

ОПТИМАЛЬНЕ ПЛАНУВАННЯ ТРИВАЛОСТІ РЕЙСУ ТА ОБОРОТУ НА МІСЬКОМУ МАРШРУТІ

Кузькін О. Ф.

Об'єктом дослідження є маршрут міського пасажирського транспорту загального користування. Одним з найбільш проблемних місць при організації перевезень на фіксованому міському маршруті є встановлення планової тривалості виконання рейсу та (або) зворотного рейсу. Складнощі виникають через те, що тривалість виконання рейсу на міському маршруті зазвичай є випадковою величиною, що необхідно враховувати при встановленні її планових значень, використовуваних надалі при складанні розкладів руху. Це, з одного боку, дозволяє покращити ефективність використання маршрутних транспортних засобів за рахунок зменшення їх непродуктивних простоїв, а з іншого – підвищити якість обслуговування пасажирів за рахунок зменшення тривалості очікування останніми транспорту на зупинках.

В ході дослідження використано метод стохастичної оптимізації планової тривалості рейсу. Це дало можливість знайти компроміс у вартісному виразі між ефективністю використання маршрутних транспортних засобів та якістю обслуговування пасажирів. Особливістю запропонованого оптимізаційного методу є врахування в узагальнених витратах непродуктивних простоїв маршрутних транспортних засобів, недоотриманого прибутку транспортного оператора та вартості транспортного часу пасажирів.

Застосування розробленого методу для умов тролейбусного маршруту № 14 міста Запоріжжя (Україна) дозволяє у порівнянні з існуючими плановими показниками зменшити узагальнені витрати на 12 %.

Наразі значно розширилися технічні можливості збирання, накопичення та обробки емпіричної інформації про умови виконання перевезень на міських маршрутах з використанням супутникових систем глобального позиціонування GPS. У таких умовах з використанням розробленого методу забезпечується можливість оперативного врахування при плануванні пасажирських перевезень як експлуатаційних, так і соціально-економічних чинників, у яких ці перевезення виконуються.

Ключові слова: міський громадський транспорт, тривалість очікування, тривалість рейсу, узагальнені витрати.

1. Вступ

Величина тривалості оборотного рейсу на міському маршруті громадського транспорту є одним з найважливіших його техніко-експлуатаційних показників. Цю величину використовують для визначення необхідної кількості маршрутних транспортних засобів (МТЗ), частоти і інтервалів руху, розподілу рухомого

складу між маршрутами, складання розкладів і графіків руху, організації комбінованих режимів сполучення на маршрутах [1].

Складність нормування тривалості виконання оборотного рейсу на маршруті полягає в тому, що вона є випадковою величиною, яка залежить та змінюється під дією низки як керованих, так і некерованих чинників. Так, на тривалість виконання рейсів у реальних умовах експлуатації впливають [2]:

- тягово-динамічні властивості використовуваного на маршруті рухомого складу;

- конструктивні особливості посадочних пристроїв;

- кількість дверей транспортного засобу та розподіл пасажирів між ними;

- інтенсивність пасажиропотоку;

- інтенсивність транспортного потоку на трасі маршруту;

- дорожні та кліматичні умови (сезон року та час доби, стан дорожнього покриття, кількість смуг руху, план і повздовжній профіль дороги, наявність та частота перехресть, технічні засоби організації дорожнього руху);

- досвід і психофізіологічний стан водія.

За таких умов тривалість міжрейсових простоїв на кінцевих зупинках маршруту встановлюється з декількох міркувань. Це забезпечення, з одного боку, короткотривалого відпочинку водія, а з іншого боку – надійності виконання розкладу руху внаслідок випадкових коливань тривалості виконання рейсів.

Зменшення нормативної тривалості оборотного рейсу відносно фактично необхідної є причиною зниження якості перевезень пасажирів, яке, зокрема, виражається у такому:

- збільшуються витрати часу пасажирями на очікування транспорту на зупинках [3];

- виникають відмови пасажирів у посадці у МТЗ через його переповнення;

- зростає нерівномірність ступеня використання пасажиромісткості МТЗ. Надлишкове ж збільшення нормативної тривалості оборотного рейсу призводить до збільшення непродуктивних простоїв МТЗ і, як наслідок, збільшення витрат транспортних підприємств на обслуговування маршрутів та вартості проїзду для пасажирів.

Таким чином, від правильного нормування тривалості оборотного рейсу залежить, з одного боку, забезпечення достатньої провізної спроможності маршруту, а з іншого боку – ефективність використання МТЗ та господарської діяльності транспортних підприємств. Враховуючи, що це з обох боків безпосередньо впливає на рівень якості транспортного обслуговування пасажирів, задача достовірного планування тривалості оборотного рейсу на маршрутах міського громадського транспорту є актуальною. Актуальність рішення задачі підвищується в сучасних умовах зростання рівня автомобілізації у містах, оскільки якісне транспортне обслуговування мешканців громадським транспортом дозволяє залучити власників автомобілів до користування ним. Це, у свою чергу, дає можливість знизити гостроту проблем, пов'язаних з її шкідливими наслідками [4].

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об'єктом дослідження є фіксований маршрут міського пасажирського транспорту загального користування.

Найрозповсюдженішою технологією транспортного обслуговування пасажирів на масовому громадському транспорті у містах є маршрутна технологія, яка є найбільш ефективною при щільності розселення від 3750 чол./км² [5]. Маршрутна технологія передбачає організацію руху МТЗ по незмінних шляхах прямування (*маршрутах*) у вигляді послідовності циклів транспортування (*рейсів*). Протягом рейсу здійснюється пасажирообмін (вхід та вихід пасажирів) на спеціально обладнаних майданчиках (*зупинках*), розташованих вздовж траси маршруту [6]. Зупинки поділяють трасу маршруту на *перегони*. За таких умов робота рухомого складу представляє собою послідовність циклічно виконуваних протягом доби (або робочої зміни) окремих елементів транспортного процесу (рис. 1).



Рис. 1. Структура складових циклу транспортного процесу на міському маршрутному транспорті загального користування

Щоденна робота МТЗ розпочинається з подавання його з місця стоянки (парку, гаража) до однієї з кінцевих зупинок маршруту. Такий пробіг називається *нульовим* пробігом, а його тривалість t_0 відноситься до добового або змінного циклу роботи МТЗ. Надалі МТЗ виконує на маршруті один або декілька циклів перевезень (*оборотних рейсів*), кожен з яких складається з наступних послідовних елементів:

– рух по маршруту від кінцевої зупинки А до кінцевої зупинки В (*рейс у прямому напрямку*) тривалістю t_{AB} ;

- міжрейсовий простій на кінцевій зупинці В тривалістю t'_B ;
- рух по маршруту від кінцевої зупинки В до кінцевої зупинки А (рейс у зворотному напрямку) тривалістю t_{BA} ;
- міжрейсовий простій на кінцевій зупинці А перед виконанням наступного оборотного рейсу t'_A .

На протязі кожного з рейсів МТЗ рухається перегонами маршруту, витрачаючи час безпосередньо на рух (включаючи затримки, що пов'язані з організацією дорожнього руху) та на простій на зупинках для здійснення посадки та (або) висадки пасажирів. Після виконання останнього запланованого розкладом руху оборотного рейсу (або його частини) МТЗ повертається з кінцевої зупинки нульовим пробігом до місця стоянки.

