{ij}\delta(x_{ij}^{(3)})\right\} = \{0.9; 0.75; 0.5; 0.8; 0.3; 0.8\},\ P_{min} = 0.3,$$

$$C^{(3)} = \begin{vmatrix} M & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 10 & M & 5 \\ M & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix},\ P^{(3)} = \begin{vmatrix} 0 & 0.9 & 0.75 & 0.8 \\ 0.5 & 0.45 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 0.8 & 0.4 \end{vmatrix}.$$

Итерация 4.

$$X^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix},$$

$$L\left(X^{(4)}\right) = 348;\ P\left(X^{(4)}\right) = 0.0864,$$

$$L\left(X^{(4)}\right) > L\left(X^{(3)}\right);\ \ P\left(X^{(4)}\right) > P\left(X^{(3)}\right),$$

$$\left\{p_{ij}\delta(x_{ij}^{(4)})\right\} = \{0.9; 0.75; 0.5; 0.8; 0.8; 0.4\},$$

$$P_{min} = 0.4,$$

$$C^{(4)} = \begin{vmatrix} M & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 10 & M & 5 \\ M & 6 & 5 & M \end{vmatrix}, \; P^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 0.9 & 0.75 & 0.8 \\ 0.5 & 0.45 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 0.8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Итерация 5.

$$X^{(4)} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 10 \\ 18 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L\left(X^{(5)}\right) = 384; P\left(X^{(5)}\right) = 0.1792,$$

$$L\left(X^{(5)}\right) > L\left(X^{(4)}\right); \; P\left(X^{(5)}\right) > P\left(X^{(4)}\right),$$

$$\left\{ p_{ij}\delta(x_{ij}^{(5)}) \right\} = \left\{ 0.8; 0.5; 0.8; 0.7; 0.8 \right\}, \; P_{min} = 0.5,$$

$$C^{(5)} = \begin{vmatrix} M & 7 & 8 & 9 \\ M & 10 & M & 5 \\ M & 6 & 5 & M \end{vmatrix}, \; P^{(5)} = \begin{vmatrix} 0 & 0.9 & 0.75 & 0.8 \\ 0 & 0.45 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0.7 & 0.8 & 0 \end{vmatrix}.$$

Дальнейшее решение задачи невозможно, так как заблокированы все маршруты к первому потребителю.

Совместный анализ всех полученных результатов решения задачи позволяет сделать следующие выводы.

1. Реализованная итерационная процедура последовательных уступок обеспечила получение набора планов, ни один из которых не является мажорирующим, т. е. ни для какой из пар $\left(L\left(X^{(s)}\right), P\left(X^{(s)}\right)\right)$, $\left(L\left(X^{(r)}\right), P\left(X^{(r)}\right)\right)$ не выполняются одновременно неравенства $\left(L\left(X^{(s)}\right) < L\left(X^{(r)}\right)\right)$, $\left(P\left(X^{(s)}\right) > P\left(X^{(r)}\right)\right)$.

2. Полученные результаты дают возможность выбрать компромиссное решение задачи. Пусть критерий (1) выбран, как основной, и его нужно минимизировать, а на значение критерия (3) наложено ограничение (например, $P(x) \geq P_{доп} = 0.05$. Тогда план $X^{(4)}$ является компромиссным, так как этот план минимизирует (1), удовлетворяя ограничению $\left(P\left(X^{(4)}\right) = 0.084 > 0.05\right)$.

Отметим теперь, что сформулированная многокритериальная транспортная задача может быть решена аналогичным образом в другом случае, когда основным критерием является надежность реализации плана перевозок, а средняя суммарная стоимость не должна превышать заданный порог. При этом в качестве начального плана перевозок может быть выбран результирующий план $X^{(5)}$ предыдущей задачи, для которого была достигнута максимальная вероятность его реализации.

Итерация 1. Итак начальный план имеет вид:

$$X^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 0 & 10 \\ 18 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 8 & 12 & 0 \end{vmatrix},$$

$$L\left(X^{(1)}\right) = 384;\ P\left(X^{(1)}\right) = 0.1792.$$

Найдем ненулевой набор $\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\right\}$ и определим пару индексов $\left(i_1, j_1\right) = arg\max_{i,j}\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\right\}$.

