УДК 532.546
DOI: 10.15587/2312-8372.2017.119326

ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ГРАВИТАЦИОННЫХ СИЛ НА ПРОЦЕСС ВЫТЕСНЕНИЯ ВЯЗКОПЛАСТИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Гасымов С. Ю., Мамедов Р. С.

1. Введение

Математическое моделирование процессов нефтедобычи, как правило, сводится к решению краевых задач для систем нелинейных уравнений в частных производных. Их исследование может проводиться аналитическими или приближенными методами. Аналитические решения удается получить при существенном упрощении моделей реальных процессов, когда не учитываются большинство основных параметров, например, неоднородность пластов, нестационарность режимов эксплуатации, сжимаемость фаз, сложность геометрии области фильтрации и т. д. Такие решения представляют, несомненно, теоретический и методический интерес, однако их практическое значение существенно ограничено. Учет факторов, определяющих конкретные условия нефтедобычи, существенно усложняет математическое моделирование и порождает необходимость численного моделирования. Для численного моделирования процессов фильтрации в рамках принятой модели в первую очередь необходимо разработать экономичные численные методы, обладающие высокой точностью.

Задачи многофазной фильтрации обладают специфическими особенностями, что зачастую не позволяют при численном решении использовать традиционные конечно-разностные методы. Поэтому появляется необходимость в разработке разностных схем в адаптивных сетках [1, 2], позволяющих учитывать особенности решения.

Адаптивные сетки уменьшают искусственную вязкость и осцилляцию численного решения. А также дают возможность при малом числе узлов расчетной сетки получать качественно и количественно приемлемые результаты во всей области, исключая зоны, где имеются особенности решения, например, зоны больших градиентов.

2. Объект исследования и его технологический аудит

Объект исследования – численное моделирование процесса двумерной двухфазной фильтрации вязкопластичной нефти и воды с учетом гравитационных сил, некоторых свойств жидкостей, а также относительных фазовых проницаемостей и капиллярных сил на основе разностно-итерационного метода в подвижных сетках.

Рассмотрим пространственно-осесимметрическую задачу вытеснения вязко-пластичной нефти водой в неоднородной по коллекторским свойствам пласта с учетом капиллярных и гравитационных сил. Предполагается, что жидкости сжимаемы, кровля и подошва пласта непроницаемы, совершенная эксплуатационная скважина с радиусом $r = r_c$ расположена в центре, а нагнетательные скважины на контуре пласта.

Если допустить, что потенциалы фаз $\varphi_i(r,z,\phi)$ не зависят от ϕ, то уравнения, описывающие изотермический процесс вытеснения вязкопластичной нефти водой, в цилиндрической системе координат могут быть представлены в виде:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_1\Psi_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_1 s_1\right),\\
&\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial t}\left(m\rho_2 s_2\right),\\
&P_1-P_2=P_k(s_2),\ s_1+s_2=1,\\
&(r,z,t)\in G_T=\left\{r_c<r<R,\ 0<z<H,\ 0<t\le T\right\},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где индекс 1 относится к нефти, а 2-к воде, H – мощность пласта.

Отметим, что для сжимаемых жидкостей φ_i определяется формулами:

$$
\varphi_i = gz+\int\limits_{p_0}^{p}\frac{dp}{\rho_i(P_i)}, i=1,2,
\tag{2}
$$

где g – ускорение силы тяжести; P_0 – некоторая величина, взятая за начало отчета давления. Функция Ψ_i та же, что и в [3–5].

Пусть в начальный момент времени $t=0$ в пласте имеется остаточная вода. Тогда считая искомыми функциями $P_2(r,z,t)\equiv P(r,z,t)$ и $P_k(r,z,t)$ систему (1) можно записать в следующем безразмерном виде:

$$
\begin{cases}
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[\left(r\lambda_1\Psi_1\left(\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{\partial p_k}{\partial r}\right)\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_1\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial p_k}{\partial z}+\rho_1 g_1\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1(1-s),\\
\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(r\lambda_2\frac{\partial p}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda_2\left(\frac{\partial p}{\partial z}+\rho_2 g_2\right)\right]=\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 s),\\
p_1=p+p_k(s)\\
s_1=1-s, s_2\equiv s,
\end{cases}
\tag{3}
$$

$$
\left(r,z,t\right)\in G_T=\left\{r_c<r<R,\ 0<z<H,\ 0<t\le T\right\},
$$

начальные и граничные условия имеют вид:

$$
\begin{aligned}
&p(r,z,0)=p^0(r,z),\\
&p_k(r,z,0)=p^0{}_k(r,z),\ t=0;
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{\partial p_k}{\partial z} = -\rho_1 g_1, \\ \dfrac{\partial p}{\partial z} = -\rho_2 g_2,\ z = 0, z = H,\ r_c < r < R,\ 0 < t \le T; \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} p(r,z,t) + p_k(r,z,t) = f_1(z,t), \\ \dfrac{\partial p_k}{\partial r} = 0,\ r = r_c,\ 0 < z < H,\ 0 < t \le T; \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} p(r,z,t) = f_2(z,t), \\ \dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{\partial p_k}{\partial r} = 0,\ r = R,\ 0 < z < H,\ 0 < t \le T. \end{cases} \tag{7}$$