Таким чином, тривалість оборотного рейсу на маршруті T_{36} визначається сумою тривалостей його складових:

$$T_{36} = t_{AB} + t'_B + t_{BA} + t'_A. \quad (1)$$

На практиці можуть існувати маршрути, що мають лише одну кінцеву зупинку (кільцеві) [7], у такому випадку покладають $t_{BA} = 0$ та $t'_B = 0$.

Для планування тривалості рейсів використовуються два методи – *хронометражний* та *розрахунковий* [2].

Хронометражний метод ґрунтується на проведенні замірів фактичних витрат часу на виконання рейсів та їх окремих елементів безпосередньо на маршруті з виконанням певних вимог та умов. По результатах цих замірів отримують статистичну вибірку (зазвичай невеликого обсягу), на підставі якої визначають розрахункову норму часу на виконання рейсу за формулою:

$$t_p = \frac{3t_{\min} + 2t_{\max}}{5}, \quad (2)$$

де t_{\min} , t_{\max} – відповідно, мінімальне і максимальне значення фактичної тривалості виконання рейсу, визначене за вибіркою даних проведеного хронометражу, хв.

Розрахунковий метод полягає у розділенні траси маршруту на окремі ділянки, у межах яких забезпечується приблизна рівність умов руху МТЗ. Після цього для кожної ділянки розраховуються витрати часу на рух та простій МТЗ з урахуванням усіх діючих чинників на цій ділянці з використанням аналітичних або графічних залежностей [8].

Одним з найбільш проблемних місць при організації перевезень на маршруті є встановлення планової тривалості виконання рейсу та (або) зворотного рейсу. Складнощі виникають через те, що тривалість виконання рейсу на міському маршруті зазвичай є випадковою величиною, що необхідно враховувати при встановленні її планових значень, використовуваних надалі при складанні розкладів руху. Це, з одного боку, дозволяє покращити

ефективність використання МТЗ за рахунок зменшення його непродуктивних простоїв, а з іншого – підвищити якість обслуговування пасажирів за рахунок зменшення тривалості очікування останніми транспорту на зупинках.

3. Мета та задачі дослідження

Метою проведених досліджень є розробка методу оптимізації планової тривалості оборотного рейсу на міському автобусному маршруті, яка на відміну від існуючих, враховує інтереси як транспортних операторів, так і пасажирів.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1. Розробити і обґрунтувати економіко-математичну модель оптимального планування тривалості оборотного рейсу на міському маршруті з урахуванням імовірнісного характеру транспортного процесу перевезень пасажирів.

2. На підставі емпіричних даних, отриманих безпосередньо на міській маршрутній мережі, виконати факторне дослідження розробленої моделі та надати рекомендації щодо встановлення її параметрів у практичних умовах планування транспортного процесу пасажирських перевезень.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

Задачі достовірного визначення тривалості виконання оборотного рейсу та його складових як в цілому на маршруті, так і на його окремих ділянках, приділяється велика увага науковців та спеціалістів у галузі міських пасажирських перевезень. Основна мета досліджень, здебільшого, спрямована на забезпечення надійності виконання встановленого розкладу руху на маршрутах. Зрозуміло, що як надто ранній час прибуття на зупинки, так і запізнення відправлення автобусів з них відносно встановленого розкладу суттєво погіршують рівень якості транспортних послуг [9].

У роботі [10] запропонований розрахунковий метод визначення тривалості рейсу на автобусному маршруті, який складається з основних та додаткових витрат часу. При цьому до основних витрат часу віднесено рух перегонами, простій на зупинках під пасажирообміном та пов'язані з цим маневрування. До додаткових витрат часу віднесено умови руху та інтенсивність транспортного потоку, затримки на регульованих і нерегульованих перехрестях. Кожна складова витрат часу розраховується за аналітичними, емпіричним формулами або подана у вигляді табульованих значень та таблиць. Отримане значення тривалості рейсу коригується у відповідності до режиму руху на автобусному маршруті та з урахуванням імовірності виникнення черг з автобусів перед зупинками та пов'язаних з цим додаткових затримок у русі.

Втім, на думку більшості дослідників, отримана таким чином розрахункова тривалість рейсу виявляється у більшості випадків завищеною. Тож транспортні оператори для підвищення ефективності рухомого складу використовують при складанні розкладів руху планову тривалість рейсу, що є дещо меншою або рівною розрахунковій [11].

На відміну від розрахункових, набагато більше розповсюдження знайшли ймовірнісно-статистичні методи нормування тривалості рейсу та окремих його складових, які використовують в якості вихідних даних фактичні історичні дані

хронометражу. Розвитку цього напрямку сприяє широке розповсюдження для контролю та диспетчеризації руху громадського транспорту супутникових систем глобального позиціонування (Global Positioning System, GPS) та побудованих на їх основі систем автоматичної реєстрації місцеположення транспортних засобів (Automatic Vehicle Location, AVL). При цьому значно розширилися технічні можливості як збирання емпіричної інформації про тривалість та швидкість руху транспортних засобів, так і її накопичення для подальшого аналізу та прогнозування [12].

В рамках імовірно-статистичних методів нормування тривалості рейсу у наукових дослідженнях сформувалися два методологічних підходи. Перший передбачає побудову регресійних моделей (зазвичай багатофакторних лінійних), до яких в якості незалежних змінних включаються різноманітні фактори, що мають вплив на тривалість рейсу [13–15]. Такими факторами є: довжина маршруту, кількість зупинок, період доби та сезон року, розташування маршруту на плані міста, пасажирооборот, ступінь використання пасажиромісткості, дорожні умови, вік та досвід водія, технічні характеристики МТЗ. Отримані регресійні залежності мають коефіцієнт множинної детермінації від $R^2=0,59$ [13] до $R^2=0,69$ [14, 15], що свідчить про задовільну відповідність отриманих регресійних моделей та можливість отримання суттєвої похибки при їх практичному застосуванні.

Другий підхід полягає у нормуванні тривалості рейсу на підставі встановлення закономірностей її статистичного розподілу як випадкової величини. Надалі, із застосуванням методів моделювання (статистичне моделювання [16], моделювання структурними рівняннями [17]), визначається планова тривалість рейсу та (або) його складових.

Найбільше розповсюдження для опису тривалості рейсу на міському маршруті, завдяки їх добрій відповідності емпіричним даним та відносній простоті, отримали закони нормального та логарифмічно-нормального розподілу [18]. Втім, у роботі [19] на підставі статистичного аналізу величини тривалості руху на ділянках шести автобусних маршрутах з використанням даних GPS встановлено, що гіпотеза про її логарифмічно-нормальний розподіл не підтверджується у приблизно 40 % проведених спостереженнях. Виходячи з цього, пропонується описувати тривалість руху за допомогою змішаного імовірного розподілу, що є сумою випадкових величин тривалості руху автобуса на окремих ділянках маршруту, додатково розраховуючи кореляційні моменти між стандартними відхиленнями цих тривалостей. На підставі розробленого підходу для встановлення рівня якості перевезень – математичне очікування цього розподілу для оцінки ефективності використання рухомого складу та його стандартне відхилення для оцінки надійності транспортного обслуговування пасажирів.