Соответствующий маршрут от поставщика i_1 к потребителю j_1 будет самым дорогим:

$$\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\right\} = \{9; 7; 5; 6; 5\},\ c_{ij\,max} = c_{14} = 9.$$

Операцию модификации матриц C и P выполним следующим образом:

$$c_{ij}^{(1)} = \begin{cases} c_{ij}, если\ c_{ij} < c_{14}, \\ M, если\ c_{ij} \ge c_{14}; \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p_{ij}, если\ c_{ij} < c_{14}, \\ 0, если\ c_{ij} \ge c_{14}; \end{cases}$$

Тогда

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} 4 & 7 & 8 & M \\ 7 & M & 3 & 5 \\ 2 & 6 & 5 & 4 \end{vmatrix},\ P_{ij}^{(1)} = \begin{vmatrix} 0.25 & 0.9 & 0.75 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4 \end{vmatrix}.$$

Итерация 1 завершена.

Итерация 2. Используя метод максимального элемента матрицы $P^{(1)} = \left(p_{ij}^{(1)}\right)$, получим план:

$$X^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 2 & 0 \\ 18 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{vmatrix}.$$

Значения критериев (1) и (3) для плана $X^{(2)}$ равны:

$$L\left(X^{(2)}\right)=384;\ \ P\left(X^{(2)}\right)=0.0864;$$

$$L\left(X^{(2)}\right)<L\left(X^{(1)}\right),\ \ P\left(X^{(2)}\right)<P\left(X^{(1)}\right).$$

Далее формируется набор:

$$\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(2)})\right\}=\{7;8;7;5;5;4\},\ \ c_{ij\,max}=8.$$

Модификация матриц $C^{(2)}$ *и* $P^{(2)}$ дает:

$$C^{(2)}=\begin{vmatrix}4 & 7 & M & M\\ 7 & M & 3 & 5\\ 2 & 6 & 5 & 4\end{vmatrix},\ P^{(2)}=\begin{vmatrix}0.25 & 0.9 & 0 & 0\\ 0.5 & 0 & 0.2 & 0.8\\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4\end{vmatrix}.$$

Итерация 2 завершена.
Итерация 3. Действуя аналогично, получим план:

$$X^{(3)}=\begin{vmatrix}2 & 8 & 0 & 0\\ 8 & 0 & 0 & 22\\ 8 & 0 & 12 & 0\end{vmatrix}.$$

Значения критериев (1) и (3) для плана $X^{(2)}$ равны:

$$L\left(X^{(3)}\right)=306;\ \ P\left(X^{(3)}\right)=0.0216;$$

$$L\left(X^{(3)}\right)<L\left(X^{(2)}\right),\ \ P\left(X^{(3)}\right)<P\left(X^{(2)}\right).$$

Набор стоимостей, соответствующий ненулевым поставкам имеет вид:

$$\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(3)})\right\}=\{4;7;7;5;2;5\},\ \ c_{ij\,max}=7.$$

Модификация матриц $P^{(2)}$ *и* $C^{(2)}$ дает:

$$C^{(3)}=\begin{vmatrix}4 & M & M & M\\ M & M & 3 & 5\\ 2 & 6 & 5 & 4\end{vmatrix},\ P^{(3)}=\begin{vmatrix}0.25 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8\\ 0.3 & 0.7 & 0.8 & 0.4\end{vmatrix}.$$

Итерация 3 завершена.

Итерация 4. Вновь, используя метод максимального элемента для матрицы $P^{(3)}$, получим план:

$$X^{(4)} = \begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 22 \\ 8 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Значения критериев (1) и (3) для плана $X^{(3)}$ равны:

$$L\left(X^{(3)}\right) = 258; \; P\left(X^{(3)}\right) = 0.00672;$$
$$L\left(X^{(3)}\right) < L\left(X^{(2)}\right), \; P\left(X^{(3)}\right) < P\left(X^{(2)}\right).$$

Формируем набор:

$$\left\{c_{ij}\delta(x_{ij}^{(4)})\right\} = \left\{4; 3; 5; 2; 6; 5\right\}, \; c_{ij\,max} = 6.$$

Модификация матриц $P^{(3)}$ *и* $C^{(3)}$ дает:

$$C^{(4)} = \begin{vmatrix} 4 & M & M & M \\ M & M & 3 & 5 \\ 2 & M & 5 & 4 \end{vmatrix}, \; P^{(4)} = \begin{vmatrix} 0.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 & 0.8 \\ 0.3 & 0 & 0.8 & 0.4 \end{vmatrix}.$$

Дальнейшее решение задачи невозможно, так как заблокированы все маршруты, ведущие ко второму потребителю.