Если в начальный момент времени задаются потенциалы фаз, то начальные значения для искомых функций определяются из выражения:

$$\mathrm{P}^0(r,z) = \frac{1}{A_2}(e^{A_2\varphi_2^0 - A_2 g_2^z} - B_2),$$

$$\mathrm{P}_\mathrm{k}^0(r,z) = \frac{1}{A_1} e^{A_1\varphi_1^0 - A_1 g_1^z} - P^0(r,z).$$

Как видно, уравнения системы (3), описывающие осесимметрический процесс вытеснении вязкопластичной нефти водой, являются нелинейными. Поэтому единственно эффективным аппаратом решения таких задач является численное моделирование.

3. Цель и задачи исследования

Целью исследования является разработка эффективных-экономичных численных методов решения плоско-радиальных двумерных (осесимметрических) задач нелинейной фильтрации многофазной сжимаемой жидкости. Данные методы будут учитывать особенности решения и будут пригодными для решения широкого круга задач. Они также могут использоваться для создания программного комплекса при проведении численных расчетов и исследований на основе численного моделирования различных процессов нелинейной фильтрации.

Для достижения поставленной цели необходимо решить такие задачи:

1. Построить экономичные разностные схемы и итерационный процесс для нахождения распределения водонасыщенности.

2. На основании численных экспериментов обсудить вопросы вычислительной реализации предложенной методики и дать практические рекомендации по ее применению.

4. Исследование существующих решений проблемы

Среди работ, посвященных этой теме, можно выделить следующие. В работе [6] решается задача о вытеснении из пористой среды нефти с помощью полимерного раствора, которая подчиняется степенному закону фильтрации. В работе [7] предлагается численный подход, идейно отличающийся от метода конечных элементов и конечных разностей. Авторами [8] рассмотрены вопросы определения параметров пласта для течений, не подчиняющихся линейному закону Дарси, и возможность разграничения нелинейных эффектов.

Важным этапом в развитии методов решение нестационарных двумерных задач явился метод переменных направлений (МПН), основанный на однородной аппроксимации и получивший широкое распространение во многих задачах математической физики [9–15].

Однако этот метод не допускает непосредственного обобщения на случай большего числа измерений и для параболических уравнений более общего вида [9]. Например, трехмерные задачи могут быть решены по МПН только в том случае, если фильтрация в вертикальном направлении оказывается незначительной.

Более общим методом получения экономичных неявных разностных схем, пригодных для уравнения с переменными, и даже разрывными, коэффициентами, для квазилинейных двумерных нестационарных задач является метод суммарной аппроксимации или локально-одномерные схемы (ЛОС) [9].

5. Методы исследований

Для численного решения задачи (3)–(7) будем применять разностно-итерационный метод в адаптивных сетках [1, 16].

С этой целью в области $\bar{\mathrm{G}}_{\mathrm{T}} = \{ r_c \le r \le R,\ 0 \le z \le H,\ 0 \le t \le T \}$ введем пространственно-временную сетку:

$$\hat{\bar{\mathrm{G}}}_{\mathrm{h_{i,n}} h_j \tau_n} = \begin{cases} r_{i,n} = r_{i-1,n} + h_{i,n},\ i = \overline{1, M-1},\ r_{0,n} = r_c,\ r_{M,n} = R; \\ z_j = z_{j-1} + h_j,\ j = \overline{1, J-1},\ z_0 = 0,\ z_J = H; \\ t_n = t_{n-1} + \tau_n,\ n = \overline{1, N-1},\ t_0 = 0,\ t_N = T. \end{cases}$$

Для построения экономичных разностных схем применяем метод ЛОС. С этой целью систему уравнений (3) представим в следующей операторной форме:

$$\begin{cases} \mathrm{L}_{11} p + \mathrm{L}_{11} p_k + \mathrm{L}_{12} p + \mathrm{L}_{12} p_k + L w_1 = \dfrac{\partial}{\partial t}(m \rho_1 (1 - s)), \\ \mathrm{L}_{21} p + \mathrm{L}_{22} p + L w_2 = \dfrac{\partial}{\partial t}(m \rho_2 s), \end{cases} \tag{8}$$

где приняты такие обозначения:

$$\mathrm{L}_{11} = \bar{r}' \frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_1(r, p_1, s)\Psi_1 \frac{\partial}{\partial r} \right], L_{12} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_1 \frac{\partial}{\partial z}),$$

$$L_{21} = \bar{r}' \frac{\partial}{\partial r}\left[r\lambda_2(r, p_2, s)\Psi_1 \frac{\partial}{\partial r} \right], L_{22} = \frac{\partial}{\partial z}(\lambda_2 \frac{\partial}{\partial z}),$$

где $\mathrm{L} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{z}}, W_\alpha = \lambda_\alpha \rho_\alpha g_\alpha,\ g_\alpha = \rho_\alpha \frac{R_0 g}{\rho_0}$ – безразмерная величина;

R_0, P_0 – характерные размерные величины.