У роботі [20], виконано аналіз статистичних даних транспортної компанії TransLink Transit Authority у місті Квінсленд (Австралія). На його підставі пропонується використовувати для опису випадкової величини тривалості власне руху автобуса перегонами нормальний закон розподілу. Для опису тривалості простою автобуса на зупинках пропонується використовувати

дискретний розподіл, поданий у вигляді систематизованої таблиці. В результаті встановлено, що випадкова величина тривалості рейсу, отримана як сума тривалостей його окремих складових, добре описується гаусівською змішаною моделлю, використання якої дозволило надійність виконання розкладу руху автобусів на 15 %. Аналогічні дослідження у Брісбені (Австралія) показали, що у порівнянні з низкою неперервних розподілів випадкової величини, модель змішаного гаусівського розподілу є кращою з точки зору точності підгонки та стійкості отримуваних результатів. У дослідженні для порівняння використовувались нормальний, логарифмічно-нормальний, Вейбула, логістичний закони розподілу та закон гамма-розподілу.

Робота [16] присвячена оптимізації нормативної тривалості рейсу з урахуванням її схоластичності за критерієм мінімізації зваженого сумарного очікуваного часу відхилень фактичних моментів прибуття автобусів на зупинки від запланованих та часу надлишкової роботи рухомого складу. З використанням методу Монте-Карло, оптимізаційна модель трансформована та представлена як задача лінійного програмування з обмеженнями у вигляді нерівностей. На підставі результатів оптимізації виконаний аналіз чутливості моделі при зміні вихідних даних.

Рекомендована тривалість міжрейсових простоїв автобуса на кінцевих зупинках, за більшістю досліджень приймається рівною 10...15 % від тривалості рейсу [21], що у натуральному виразі складає 5...15 хв. [22].

Підсумовуючи аналіз попередніх досліджень, слід зазначити, що вони розглядають задачу планування тривалості рейсу на маршруті або лише з точки зору користувачів транспортних послуг (пасажирів) або лише з точки зору транспортних операторів. Слід також звернути увагу на той факт, що надлишкове підвищення надійності виконання розкладу руху призводить, як правило, до збільшення експлуатаційних витрат транспортних операторів. Це, у свою чергу, збільшує вартість транспортних послуг, що негативно відбивається на ставленні пасажирів до громадського транспорту. Таким чином, є підстави стверджувати, що проблема визначення оптимального планування тривалості рейсу на автобусному маршруті з урахуванням інтересів як пасажирів, так і транспортних операторів, залишається невирішеною.

5. Методи досліджень

Як було показано вище (рис. 1), тривалість оборотного рейсу МТЗ на міському маршруті у загальному випадку складається з тривалостей рейсів у кожному з напрямків та міжрейсових простоїв на кожній з двох кінцевих зупинок. Надалі будемо розглядати в якості параметра, що оптимізується, тривалість рейсу в одному з напрямків з додаванням часу міжрейсового простою на кінцевій зупинці наприкінці цього рейсу. Зрозуміло, що залишок тривалості оборотного рейсу (у протилежному напрямку) може бути розглянутий аналогічним чином.

У практичних умовах, зазвичай, тривалість рейсу з використанням імовірісно-статистичних методів, визначається за статистичною вибіркою обмеженого обсягу. Нехай в результаті N спостережень на міському маршруті

отримана статистична вибірка величин фактичної тривалості виконання рейсу t_1, t_2, \dots, t_N . Нехай планова тривалість рейсу дорівнює t_s ($t_{\min} \leq t_s \leq t_{\max}$, де t_{\min} та t_{\max} – відповідно, мінімальне та максимальне значення тривалості рейсу з множини спостережень). Тоді певна частина рейсів виконується з тривалістю, меншою ніж запланована ($t_i \in [t_{\min}, t_s)$), а частина – з плановою тривалістю, або більше неї ($t_i \in [t_s, t_{\max}]$).

Якщо фактична тривалість рейсу є меншою, ніж планова, виникає надлишковий час простою МТЗ на кінцевій зупинці. Сумарна величина цього часу, накопичена за весь період спостережень, дорівнює:

$$T_{np} = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i < t_s}}^N (t_s - t_i). \quad (3)$$

Такі випадки є небажаними для транспортного оператора, оскільки призводять до втрати ним наявних транспортних ресурсів. Ці втрати проявляються у двох аспектах. По-перше, непродуктивний простій транспортного засобу та водія призводять до додаткових експлуатаційних витрат C_1 , що у вартісному розмірі складають:

$$C_1 = c_{mp} \cdot T_{np}, \quad (4)$$

де c_{mp} – вартість простою МТЗ в одиницю часу.

По-друге, за втрачений час МТЗ міг би виконати додатково T_{np}/t_s кількість рейсів і, відповідно, дати транспортному оператору втрачений додатковий прибуток у розмірі:

$$C_2 = \frac{T_{np} \cdot Q \cdot \delta}{t_s}, \quad (5)$$

де Q – середня кількість пасажирів, що перевозиться на маршруті за рейс, пас.; δ – прибуток, що отримує транспортний оператор від перевезення одного пасажирів.

Таким чином, сумарні витрати транспортного оператора складаються з суми витрат від непродуктивного простою транспортних засобів та згаяного прибутку, в середньому на один виконаний рейс дорівнюють:

$$\begin{aligned}
C' &= \frac{C_1 + C_2}{N} = \frac{T_{np}}{N} \left[m_p + \frac{Q \cdot \delta}{t_s} \right] = \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i < t_s}}^N (t_s - t_i) \cdot \left[c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s} \right].
\end{aligned} \tag{6}$$

Аналогічним чином, якщо фактична тривалість рейсу перевищує планову, виникає запізнення відправлення МТЗ у рейс у зворотному напрямку, сумарна величина якого, накопичена за весь період спостережень, дорівнює:

$$T_{zn} = \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \geq t_s}}^N (t_i - t_s). \tag{7}$$

Затримка відправлення МТЗ у рейс у зворотному напрямку є небажаною для пасажирів, оскільки призводить до додаткових витрат часу ними в очікуванні прибуття МТЗ на зупинках. Виходячи з припущення, що сумарна величина цього додаткового часу очікування дорівнює сумарним затримкам відправлення МТЗ у рейс у зворотному напрямку, отримаємо вираз для розрахунку витрат, який відбиває інтереси пасажирів, у вигляді:

$$C_3 = c_{nac} \cdot Q \cdot T_{zn}, \tag{8}$$

де c_{nac} – витрати пасажирів на очікування МТЗ на зупинках в одиницю часу у вартісному виразі.

Сумарні витрати пасажирів в середньому за один виконаний рейс складатимуть:

$$C'' = \frac{C_3}{N} = \frac{c_{nac} \cdot Q \cdot T_{zn}}{N} = \frac{c_{nac} \cdot Q}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \geq t_s}}^N (t_i - t_s). \tag{9}$$

Таким чином, задача оптимального планування тривалості рейсу на маршруті полягає у визначенні такого значення t_s , яке мінімізує сумарні витрати перевізника та пасажирів (узагальнені витрати) у розрахунку на один виконаний рейс, тобто:

$$\begin{aligned}
C_{\Sigma} &= C' + C'' = \frac{1}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i < t_s}}^N (t_s - t_i) \cdot \left[c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s} \right] + \\
&+ \frac{c_{nac} \cdot Q}{N} \sum_{\substack{i=1 \\ t_i \geq t_s}}^N (t_i - t_s) \Rightarrow \min.
\end{aligned} \tag{10}$$

Зрозуміло, що значення T_{np} (3) та T_{zn} (7) у загальному випадку залежать від закону розподілу неперервної випадкової величини тривалості виконання рейсу t , тож дамо постановку задачі оптимального планування тривалості рейсу, в узагальненому вигляді.

Нехай випадкова величина тривалості виконання рейсу задана функцією щільності розподілу імовірностей $f(t)$, визначеною на інтервалі $[t_{\min}, t_{\max}]$.