Заметим, что независимое решение сформированной в примере задачи по двум разным основным критериям дает частично совпадающие частные решения, но это, по-видимому, – эффект малой размерности исходной задачи. С другой стороны, совместное использование всех полученных частных решений позволяет реализовать важные достоинства возникающего при этом Парето-множества решений, поскольку эти решения не мажорируют друг друга. Анализ этого множества дает широкий простор для выбора компромиссного решения.

Предложенный метод легко обобщается на случай большего числа критериев. Пусть в качестве третьего критерия выбрана продолжительность выполнения перевозок. Составим матрицу $T = (t_{ij})$ теперь, как и ранее, решается задача по основному, стоимостному критерию (1). Пусть $X^{(1)} = (X_{ij}{}^{(1)})$ – решение задачи. Далее отыскиваются ненулевые наборы $\{p_{ij}\delta(x_{ij}{}^{(1)})\}$ и $\{t_{ij}\delta(x_{ij}{}^{(1)})\}$, и пары индексов:

$$(i_1, j_1) = arg\,min\{p_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\},$$
$$(i_2, j_2) = arg\,max\{t_{ij}\delta(x_{ij}^{(1)})\}.$$

Понятно, что маршрут (i_1, j_1) – наименее надежный из маршрутов плана $X^{(1)}$, а маршрут (i_2, j_2) – наиболее продолжителен. Назовем их критическими. Модифицируем матрицы $C,\ P,\ T$ по правилу:

$$C_{ij}^{(1)} = \begin{cases} c_{ij}, если\ (p_{ij} > p_{i1j1}) \wedge (t_{ij} < t_{i2j2}), \\ M, если\ (p_{ij} \le p_{i1j1}) \vee (t_{ij} \ge t_{i2j2}); \end{cases}$$

$$p_{ij}^{(1)} = \begin{cases} p_{ij}, если\ (p_{ij} > P_{i1j1}) \wedge (t_{ij} < t_{i2j2}), \\ 0, если\ (p_{ij} \le P_{i1j1}) \vee (t_{ij} \ge t_{i2j2}); \end{cases}$$

$$t_{ij}^{(1)} = \begin{cases} t_{ij}, если\ (p_{ij} > P_{i1j1}) \wedge (t_{ij} < t_{i2j2}), \\ M, если\ (p_{ij} \le P_{i1j1}) \vee (t_{ij} \ge t_{i2j2}). \end{cases}$$

Эти операции исключают возможность дальнейшего использования маршрутов которые хуже критических.

Дальнейшие действия выполняются в соответствии с описанными выше.

Направление дальнейших исследований связано с рассмотрением ситуации, когда исходные данные задачи не определены точно. Реальные варианты возникающей неопределенности описаны в [14–18]. Возможные подходы к решению транспортных задач с неопределенностью исходных обсуждаются в [19–21].

7. SWOT-анализ результатов исследования

Strengths. Предложенный метод решения транспортной задачи линейного программирования в отличие от известных позволяет получить компромиссное решение, которое обеспечивает наилучшее значение по основному критерию при условии, что дополнительные критерии принимают значения не хуже заданных. Достижение этого эффекта традиционными методами невыполнимо.

Weaknesses. Применение этого метода увеличивает общее время решения задачи.

Opportunities. Применение предложенного метода открывает перспективы решения транспортных задач в условиях, когда исходные данные по стоимости перевозок, вероятности выполнения плана и продолжительности его реализации содержат неопределенность.

Threats. Применение метода уступок, обеспечивает возможность получения компромиссного решения, которое неизбежно будет хуже оптимального решения по основному критерию. При этом, чем более жесткими будут требования по дополнительным критериям, тем более ощутимым будет ухудшение решения по основному критерию.

8. Выводы

1. По результатам проведенного анализа известных методов решения многокритериальных задач (формирование Парето-множества, скаляризация векторного критерия, метод уступок) обосновано применение метода уступок. Важные достоинства предложенного метода: простота вычислительной процедуры, обоснованная технология формирования на каждой итерации нового решения, реализующая концепцию уступки, контроль качества получаемого на каждом шаге решения.

2. Для реализации метода предложена итерационная процедура, в которой начальный план является оптимальным по основному критерию. На последующих итерациях выполняется уступка по основному критерию с целью улучшения значений дополнительных критериев. Решение задачи продолжается до получения компромиссного решения, обеспечивающего получение наилучшего значения по основному критерию при условии, что значения по остальным критериям будут не хуже заданных. Применение предложенного метода открывает перспективы его обобщения на случай, когда исходные данные для решения задачи содержат неопределенность.