Системы (8) расщепляем на две одномерные системы:

– по *z*:

$$\begin{cases} L_{12}P + L_{12}P_k + Lw_1 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1(1-s)), \\ \mathrm{L}_{22}p + Lw_2 = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 s); \end{cases} \tag{9}$$

– по *r*:

$$\begin{cases} L_{11}P + L_{11}P_k = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_1(1-s)), \\ \mathrm{L}_{21}p = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(m\rho_2 s). \end{cases} \tag{10}$$

На основе введенной по *t* сетки ϖ_τ введем точки $\mathrm{t}_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{\tau}{2}$ и каждый интервал вида $\left(\mathrm{t_n}, t_{n+1}\right]$ разобьем на два полуинтервала:

$$\left(\mathrm{t_n}, t_{n+\frac{1}{2}}\right] \text{ и } \left(\mathrm{t}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}, t_{n+1}\right].$$

Система уравнений (9) и (10) аппроксимируем соответственно на полуинтервалах $\left(\mathrm{t_n}, t_{n+\frac{1}{2}}\right]$ и $\left(\mathrm{t}_{\mathrm{n}+\frac{1}{2}}, t_{n+1}\right]$ двухслойной неявной разностной схемой. Получим цепочку одномерных схем, которую и назовем ЛОС:

$$\begin{cases} \Lambda_{12}(\bar{\mathrm{t}})\bar{\mathrm{Y}}_1 + \Lambda_{12}(\bar{\mathrm{t}})\bar{\mathrm{Y}}_2 + \Lambda \bar{W}_1 = \dfrac{1}{2}\left(\bar{V}_{11}\bar{Y}_{1,\bar{t}} + \bar{V}_{12}\bar{Y}_{2,\bar{t}}\right), \\ \Lambda_{22}(\bar{\mathrm{t}})\bar{\mathrm{Y}}_1 + \Lambda \bar{W}_2 = \dfrac{1}{2}\left(\bar{V}_{21}\bar{Y}_{1,\bar{t}} + \bar{V}_{22}\bar{Y}_{2,\bar{t}}\right), \end{cases} \tag{11}$$

и

$$\begin{cases} \Lambda_{11}(\hat{\mathrm{t}})\hat{\mathrm{Y}}_1 + \Lambda_{12}(\hat{\mathrm{t}})\hat{\mathrm{Y}}_2 = \dfrac{1}{2}\left(\hat{V}_{11}\hat{Y}_{1,\bar{t}} + \hat{V}_{12}\hat{Y}_{2,\bar{t}}\right), \\ \Lambda_{21}(\hat{\mathrm{t}})\hat{\mathrm{Y}}_1 = \dfrac{1}{2}\left(\hat{V}_{21}\hat{Y}_{1,\bar{t}} + \hat{V}_{22}\hat{Y}_{2,\bar{t}}\right), \end{cases} \tag{12}$$

где введены следующие обозначения:

$$\Lambda_{21}(\mathrm{t})\mathrm{Y} = \mathrm{r}_{\mathrm{i}}^{-1} h_i^{-1}\left[h_{i+1}^{-1}(r\lambda_2)_{i+\frac{1}{2},j}(Y_{i+1,j} - Y_{i,j}) - h_i^{-1}(r\lambda_2)_{i-\frac{1}{2},j}(Y_{i,j} - Y_{i-1,j}) \right],$$

$$\Lambda_{\alpha 2}(\mathrm{t})\mathrm{Y} = h_j^{-1}\left[h_{j+1}^{-1}(\lambda_\alpha)_{i,j+\frac{1}{2}}(Y_{\alpha,i,j+1} - Y_{\alpha,i,j}) - h_j^{-1}(\lambda_\alpha)_{i,j-\frac{1}{2}}(Y_{\alpha,i,j} - Y_{\alpha,i,j-1}) \right],$$

$$\Lambda W_\alpha = h_j^{-1}\left[\left(W_\alpha\right)_{i,j+\frac{1}{2}} - \left(W_\alpha\right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad \alpha = 1,2;$$