Тоді математичне очікування тривалості рейсу з тих рейсів, величина яких не перевищує планову t_s згідно теореми про середнє значення [23] дорівнює:

$$M[t]_{t < t_s} = \frac{\int_{t_{\min}}^{t_s} t \cdot f(t) dt}{\int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt}. \quad (11)$$

Тоді середнє відхилення тривалості рейсу у менший бік для усіх рейсів, тривалість яких не перевищує планову, дорівнює:

$$t_s - M[t]_{t < t_s} = t_s - \frac{\int_{t_{\min}}^{t_s} t \cdot f(t) dt}{\int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt}. \quad (12)$$

Оскільки частка рейсів, тривалість яких не перевищує планового значення, у їх загальній кількості дорівнює $\int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt$, остаточно отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{T_{np}}{N} &= \left[t_s - \frac{\int_{t_{\min}}^{t_s} t \cdot f(t) dt}{\int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt} \right] \cdot \int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt = \\ &= t_s \int_{t_{\min}}^{t_s} f(t) dt - \int_{t_{\min}}^{t_s} t \cdot f(t) dt. \end{aligned} \quad (13)$$

З аналогічних міркувань для множини рейсів, тривалість яких більше або дорівнює плановій, маємо:

$$\frac{T_{zn}}{N} = \left[\frac{\int_{t_s}^{t_{max}} t \cdot f(t) dt}{\int_{t_s}^{t_{max}} f(t) dt} - t_s \right] \cdot \int_{t_s}^{t_{max}} f(t) dt =$$

$$= \int_{t_s}^{t_{max}} t \cdot f(t) dt - t_s \int_{t_s}^{t_{max}} f(t) dt. \quad (14)$$

З урахуванням тривалості міжрейсового простою на кінцевій зупинці t' отримаємо вираз для цільової функції:

$$C_{\Sigma} = C' + C'' \Rightarrow \min, \quad (15)$$

$$C_{\Sigma} = \left[t_{sm} \int_{t_{min}}^{t_s} f(t) dt - \int_{t_{min}}^{t_s} t \cdot f(t) dt \right] \cdot \left[c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right] +$$

$$+ c_{nac} \cdot Q \cdot \left[\int_{t_s}^{t_{max}} t \cdot f(t) dt - t_s \int_{t_s}^{t_{max}} f(t) dt \right] \Rightarrow \min. \quad (16)$$

Розглянемо наприклад, найпростіший частинний випадок, коли випадкова величина тривалості виконання рейсу розподілена за рівномірним законом розподілу. Функція щільності рівномірного розподілу має вигляд [23]:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{t_{max} - t_{min}}, & \text{якщо } t \in [t_{min}, t_{max}]; \\ 0 & , \text{якщо } t \notin [t_{min}, t_{max}] \end{cases} \quad (17)$$

Тоді, підставляючи (17) до (16) та виконуючи елементарні перетворення, отримаємо:

$$C_{\Sigma} = \left[\frac{(t_s - t_{min})^2}{2(t_{max} - t_{min})} \right] \cdot \left[c_{mp} + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right] + c_{nac} \cdot Q \cdot \left[\frac{(t_{max} - t_s)^2}{2(t_{max} - t_{min})} \right] =$$

$$= \frac{1}{2(t_{max} - t_{min})} \cdot \left[(t_{sm} - t_{min})^2 \cdot \left(c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right) + (t_{max} - t_s)^2 \cdot c \cdot Q \right] \Rightarrow \min. \quad (18)$$

Диференціюючи вираз (18) по t_s маємо:

$$\frac{dC_{\Sigma}}{dt_s} = \frac{1}{2(t_{\max} - t_{\min})} \cdot \left[\begin{array}{l} 2(t_{\text{смп}} - t_{\min}) \cdot \left(c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right) - \\ - 2 \cdot Q \cdot c_{\text{nac}} \cdot (t_{\max} - t_s) - \frac{Q \cdot \delta \cdot (t_s - t_{\min})^2}{(t_s + t')^2} \end{array} \right]. \quad (19)$$

Прирівнюючи отриманий вираз до нуля, отримуємо дріб, у чисельнику якого знаходиться кубічне рівняння вигляду:

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx - D = 0, \quad (20)$$

де $A = 2(c_{\text{мп}} + Q \cdot c_{\text{nac}})$; $B = Q \cdot \delta + 2 \cdot c_{\text{мп}} \cdot (2t' - t_{\min}) + 2 \cdot Q \cdot c_{\text{nac}} (2t' - t_{\max})$;

$$C = t' \left[t' (c_{\text{мп}} + Q \cdot c_{\text{nac}}) + Q(\delta - 2 \cdot c_{\text{nac}} \cdot t_{\max}) - 2 \cdot c_{\text{мп}} \cdot t_{\min} \right];$$

$$D = Q(\delta \cdot t_{\min}^2 + 2 \cdot c_{\text{nac}} \cdot t'^2 \cdot t_{\max} + 2\delta \cdot t' \cdot t_{\min}),$$

а у знаменнику вираз $(t_s + t')^2$, що ніколи не обертається на нуль при додатних значеннях t_s та t' . Розв'язуючи кубічне рівняння (20), можна знайти оптимальне значення тривалості виконання рейсу t_s^* , як один з його дійсних коренів.

Якщо $t' \ll t_s$, то обчислення можна спростити, поклавши у (18) $t_s + t' \approx t_s$. Тоді в результаті диференціювання та подальшого прирівнювання отриманої похідної до нуля, матимемо для знаходження величини t_s^* кубічне рівняння виду:

$$Ax^3 + Bx^2 - C = 0, \quad (21)$$

де $A = 2(c_{\text{мп}} + Q \cdot c_{\text{nac}})$; $B = Q \cdot (\delta - 2 \cdot c_{\text{nac}} \cdot t_{\max}) - 2 \cdot c_{\text{мп}} \cdot t_{\min}$; $C = Q \cdot \delta \cdot t_{\min}^2$.

Якщо також припустити, що додаткове виконання рейсів не приносить прибутку ($\delta=0$), що може мати місце, наприклад, на ізольованому маршруті, оптимальна тривалість рейсу з (21) визначається за простою формулою:

$$t_s^* = \frac{Q \cdot c_{\text{nac}} \cdot t_{\max} + c_{\text{мп}} \cdot t_{\min}}{Q \cdot c_{\text{nac}} + c_{\text{мп}}} = t_{\max} \times \frac{Q \cdot c_{\text{nac}}}{Q \cdot c_{\text{nac}} + c_{\text{мп}}} + t_{\min} \cdot \frac{c_{\text{мп}}}{Q \cdot c_{\text{nac}} + c_{\text{мп}}}. \quad (22)$$

У випадку нормального розподілу тривалості рейсу з функцією щільності імовірності:

$$f(t) = \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}, \quad (23)$$

де \bar{t} – математичне очікування тривалості рейсу, хв; σ_t – стандартне відхилення тривалості рейсу, хв.