Литература

1. Yudin, D. B. Zadachi lineinogo programmirovaniia transportnogo tipa [Text] / D. B. Yudin, E. G. Golshtein. – Moscow: Nauka, 1969. – 384 p.
2. Sira, O. V. Mnogomernye modeli logistiki v usloviiah neopredelennosti [Text] / O. V. Sira. – Kharkiv: FOP Stetsenko I. I., 2010. – 512 p.
3. Raskin, L. G. Mnogoindeksnye zadachi lineinogo programmirovaniia [Text] / L. G. Raskin, O. I. Kirichenko. – Moscow: Radio i sviaz, 1982. – 240 p.
4. Steuer, R. Multiple Criteria Optimization: Theory, Computation and Application [Text] / R. Steuer. – New York: John Wiley, 1986. – 546 p.
5. Savaragi, Y. Theory of Multiobjective Optimization [Text] / Y. Savaragi, H. Nakayama, T. Tanin. – Orlando: Academic Press Inc., 1985. – 296 p.
6. Keeney, R. L. Decisions with Multiple Objectives [Text] / R. L. Keeney, H. Raiffa. – Cambridge University Press, 1993. – 570 p. doi:10.1017/cbo9781139174084
7. Ehrgott, M. Multicriteria Optimization [Text] / M. Ehrgott. – Heidelberg: Springer, 2005. – 323 p. doi:10.1007/3-540-27659-9
8. Craft, D. L. Approximating convex Pareto surfaces in multiobjective radiotherapy planning [Text] / D. L. Craft, T. F. Halabi, H. A. Shih, T. R. Bortfeld // Medical Physics. – 2006. – Vol. 33, No. 9. – P. 3399–3407. doi:10.1118/1.2335486
9. Lotov, A. V. Mnogokriterial'nye zadachi priniatiia reshenii [Text] / A. V. Lotov, I. I. Pospelova. – Moscow: MAKS Press, 2008. – 197 p.
10. Intrillitator, M. Matematicheskie metody optimizatsii i ekonomicheskaia teoriia [Text] / M. Intrillitator. – Moscow: Antris-press, 2002. – 553 p.
11. Cohon, J. L. Multiobjective Programming and Planning [Text] / J. L. Cohon. – New York: Dover Publ, 2004. – 352 p.

12. Luque, M. Global formulation for interactive multiobjective optimization [Text] / M. Luque, F. Ruiz, K. Miettinen // OR Spectrum. – 2008. – Vol. 33, No. 1. – P. 27–48. doi:10.1007/s00291-008-0154-3

13. Panda, S. Multi-objective evolutionary algorithm for SSSC-based controller design [Text] / S. Panda // Electric Power Systems Research. – 2009. – Vol. 79, No. 6. – P. 937–944. doi:10.1016/j.epsr.2008.12.004

14. Zadeh, L. A. Fuzzy sets [Text] / L. A. Zadeh // Information and Control. – 1965. – Vol. 8, No. 3. – P. 338–353. doi:10.1016/s0019-9958(65)90241-x

15. Negoitse, K. Primenenie teorii sistem k problemam upravleniia [Text] / K. Negoitse. – Moscow: MIR, 1981. – 219 p.

16. Orlovskii, S. A. Problemy priniatiia reshenii pri nechetkoi informatsii [Text] / S. A. Orlovskii. – Moscow: Nauka, 1981. – 264 p.

17. Diubua, D. Teoriia vozmozhnostei. Prilozhenie k predstavleniiu znanii v informatike [Text] / D. Diubua, A. Prad. – Moscow: Radio i sviaz, 1990. – 286 p.

18. Raskin, L. G. Nechetkaia matematika. Osnovy teorii. Prilozheniia [Text] / L. G. Raskin, O. V. Sira. – Kharkiv: Parus, 2008. – 352 p.

19. Raskin, L. Method of solving fuzzy problems of mathematical programming [Text] / L. Raskin, O. Sira // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 5, No. 4 (83). – P. 23–28. doi:10.15587/1729-4061.2016.81292

20. Pawlak, Z. Rough sets [Text] / Z. Pawlak // International Journal of Computer & Information Sciences. – 1982. – Vol. 11, No. 5. – P. 341–356. doi:10.1007/bf01001956

21. Raskin, L. Fuzzy models of rough mathematics [Text] / L. Raskin, O. Sira // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2016. – Vol. 6, No. 4 (84). – P. 53–60. doi:10.15587/1729-4061.2016.86739