$$V_{11} = m\rho_1'(1-s),\ \ V_{12} = m\rho_1'(1-s) - m\rho_1 s',$$

$$V_{21} = m\rho_2' s, \quad V_{22} = m\rho_2 s', \quad \bar{t} = t^{n+\frac{1}{2}},$$

$$\hat{t} = t^{n+1}, \quad Y_1 = P(r_i, z_j),\ Y_2 = P_k(r_i, z_j),$$

$$1 \le i \le M-1,\ 1 \le j \le J-1, \quad 1 \le n \le N-1.$$

Аппроксимация начальных и граничных условий приводит к системам:

$$\begin{aligned} &Y_{1,i,j}^0 = P(r_i, z_j, 0), \quad Y_{2,i,j}^0 = P_k(r_i, z_j, 0), \\ &1 \le i \le M-1,\ 1 \le j \le J-1, \end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{cases} \hat{Y}_{1,i,1} - \hat{Y}_{1,i,0} = -h_1 g_2 \hat{\rho}_{2,i,0}, \\ \hat{Y}_{2,i,1} - \hat{Y}_{2,i,0} = h_1(\hat{\rho}_2 g_2 - \hat{\rho}_1 g_1)_{i,0}, \end{cases} \tag{14}$$

$$
\begin{cases}
\hat{Y}_{1,i.,1} - \hat{Y}_{1,i,0} = -h_1 g_2 \hat{\rho}_{2,i,0}, \quad \hat{Y}_{2,i,1} - \hat{Y}_{2,i,0} = h_1 (\hat{\rho}_2 g_2 - \hat{\rho}_1 g_1)_{i,0}, \\
Y_{1,i.,J} - \hat{Y}_{1,i,J-1} = -h_J g_2 \hat{\rho}_{2,i,J}, \ \hat{Y}_{2,i,J} - \hat{Y}_{2,i,J-1} = h_J (\hat{\rho}_2 g_2 - \hat{\rho}_1 g_1)_{i,J},
\end{cases}
\tag{15}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{Y}_{1,0.,j} + \hat{Y}_{2,0,j} = \hat{\phi}_{1,j}, \\
h_1^{-1}\left(\hat{Y}_{2,1,j} - \hat{Y}_{2,0,j}\right) = 0, \quad i = 0, 1 \le j \le J-1, \ 1 \le N \le N-1,
\end{cases}
\tag{16}
$$

$$
\begin{cases}
\hat{Y}_{1,M.,j} - \hat{Y}_{1,M-1,j} + \hat{Y}_{2,M.,j} - \hat{Y}_{2,M-1,j} = 0, \\
\hat{Y}_{1,M,j} = \hat{\phi}_{2,j}, \ i = M, 1 \le j \le J-1, \ 1 \le n \le N-1.
\end{cases}
\tag{17}
$$

Решение рассматриваемых систем затруднительно из-за нелинейности, так как коэффициенты входящих в нее уравнений зависит от искомых функций. Поэтому при решении таких систем пользуются итерационными методами, позволяющими в полной мере использовать достоинства неявных схем и вести расчеты с более крупным шагом по времени.

Линеаризации нелинейных уравнений системы (11)–(17) можно провести двумя способами – методом простой итерации и методом Ньютона [17]. В дальнейшем будем пользоваться методом простой итерации, суть которого заключается в том, что на новом временном слое значения нелинейных членов совпадают со значениями на предыдущем временном слое.

Таким образом, раскрыв все члены в системах (11) и (12), линеаризуя нелинейные члены при P, P_k и s, и вводя следующие обозначения:

$$
Az = \begin{bmatrix} az_{11} & az_{12} \\ az_{21} & az_{22} \end{bmatrix}, \ cz = \begin{bmatrix} cz_{11} & cz_{12} \\ cz_{21} & cz_{22} \end{bmatrix}, bz = \begin{bmatrix} bz_{11} & bz_{12} \\ bz_{21} & bz_{22} \end{bmatrix}, \ \varphi z = \begin{bmatrix} fz_1 \\ fz_2 \end{bmatrix},
$$

$$
AR = \begin{bmatrix} ar_{11} & ar_{12} \\ ar_{21} & ar_{22} \end{bmatrix}, \ CR = \begin{bmatrix} cr_{11} & cr_{12} \\ cr_{21} & cr_{22} \end{bmatrix}, \ BR = \begin{bmatrix} br_{11} & br_{12} \\ br_{21} & br_{22} \end{bmatrix}, \varphi R = \begin{bmatrix} fr_1 \\ fr_2 \end{bmatrix},
$$

получим в результате уравнения по каждому направлению:

– по направлению z:

$$
\begin{cases}
-CZ_{i,0}^{(e)} Y_{i,0}^{(e+\frac{1}{2})} + BZ_{i,0} Y_{i,1}^{(e+\frac{1}{2})} = -\varphi Z_{i,0}^{(e)}, \ j = 0, \\
AZ_{i,j}^{(e)} Y_{i,j-1}^{(e+\frac{1}{2})} - CZ_{i,j}^{(e)} Y_{i,j}^{(e+\frac{1}{2})} + BZ_{i,j}^{(e)} Y_{i,j+1}^{(e+\frac{1}{2})} = -\varphi Z_{i,j}^{(e)}, \ 1 \le j \le J-1, \\
AZ_{i,J}^{(e)} Y_{i,J-1}^{(e+\frac{1}{2})} - CZ_{i,J}^{(e)} Y_{i,J}^{(e+\frac{1}{2})} = -\varphi Z_{i,J}^{(e)}, \ j = J,
\end{cases}
\tag{18}
$$

$0 \le i \le M, 0 < n < N;$

– по направлению r:

$$\begin{cases} -CR_{0,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{0,j}^{(e+1)} + BR_{0,j}^{(e)} \hat{Y}_{1,j}^{(e+1)} = -FR_{0,j}^{(e)}, \ i = 0, \\ AR_{i,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{i-1,j}^{(e+1)} - CR_{i,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{i,j}^{(e+1)} + BR_{i,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{i+1,j}^{(e+1)} = -FR_{i,j}^{(e)}, 1 \le i \le M-1, \\ AR_{M,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{M-1,j}^{(e+1)} - CR_{M,j}^{(e)} \cdot \hat{Y}_{M,j}^{(e+1)} = -FR_{M,j}^{(e)}, \quad i = M, \end{cases} \tag{19}$$

$$0 \le j \le J, \quad 0 < n \le N.$$

Таким образом, решение задачи (11)–(17) сводится к решению двух самостоятельных одномерных задач:

Задача 1: (11), (13)–(15).

Задача 2: (12), (16), (17).

Первым решается задача 1, при этом начальные приближения выбираются из (11). Алгоритм реализации заключается в следующем. Обозначив верхним индексом в скобках номер итерации, положим $Y_{1,i,j}^{(0)(n+1)} = Y_{1,i,j}^{n}, Y_{2,i,j}^{(0)(n+1)} = Y_{2,i,j}^{n}$.

Решая задачу 1 методом матричной прогонки [9], определяем промежуточные значения сеточных функций:

$$Y_{1,i.j}^{(1)(n+\frac{1}{2})} = Y_1(r_i, z_j, t^{n+\frac{1}{2}}), \ Y_{2,i.j}^{(1)(n+\frac{1}{2})} = Y_2(r_i, z_j, t^{n+\frac{1}{2}}).$$

Далее, взяв найденные значения сеточных функций за начальные приближения для задачи 2 и решая ее методом матричной прогонки, определяем узловые значения сеточных функций:

$$Y_{1,i.j}^{(1)(n+\frac{1}{2})} = Y_1(r_i, z_j, t^{n+1}), \ Y_{2,i.j}^{(1)(n+1)} = Y_2(r_i, z_j, t^{n+1}).$$

Таким образом, на сетке $\hat{\bar{\Omega}}_{h_i\ h_j \tau_{n+1}}$ получаем значения сеточных функций в ($l+1$)-ом приближении. Аналогично определяем и все остальные приближения.

Итерации продолжаются до такого l_m, при котором одновременно выполняются условия:

$$\max_{i,j} \left| Y_{1,i,j}^{(l_m+1)} - Y_{1,i,j}^{(l_m)} \right| \le \varepsilon_1,$$
$$\max_{i,j} \left| Y_{2,i,j}^{(l_m+1)} - Y_{2,i,j}^{(l_m)} \right| \le \varepsilon_2,$$

где ε_1, ε_2 – точности сходимости.

6. Результаты исследования

Проведенные методические расчеты показали, что при численном моделировании двумерных задач также целесообразно применять разностно-итерационный метод в подвижных сетках. При проведении расчетов использовалась адаптивная сетка по *r,* которая строилась на основании двух критериев. По первому критерию при *z=0* определялась узловая точка:

$$\mathrm{r}_1^*(t) = \max\left|\frac{s(r_{i+1},z_1,t)-s(r_i,z_1,t)}{h_{i+1}}\right|,$$

в которой градиент водонасыщенности достигает максимального значения.

По второму же критерию аналогичная точка определялась на кровле пласта (*z=H)*:

$$\mathrm{r}_{\mathrm{J-1}}^*(t) = \max_{0\le i\le M}\left|\frac{s(r_{i+1},z_{J-1},t)-s(r_i,z_{J-1},t)}{h_{i+1}}\right|.$$

«Измельчение» сетки проводилось в области, содержащей отрезок $\left[\mathrm{r}_1^*(t),\mathrm{r}_{\mathrm{J-1}}^*(t)\right]$, причем выполнялось условие α-квазиравномерности сетки по переменной *r*.