Цільова функція для визначення оптимальної тривалості рейсу (16) матиме вигляд:

$$C_{\Sigma} = \left[\frac{\int_0^{t_s} t \cdot \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} dt}{\int_0^{t_s} \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} dt} \right] \cdot \left[c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right] +$$

$$+ c_{nac} \cdot Q \cdot \left[\frac{\int_{t_s}^{+\infty} t \cdot \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} dt}{\int_{t_s}^{+\infty} \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\bar{t})^2}{2\sigma_t^2}} dt} - t_s \right] \Rightarrow \min. \quad (24)$$

Перейшовши до стандартизованого нормального розподілу шляхом заміни змінної у підінтегральних виразах:

$$z = \frac{t - \bar{t}}{\sigma_t}; \quad t = z \cdot \sigma_t + \bar{t}; \quad dt = \sigma_t dz,$$

після інтегрування по частинах, елементарних перетворень та підстановки границь інтегрування, цільова функція (24) набуває вигляду:

$$C_{\Sigma} = \left[t_{smp} \bar{t} + \frac{\sigma_t \cdot e^{-\frac{(t_s - \bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}}{\sqrt{2\pi} \cdot \Phi\left(\frac{t_s - \bar{t}}{\sigma_t}\right)} \right] \cdot \left[c + \frac{Q \cdot \delta}{t_s + t'} \right] +$$

$$+ c_{nac} \cdot Q \cdot \left[\bar{t} - t_s + \frac{\sigma_t \cdot e^{-\frac{(t_s - \bar{t})^2}{2\sigma_t^2}}}{\sqrt{2\pi} \left[0,5 - \Phi\left(\frac{t_s - \bar{t}}{\sigma_t}\right) \right]} \right] \Rightarrow \min, \quad (25)$$

де $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ – інтегральна функція Лапласа.

Оскільки похідна функції (25) по незалежній змінній t_s містить у своєму виразі неелементарну функцію Лапласа, пошук її мінімуму можна виконати лише числовими методами. Вираз (25) може бути використаний також для пошуку оптимального значення тривалості рейсу, якщо остання має логарифмічно-нормальний розподіл, для чого достатньо застосувати операцію логарифмування до вихідної статистичної вибірки хронометражної тривалості рейсів.

6. Результати досліджень

Розглянемо практичний приклад застосування моделі оптимізації тривалості виконання рейсу та обороту рухомого складу на міському тролейбусному маршруті № 14 «Сімферопольське шосе – Набережна» міста Запоріжжя (Україна) з маятниковою схемою руху. По результатах комплексного обстеження пасажиропотоків, проведеного у квітні 2017 року, отримані вибіркові дані про тривалість виконання $N=20$ рейсів у кожному з напрямків маршруту (табл. 1), основні статистики яких наведені у табл. 2.

Таблиця 1

Дані спостережень за тривалістю виконання рейсу на міському тролейбусному маршруті № 14 міста Запоріжжя (Україна)

| | | | | | | | | | | |
|----------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t_{AB} , хв. | 60 | 64 | 62 | 62 | 67 | 62 | 63 | 65 | 65 | 65 |
| | 55 | 72 | 60 | 68 | 63 | 68 | 60 | 63 | 62 | 65 |
| t_{BA} , хв. | 60 | 64 | 62 | 66 | 62 | 64 | 55 | 54 | 67 | 63 |
| | 61 | 56 | 58 | 60 | 63 | 64 | 68 | 62 | 64 | 54 |

Таблиця 2

Основні статистики тривалості виконання рейсу на міському тролейбусному маршруті № 14 міста Запоріжжя (Україна)

| Статистика | Значення статистики за напрямками руху | |
|---|--|-----------|
| | прямий | зворотний |
| 1. Мінімальне значення t_{\min} , хв. | 55 | 54 |
| 2. Максимальне значення t_{\max} , хв. | 72 | 68 |
| 3. Вибіркове середнє \bar{t} , хв. | 63,55 | 61,35 |
| 4. Стандартне відхилення σ_t , хв. | 3,65 | 4,13 |

Спочатку встановимо характер розподілу випадкової величини у кожній вибірці. Оскільки маємо справу з малими вибірками, застосовуємо непараметричні методи. Зауважимо, що у випадку великих ($N > 30$) вибірок, для цього можна застосувати, наприклад, критерій χ^2 Пірсона.

Спочатку перевіряємо гіпотезу про нормальний розподіл величини тривалості рейсу за критерієм середнього абсолютного відхилення [24], для чого розраховуємо статистику цього критерію за формулою:

$$d = \frac{1}{N \cdot \sigma_t} \sum_{i=1}^N |t_i - \bar{t}|. \quad (26)$$

Маємо для тривалості рейсу у прямому напрямку $\sum_{i=1}^N |t_i - \bar{t}| = 54,1$,
 $d_{AB} = 0,741$, для тривалості рейсу у зворотному напрямку $\sum_{i=1}^N |t_i - \bar{t}| = 65,6$,
 $d_{BA} = 0,794$. Гіпотеза про нормальність розподілу не відкидається, якщо виконується умова $d_1 \leq d \leq d_2$, де d_1 та d_2 – критичні значення критерію, які на рівні значимості 0,05 та при обсязі вибірки $N = 20$ дорівнюють $d_1 = 0,7304$ та $d_2 = 0,8768$ [24]. Очевидно, значення d_{AB} та d_{BA} потрапляють до області прийняття гіпотези, тож гіпотезу про нормальний розподіл величини тривалості рейсу у прямому та зворотному напрямку маршруту не відкидаємо.

Надалі розрахунок ведемо за виразом цільової функції (25) з аргументом t_s , що змінюється з кроком $\Delta_t = 1$ хв., та значеннями постійних параметрів: $c_{mp} = 0,1$ дол. США/хв.; $c_{nac} = 0,002$ дол. США/хв.; $Q = 158$ пас.; $\delta = 0,021$ дол. США/пас.; $t' = 10$ хв.

Результати розрахунку у вигляді графіків зміни узагальнених витрат в залежності від змінювання планової тривалості рейсу наведені на рис. 2. На ньому також для порівняння наведені графіки зміни узагальнених витрат за умови розподілу тривалості рейсу за рівномірним законом.

Таким чином, мінімальні узагальнені витрати досягаються у випадку планової тривалості рейсу: у прямому напрямку $t_{AB} = 65$ хв. ($C_{\Sigma}^{\min} = 0,597$ дол. США.), у зворотному напрямку $t_{BA} = 63$ хв. ($C_{\Sigma}^{\min} = 0,678$ дол. США). З урахуванням тривалості міжрейсових простоїв на кожній з кінцевих зупинок $t'_A = t'_B = 10$ хв., оптимальна планова тривалість оборотного рейсу на маршруті за (1) складатиме:

$$T_{36}^* = 65 + 63 + 10 + 10 = 148 \text{ хв.}$$

У порівнянні з існуючими плановими показниками на маршруті $t_{AB} = 64$ хв. та $t_{BA} = 61$ хв., сумарна тривалість виконання рейсів після оптимізації збільшується на 3 хв., що дає зменшення узагальнених витрат у розрахунку на один виконаний зворотний рейс з $C_{\Sigma}^{\min} = 1,43$ дол. США до $C_{\Sigma}^{\min} = 1,28$ дол. США, тобто майже на 12 %.

Зауважимо, що у випадку розподілу випадкових величин тривалості виконання рейсів у кожному з напрямків маршруту за рівномірним законом, оптимальна планова тривалість оборотного рейсу дорівнює $T_{36}^* = 151$ хв.