Отметим, что по переменной *z* используется неравномерная неподвижная сетка, сгущающаяся только в окрестностях *z=0* и *z=H*.

При этом численные расчеты были проведены для следующих исходных данных:

$$\mathrm{R}=\mathrm{R}_0=100\ \text{м};\ \ H=10\ \text{м};\ \mathrm{r_c}=0.1\ \text{м};\ \mathrm{m}=0.2;$$

$$\mathrm{k}=\mathrm{k}_0=10^{-12}\ \text{м}^2;\ \mu_1=0.3\ \text{пуаз};\ \mu_2=\mu_0=0.01\ \text{пуаз};$$

$$\mathrm{S}^0=0.15;\ \rho_0=1\ \frac{\text{г}}{\text{см}^3};\ \mathrm{G}_1=0.1\ \frac{\text{атм}}{\text{м}}=100\ \frac{\text{дин}}{\text{см}^3};$$

$$\mathrm{f}_1(t)=90\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2};\ \mathrm{f}_2(t)=100\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}.$$

Если в задаче (3)–(7) пренебрегать силами тяжести, то критерии выбора точек, в окрестностях которых должна сгущаться расчетная сетка, является идентичными аналогичным критериям одномерной задачи [16].

Влияние начального градиента на процесс вытеснения иллюстрируется в табл. 1, где случаю $\mathrm{G}_1=0$ соответствуют столбцы с номером I, а к случаю $\mathrm{G}_1=0.001$ – с номером III. Отметим, что плотности нефти и воды определялись по следующим формулам:

$$\rho_1(p_1) = 0.00853p_1 + 0.82592,$$
$$\rho_2(p_2) = 0.01033p_2 + 0.99989.$$

Значение насыщенности воды принималась равной 0.15 при t=0 и z=0, давление воды – $100\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$. По этим данным определялись функции $\mathrm{p}^0(r,z)$ и $\mathrm{p}_\mathrm{k}^0(r,z)$, т. е. начальные условия для искомых функций.

На нагнетательной скважине при z=0 давление воды задается равным $100\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$, а при z=0.2; 0.4; 0.6; 0.8; 1.0 определяется, соответственно, 0.9980; 0.9960; 0.9941; 0.9921; 0.9901. Перепад давления (разность давлений на нагнетательной и эксплуатационной скважине) при каждом z был равен $10\ \frac{\text{кгс}}{\text{см}^2}$.

Результаты расчетов полученных для распределения водонасыщенности при значении начального градиента $\mathrm{G}_1 = 5\cdot 10^{-4}$, приведены во втором столбце табл. 1. Сравнения столбцов II и III табл. 1 показывает, что процесс фильтрации во многом характеризуется значениями G_1 (как и в плоскорадиальном случае). Причем уменьшение параметра G_1 приводит к случаю задачи для $\mathrm{G}_1 = 0$, что является правдоподобной.

Таблица 1

Влияние начального градиента на процесс вытеснения

T	0.1608			0.8808			1.3608		
Столбцы / *r*, м	I	II	III	I	II	III	I	II	III
0.001	0.1500	0.1500	0.1500	0.1514	0.1520	0.1528	0.1555	0.1566	0.1672
0.1	0.1500	0.1500	0.1500	0.1516	0.1526	0.1536	0.1564	0.1574	0.1590
0.2	0.1500	0.1500	0.1500	0.1523	0.1530	0.1537	0.1603	0.1614	0.1631
0.3	0.1500	0.1500	0.1500	0.1537	0.1542	0.1547	0.1708	0.1727	0.1752
0.4	0.1500	0.1500	0.1500	0.1574	0.1580	0.1586	0.1963	0.2013	0.2086
0.5	0.1500	0.1500	0.1500	0.1684	0.1694	0.1705	0.2725	0.2822	0.2904
0.6	0.1503	0.1504	0.1504	0.1958	0.1985	0.2022	0.3365	0.3420	0.3495
0.7	0.1515	0.1506	0.1516	0.2771	0.2835	0.2889	0.3833	0.3882	0.3941
0.8	0.1572	0.1574	0.1576	0.3443	0.3483	0.3530	0.4205	0.4257	0.4316
0.9	0.1593	0.1940	0.1951	0.3975	0.4014	0.4061	0.4572	0.4620	0.4680
1.0	0.3189	0.3225	0.3259	0.4466	0.4504	0.4550	0.4953	0.4992	0.5057

Результаты расчетов, проведенные для выявления влияния силы тяжести на процесс вытеснения при z=0, приведены в табл. 2, по которой даже при малых мощностях продуктивных пластов гравитационные силы оказывают влияние на процесс вытеснения, причем с течением времени это влияние увеличивается. В самом деле, если в момент t=0.08 (заметим, что в размерном виде 0.02592 соответствует одному месяцу), на контуре разность водонасыщенностей составляла 0.0077; при t=0.24 – 0.0122; при t=1.04 она становится равной 0.0292.