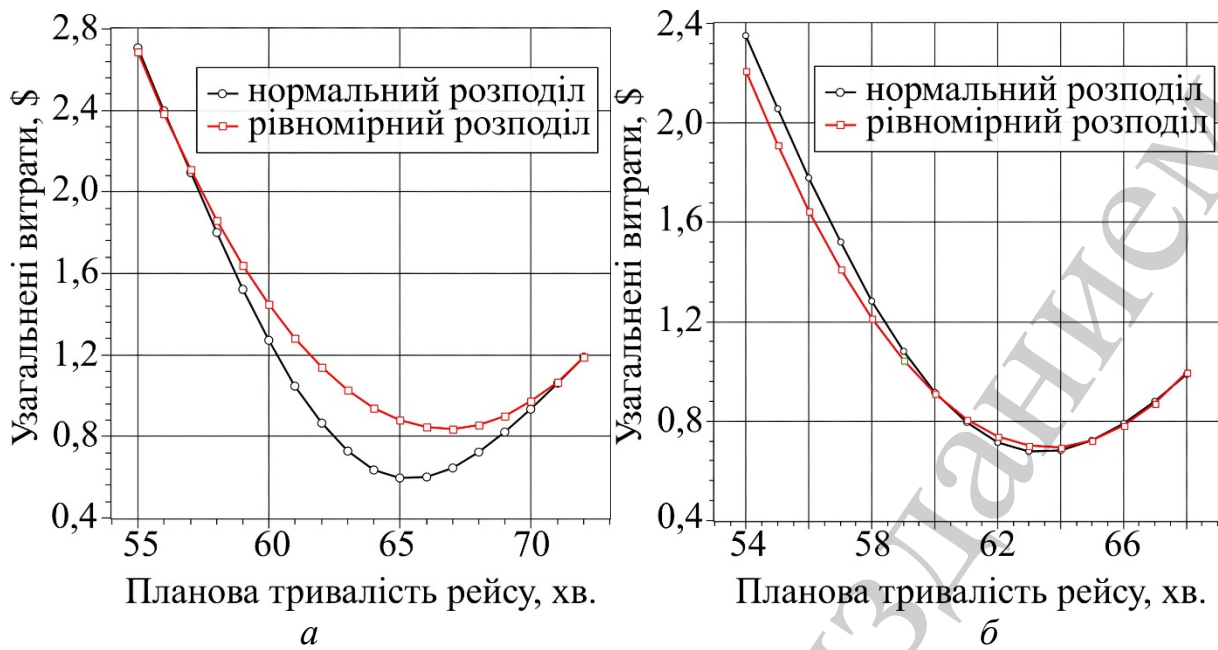


Рис. 2. Залежність узагальнених витрат від величини планової тривалості рейсу на тролейбусному маршруті № 14 міста Запоріжжя:
a – у прямому напрямку; *б* – у зворотному напрямку

Як видно з виразу цільової функції узагальнених витрат (16), на оптимальну величину тривалості виконання рейсу на міському маршруті t_s^* впливають такі параметри:

- характер розподілу випадкової величини тривалості виконання рейсу та її числові характеристики;
- вартість непродуктивного простою МТЗ в одиницю часу c_{mp} , дол. США;
- середня кількість пасажирів, що перевозяться на маршруті за рейс Q , пас.;
- прибуток, що отримує транспортний оператор від перевезення одного пасажирів δ , дол. США;
- витрати пасажирів на очікування МТЗ на зупинці в одиницю часу $c_{нас}$, дол. США;
- тривалість міжрейсового простою МТЗ на кінцевій зупинці маршруту t' , хв.

Проаналізуємо характер та ступінь впливу параметрів моделі на результативний показник t_s^* шляхом дослідження залежностей змінювання його величини від змінювання кожного з цих параметрів.

На рис. 3 наведений характеристичний графік змінювання оптимальної тривалості рейсу в залежності від змінювання параметрів моделі для прямого напрямку руху на розглядуваному маршруті. Верхні границі діапазонів варіювання параметрів вибрано таким чином, щоб проілюструвати їх вплив на результативний показник у межах його фактичних значень, отриманих в результаті хронометражу.

Вплив вартості непродуктивного простою МТЗ в одиницю часу. Величина c_{mp} виражає, так звані, *постійні витрати* транспортного оператора, що є

складовою собівартості перевезень [2]. До цих витрат, що відносять до однієї години експлуатації, включають заробітну плату водія з нарахуваннями, амортизацію рухомого складу та загальновиробничі витрати. При її збільшенні c_{mp} значення оптимальної тривалості рейсу на маршруті нелінійно зменшується в обмеженому діапазоні 63...68 хв., що складає приблизно 30 % розмаху випадкової величини тривалості рейсу.

Вплив середньої кількості пасажирів, що перевозиться на маршруті за рейс. Оптимальна тривалість рейсу на маршруті t_s^* нелінійно зростає при збільшенні Q , при цьому обмежена зверху значенням, що у наведеному прикладі дорівнює приблизно 65 % розмаху випадкової величини тривалості рейсу. Величина Q є характеристикою конкретного маршруту та відбиває співвідношення попиту на перевезення та пасажиромісткість використовуваного рухомого складу на цьому маршруті. За даними комплексного обстеження пасажиропотоків у місті Запоріжжя у 2017 році, фактичні значення цього параметра знаходяться у межах:

– для автобуса $Q_a = 3,6...113,8$ пас. (з середнім значенням $\bar{Q}_a = 30,05$ пас. та коефіцієнтом варіації $v_a = 0,48$);

– для тролейбуса $\bar{Q}_{mp} = 46,9...210,0$ ($\bar{Q}_{mp} = 127,3$ пас., $v_{mp} = 0,52$);

– для трамвая $\bar{Q}_m = 59,3...104,7$ пас. ($\bar{Q}_m = 76,7$ пас., $v_m = 0,57$).