Таблица 2

Влияние силы тяжести на процесс вытеснения при z=0

t	0.0808		0.2408		0.6408		1.0408	
g / *r*, м	0	981	0	981	0	981	0	981
0.001	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1503	0.1527
0.1	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1502	0.1508	0.1529
0.2	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1507	0.1518	0.1538
0.3	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500	0.1503	0.1514	0.1547	0.1564
0.4	0.1500	0.1500	0.1500	0.1503	0.1513	0.1528	0.1630	0.1641
0.5	0.1500	0.1500	0.1501	0.1511	0.1548	0.1562	0.1839	0.1859
0.6	0.1500	0.1500	0.1503	0.1539	0.1662	0.1675	0.2431	0.2445
0.7	0.1500	0.1502	0.1527	0.1681	0.1976	0.1976	0.3106	0.3188
0.8	0.1507	0.1515	0.1670	0.2384	0.2820	0.2880	0.3594	0.4250
0.9	0.1640	0.1650	0.2358	0.3076	0.3438	0.3576	0.3970	0.4205
1.0	0.2759	0.2816	0.3299	0.3421	0.3945	0.4168	0.4355	0.4647

В табл. 3 представлены распределения водонасыщенности по *r* в момент времени *t*=0.32, полученные на основе использования двумерных (без учета силы тяжести) и плоско-радиальных моделей с учетом и без учета начального градиента.

Таблица 3

Распределение насыщенности воды по *r*

G_1 / *r*, м	Двумерная задача без учета силы тяжести		При радиальной фильтрации	
	$G_1 = 0$	$G_1 = 10^{-3}$	$G_1 = 0$	$G_1 = 10^{-3}$
0.001	0.1500	0.1500	0.1500	0.1500
50	0.1500	0.1503	0.1500	0.1502
60	0.1511	0.1514	0.1509	0.1511
65	0.1530	0.1533	0.1525	0.1530
70	0.1570	0.1575	0.1567	0.1572
75	0.1654	0.1665	0.1652	0.1658
80	0.1814	0.1835	0.1810	0.1832
85	0.2154	0.2202	0.2146	0.2193
90	0.2672	0.2747	0.2656	0.2742
95	0.2942	0.3004	0.2938	0.2996
100	0.3469	0.3530	0.3463	0.3528

Расчеты показывают, что в двумерной задаче значение водонасыщенности на нагнетательной скважине с учетом G_1 равно 0.3520, а при радиальной фильтрации она составляет 0.3528. То есть они отличаются незначительно и вместе с тем, в обоих случаях к этому моменту вода продвигается на одинаковое расстояние – 50 м. Отсюда следует, что при моделировании процесса без учета силы тяжести целесообразно упростить геометрию области фильтрации, т. е. рассматривать плоско-радиальное течение, ввиду значительной простоты вычислений.

7. SWOT-анализ результатов исследований

Strengths. Предложенный алгоритм можно использовать при проведении гидрогазодинамических расчетов, связанных с разработкой и эксплуатацией нефтяных месторождений, содержащих аномальные нефти.

Данный алгоритм способствует:

- экономии времени;
- сокращению объема вычислительного процесса;
- увеличение производительности нефтяных скважин;
- увеличение скорости вычисления.

Weaknesses. К недостаткам данного метода относится трудоемкость вычисления.

Opportunities. Благодаря внедрению этого способа в нефтедобывающей промышленности ожидается повышение нефтеоотдачи месторождения.

Threats. Для внедрения данного способа необходимо дополнительное оборудование, а, соответственно, это денежные затраты. Необходимы также высококвалифицированные кадры для работы с этим оборудованием.

8. Выводы

1. Построены экономичные разностные схемы, которые сочетают достоинства явных и неявных схем и дают возможность свести двумерную задачу к цепочке одномерных задач. Предложен также разностно-итерационный метод в подвижных сетках решения двумерных (осесимметрических) нестационарных задач фильтрации аномальных жидкостей, при помощи которых строится итерационный процесс для нахождения распределения водонасыщенности.

2. Проведенные расчеты для выявления влияния силы тяжести на процесс вытеснения показали, что при z=0 даже при малых мощностях продуктивных пластов гравитационные силы оказывают влияние на процесс вытеснения. Причем с течением времени это влияние увеличивается: если в момент t=0.08 на контуре разность водонасыщенностей составляла 0.0077; при t=0.24 – 0.0122, то при t=1.04 она становится равной 0.0292.

Показано, что при моделировании процесса без учета силы тяжести целесообразно упростить геометрию области фильтрации, т. е. рассматривать плоско-радиальное течение, ввиду значительной простоты вычислений.