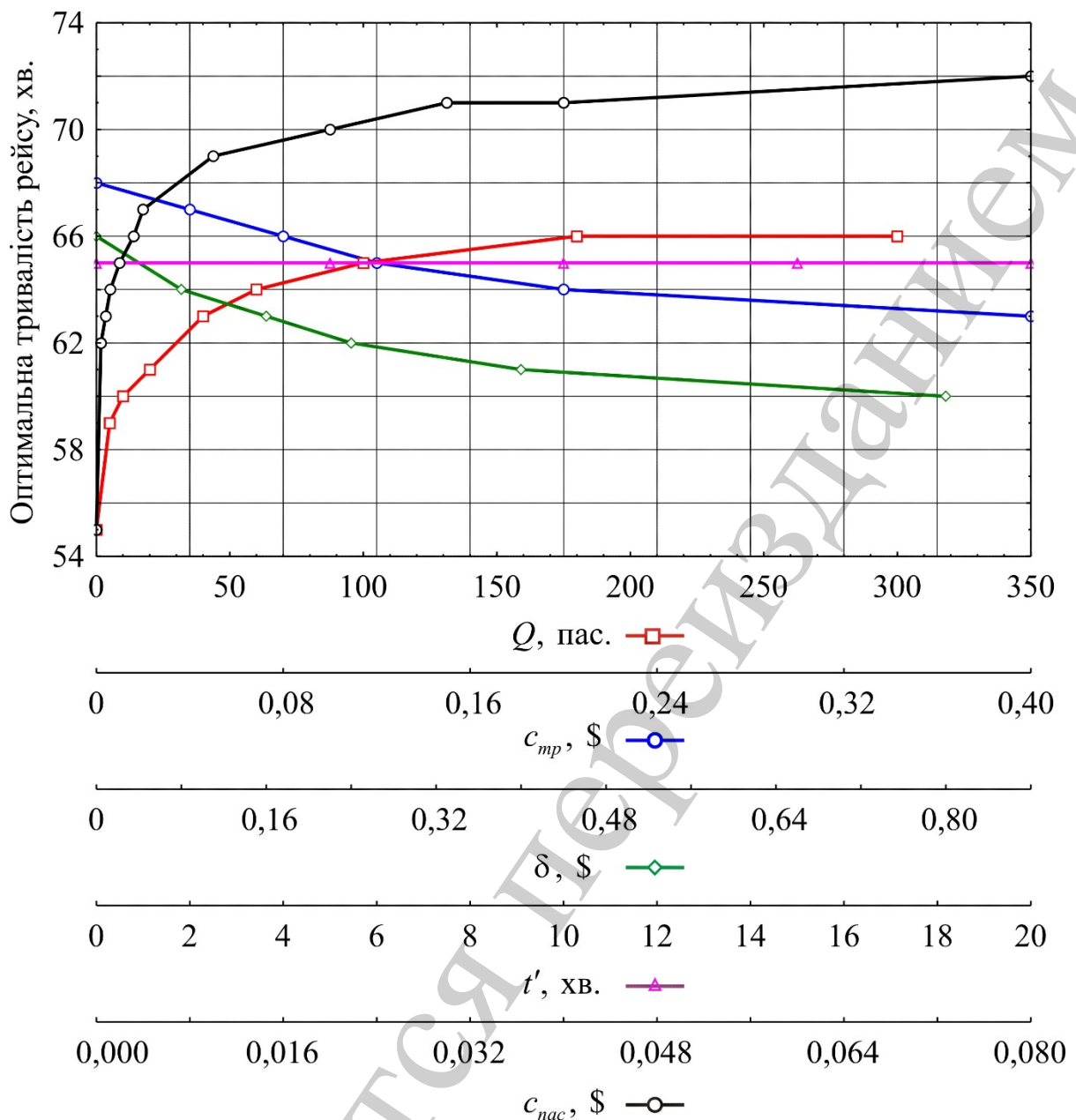


Рис. 3. Характеристичний графік залежності оптимальної тривалості рейсу від параметрів моделі

Вплив прибутку, що отримує транспортний оператор від перевезення одного пасажирів. Прибуток, що отримує транспортний оператор від перевезення одного пасажирів, є відношенням різниці між доходом від надання послуг з перевезення пасажирів і експлуатаційними витратами до обсягу перевезень пасажирів на маршруті. При збільшенні значення δ , оптимальна тривалість рейсу на маршруті нелінійно зменшується. У практичних умовах оцінку величини δ можна виконати за допомогою відомих значень тарифу на перевезення T та планової рентабельності перевезень R за формулою:

$$\delta = \frac{T \cdot R}{1 + R} \quad (27)$$

Якщо, наприклад, величина тарифу (вартість проїзду) складає $T=0,16$ дол. США, а планова рентабельність перевезень $R=0,15$ (15%), маємо $\delta=(0,16 \cdot 0,15)/(1+0,15)=0,021$ дол. США.

Вплив витрат пасажирів на очікування МТЗ на зупинці в одиницю часу. Цей параметр визначається вартістю, так званої, однієї *пасажиро-години* або більш загального поняття *вартості транспортного часу* (VTTC, Value of Travel Time Savings) і носить доволі суб'єктивний характер. Він є показником, що характеризує потенційні витрати пасажирів внаслідок пасивного очікування транспорту на зупинці. При цьому величина c_{nac} може оцінюватися як з точки зору пасажирів, так і з точки зору перевізника або держави в цілому [25]. На міському пасажирському транспорті їй рекомендується приймати у межах 35...60% середньодушового доходу громадянина в одиницю часу [26].

За даними головного управління статистики в Запорізькій області [27], середньомісячний дохід на душу населення в області у 2016 році склав 1 тис. 686 дол. США, що дорівнює 0,842 дол. США/год. при річному фонді робочого часу 2003 години. Таким чином, діапазон змінювання величини c_{nac} може бути оцінений у межах 0,29...0,50 дол. США/год або 0,005...0,008 дол. США/хв. При збільшенні величини c_{nac} оптимальна тривалість рейсу нелінійно зростає (рис. 3), поширюючись практично на увесь діапазон її хронометражних значень, причому найбільші темпи зростання припадають саме на інтервал $c_{nac} \in [0; 0,008]$. Тож, відповідальний вибір величини c_{nac} у пропонованій оптимізаційній моделі носить визначальний характер.

Вплив тривалості міжрейсового простою МТЗ на кінцевій зупинці маршруту. Як видно з рис. 3, тривалість міжрейсового простою МТЗ на кінцевій зупинці маршруту t' майже не впливає на величину оптимальної тривалості виконання рейсу на маршруті, тож у практичних розрахунках нею можна знехтувати.

7. SWOT-аналіз результатів дослідження

Strengths. Серед сильних сторін проведеного дослідження слід відзначити універсальність розробленого методу по відношенню до характеристик випадкової величини тривалості виконання рейсу на маршруті. Це дає можливість визначити оптимальну тривалість рейсу для довільного закону розподілу її випадкової величини, поданого у аналітичному або табличному вигляді, чи безпосередньо за даними вибірки фактичних хронометражних спостережень.

Weaknesses. До слабких сторін проведеного дослідження слід віднести припущення, що середній час очікування пасажирів на зупинці при затримці відправлення МТЗ у рейс збільшується на величину цієї затримки. Таким чином, не врахованими є додаткові витрати часу, пов'язані з нерегулярністю руху МТЗ. Крім того, як показано у [28], призначення планової тривалості рейсу меншою, ніж її математичне очікування, призводить у граничному випадку до фактичного невиконання розкладу руху на маршруті. З огляду на це, отримане

значення оптимальної тривалості рейсу на маршруті, може підлягати коригуванню.

Opportunities. Додаткові можливості, що відкриваються при застосуванні розробленого методу, полягають у можливості оперативного коригування планової тривалості виконання рейсів. Це стає можливим за умови автоматизованого збирання хронометражних даних про тривалість елементів транспортного процесу пасажирських перевезень у містах за допомогою використання систем GPS-моніторингу за рухом МТЗ. При цьому накопичені статистичні дані можуть бути використані як для аналізу виконання встановленого розкладу та регулярності руху, так і для прогнозування змінювання планових показників під дією зовнішніх чинників. До таких чинників, зокрема, можна віднести: зміни рівня завантаження міських магістралей рухом, режимів світлофорного регулювання на перехрестях, типу рухомого складу на маршрутах, відкриття нових або закриття існуючих маршрутів, тощо.

Threats. Складності у використанні розробленого методу у практичних умовах полягають у суб'єктивності підходу до визначення вартості часу очікування пасажира, яка, між тим, суттєво впливає на результати розрахунку. Величина вартості транспортного часу визначається загальним станом економіки країни і на сьогодні в Україні є значно меншою, ніж у економічно розвинених країнах світу. Оскільки зменшення цієї величини зменшує планову тривалість рейсу і, таким чином, надійність виконання розкладу руху на маршруті, використання розробленого методу для маршрутів з відносно низькою частотою руху (з інтервалами руху понад 10 хвилин) є обмеженим.

8. Висновки

1. Розроблено оптимізаційну модель планування тривалості рейсу і оборотного рейсу на міському маршруті громадського транспорту, яка враховує імовірнісний характер транспортного процесу перевезень пасажирів, інтереси транспортного оператора та пасажирів. Отримані аналітичні залежності для визначення оптимального значення тривалості рейсу для випадків її нормального та рівномірного розподілу.