Литература

1. Pirmamedov, V. G. Ob odnom raznostno – iteratsionnom metode v podvizhnyh setkah resheniia nekotoryh nelineinyh zadach teorii fil'tratsii i teploprovodnosti [Text] / V. G. Pirmamedov. – Dep. v VINITI, 1975. – No. 2027-75.

2. Musaev, G. M. Chislennoe modelirovanie protsessov dvuhfaznoi i trehfaznoi fil'tratsii na osnove raznostno-iteratsionnogo metoda v podvizhnyh setkah [Text] / G. M. Musaev, V. G. Pirmamedov, K. F. Shirinov // Dinamika mnogofaznyh sred. – Novosibirsk: ITPM SO AN SSSR, 1983. – P. 223–227.

3. Bernadiner, M. G. Gidrodinamicheskaia teoriia fil'tratsii anomal'nyh zhidkostei [Text] / M. G. Bernadiner, V. M. Entov. – Moscow, 1975. – 200 p.

4. Kaiumov, Yu. Chislennoe modelirovanie zadachi fil'tratsii viazkoplasticheskih fliuidov pri razlichnyh zakonah dvizheniia [Text] / Yu. Kaiumov // Chislennye metody resheniia zadach fil'tratsii mnogofaznoi neszhimaemoi zhidkosti. – Novosibirsk, 1987. – P. 139–145.

5. Klevchenia, A. A. Chislennoe modelirovanie protsessa neustoichivogo vytesneniia nen'iutonovskoi nefti [Text] / A. A. Klevchenia, V. B. Taranchuk // Dinamika mnogofaznyh sred. – Novosibirsk, 1981. – P. 193–198.

6. Pascal, H. Dynamics of moving interface in porous media for power law fluids with yield stress [Text] / H. Pascal // International Journal of Engineering Science. – 1984. – Vol. 22, No. 5. – P. 577–590. doi:10.1016/0020-7225(84)90059-4

7. Elnaggar, H. Effect of non-darcian behavior on the characteristics of transient flow [Text] / H. Elnaggar, G. Karadi, R. J. Krizek // Journal of Hydrology. – 1971. – Vol. 13. – P. 127–138. doi:10.1016/0022-1694(71)90210-1

8. Turetskaia, F. O. Gidrodinamicheskie proiavleniia i identifikatsiia anomalii plastovyh zhidkostei [Text] / V. M. Entov, F. O. Turetskaia // Neftianoe hoziaistvo. – 1987. – No. 5. – P. 26–29.

9. Samarskii, A. A. Teoriia raznostnyh shem [Text] / A. A. Samarskii. – Moscow: Nauka, 1983. – 653 p.

10. Baker, G. A. Jr. An implicit, numerical method for solving the two-dimensional heat equation [Text] / G. A. Baker Jr., T. A. Oliphant // Quarterly of Applied Mathematics. – 1960. – Vol. 17, No. 4. – P. 361–373. doi:10.1090/qam/110207

11. Bramble, J. H. On the formulation of finite difference analogues of the Dirichlet problem for Poisson's equation [Text] / J. H. Bramble, B. E. Hubbard // Numerische Mathematik. – 1962. – Vol. 4, No. 1. – P. 313–327. doi:10.1007/bf01386325

12. Buchanan, M. L. A Necessary and Sufficient Condition for Stability of Difference Schemes for Initial Value Problems [Text] / M. L. Buchanan // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1963. – Vol. 11, No. 4. – P. 919–935. doi:10.1137/0111067

13. Wachspress, E. L. Extended Application of Alternating Direction Implicit Iteration Model Problem Theory [Text] / E. L. Wachspress // Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1963. – Vol. 11, No. 4. – P. 994–1016. doi:10.1137/0111073

14. Douglas, J. Jr. A general formulation of alternating direction methods [Text] / J. Douglas Jr., J. E. Gunn // Numerische Mathematik. – 1964. – Vol. 6, No. 1. – P. 428–453. doi:10.1007/bf01386093

15. Keller, H. B. Unconditionally stable difference methods for mixed problems for quasi-linear hyperbolic systems in two dimensions [Text] / H. B. Keller, V. Thomee // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1962. – Vol. 15, No. 1. – P. 63–73. doi:10.1002/cpa.3160150105

16. Gasimov, S. Yu. Numerical simulation of the process of gas and water filtration on the basis of the difference – iterative method in moving grids [Text] / S. Yu. Gasimov, R. S. Mammadov // Bulletin of the National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute»: Mechanical-Technological Systems And Complexes. – 2017. – Vol. 20 (1242). – P. 89–93. – Available at: \www/URL: http://mtsc.khpi.edu.ua/article/view/109614

17. Aziz, K. Petroleum Reservoir Simulation [Text] / K. Aziz, A. Settari. – Applied Science Publishers, 1979. – 497 p.