На прикладі міського тролейбусного маршруту № 14 міста Запоріжжя визначено оптимальну тривалість рейсів у кожному з напрямків, що є випадковими величинами, розподіленими за нормальним законом розподілу. У порівнянні з існуючими плановими показниками на маршруті, сумарна тривалість виконання рейсів за напрямками після оптимізації збільшується на 3 хв., що дає зменшення узагальнених витрат у розрахунку на один виконаний зворотний рейс з $C_{\Sigma}^{\min} = 1,43$ дол. США до $C_{\Sigma}^{\min} = 1,28$ дол. США, тобто майже на 12 %.

2. На підставі емпіричних даних, отриманих при комплексному обстеженні пасажирських потоків у місті Запоріжжя (Україна) у 2017 році, проведено факторне дослідження розробленої моделі. Це дозволило отримати характер та ступінь впливу її параметрів на величину оптимальної тривалості рейсу на

маршруті. Встановлено, що величина тривалості міжрейсового простою МТЗ на кінцевих зупинках у діапазоні використовуваних на практиці значень $t' = 0 \dots 20$ хв. практично не впливає на величину планової тривалості виконання рейсів. Подано рекомендації щодо встановлення значень параметрів моделі у практичних розрахунках.

References

1. Ceder A. Public transit planning and operation: theory, modeling and practice. Oxford: Elsevier, Butterworth-Heinemann, 2007. 626 p.
2. Spirin I. V. Perevozki passazhirov gorodskim transportom. Moscow: IKTS «Akademkniga», 2004. 413 p.
3. Kuzkin O. F. Service regularity investigation of fixed-route taxi during on-peak hours // Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. 2015. Vol. 5, No. 3 (77). P. 14–22. doi:[10.15587/1729-4061.2015.51361](https://doi.org/10.15587/1729-4061.2015.51361)
4. Babushkin H. F., Kuzkin O. F., Yudin V. P. Transportno-ekolohichni problemy mista Zaporizhzhia // Novi materialy i tekhnologii v metalurhii ta mashynobuduvanni. 2010. Vol. 1. P. 144–146.
5. Artynov A. P., Skaletskiy V. V. Avtomatizatsiya protsessov planirovaniya i upravleniya transportnymi sistemami. Moscow: Nauka, 1981. 280 p.
6. Larin O. N. Organizatsiya passazhirskikh perevozok. Chelyabinsk: YUUrGU, 2005. 104 p.
7. Efremov I. S., Kobozev V. A., Yudin V. A. Teoriya gorodskikh passazhirskikh perevozok. Moscow: Vysshaya shkola, 1980. 535 p.
8. Highway capacity manual 2010 / Ryus P. et al. // TR News. Washington D.C.: Transportation Research Board, National Research Council, 2010. Vol. 273. P. 45–48.
9. Islam M. K. Reliability Analysis of Public Transit Systems Using Stochastic Simulation: proceedings // World Transit Research. Canberra, 2010. 13 p.
10. Transit Capacity and Quality of Service Manual: TRCP Report 165. Washington D.C.: Transportation Research Board, 2013. 685 p. doi:[10.17226/24766](https://doi.org/10.17226/24766)
11. Planning, operation, and control of bus transport systems: A literature review / Ibarra-Rojas O. J. et al. // Transportation Research Part B: Methodological. 2015. Vol. 77. P. 38–75. doi:[10.1016/j.trb.2015.03.002](https://doi.org/10.1016/j.trb.2015.03.002)
12. Diab E. I., El-Geneidy A. M. Variation in bus transit service: understanding the impacts of various improvement strategies on transit service reliability // Public Transport. 2013. Vol. 4, No. 3. P. 209–231. doi:[10.1007/s12469-013-0061-0](https://doi.org/10.1007/s12469-013-0061-0)
13. El-Geneidy A. M., Horning J., Krizek K. J. Analyzing transit service reliability using detailed data from automatic vehicular locator systems // Journal of Advanced Transportation. 2011. Vol. 45, No. 1. P. 66–79. doi:[10.1002/atr.134](https://doi.org/10.1002/atr.134)
14. Davidich Yu. A., Kalyuzhnyy M. V. Normirovanie skorosti dvizheniya gorodskogo passazhirskogo transporta s uchetom kharakteristik marshruta // Visti avtomobil'no-dorozhn'ogo institutu. 2012. Vol. 1 (14). P. 11–17.
15. El-Geneidy A., Hourdos J., Horning J. Bus Transit Service Planning and Operations in a Competitive Environment // Journal of Public Transportation. 2009. Vol. 12, No. 3. P. 39–59. doi:[10.5038/2375-0901.12.3.3](https://doi.org/10.5038/2375-0901.12.3.3)

16. Wu Y., Tang J., Gong J. Optimization Model for Single Bus Route Schedule Design Problem with Stochastic Travel Time // Journal of Northeastern University: Natural Science. 2015. Vol. 36, No. 10. P. 1393–1397. doi:[10.3969/j.issn.1005-3026.2015.10.006](https://doi.org/10.3969/j.issn.1005-3026.2015.10.006)
17. Bus Travel Time Deviation Analysis Using Automatic Vehicle Location Data and Structural Equation Modeling / Gong X. et al. // Mathematical Problems in Engineering. 2015. Vol. 2015. P. 1–9. doi:[10.1155/2015/410234](https://doi.org/10.1155/2015/410234)
18. Mazloumi E., Currie G., Rose G. Using GPS Data to Gain Insight into Public Transport Travel Time Variability // Journal of Transportation Engineering. 2010. Vol. 136, No. 7. P. 623–631. doi:[10.1061/\(asce\)te.1943-5436.0000126](https://doi.org/10.1061/(asce)te.1943-5436.0000126)
19. Using Bus Probe Data for Analysis of Travel Time Variability / Uno N. et al. // Journal of Intelligent Transportation Systems. 2009. Vol. 13, No. 1. P. 2–15. doi:[10.1080/15472450802644439](https://doi.org/10.1080/15472450802644439)
20. Bus travel time reliability analysis: a case study / Qu X. et al. // Proceedings of the Institution of Civil Engineers – Transport. 2014. Vol. 167, No. 3. P. 178–184. doi:[10.1680/tran.13.00009](https://doi.org/10.1680/tran.13.00009)
21. Transit System Analysis and Optimization in Montgomery County / Acosta C. et al. Worcester: Worcester Polytechnic Institute, 2011. 86 p.
22. Improving Bus Transit On-Time Performance through the Use of AVL Data (final). Pascal Systems Inc. Latham, 2014. 28 p.
23. Sahoo P. Probability and mathematical statistics. Louisville: University of Louisville, 2013. 686 p.
24. Kobzar A. I. Prikladnaya matematicheskaya statistika. Dlya inzhenerov i nauchnykh rabotnikov. Moscow: FIZMATLIT, 2006. 816 p.
25. Faktor skorosti kak ekonomicheskaya kategoriya passazhirskikh transportnykh sistem v gorodskikh aglomeratsiyakh: proceedings / Chetchuev M. V. et al. // Magnitolevitatsionnye transportnye sistemy i tekhnologii. Saint Petersburg, 2014. P. 205–211.
26. Mackie P. J., Jara-Diaz S., Fowkes A. S. The value of travel time savings in evaluation // Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review. 2001. Vol. 37, No. 2–3. P. 91–106. doi:[10.1016/s1366-5545\(00\)00013-2](https://doi.org/10.1016/s1366-5545(00)00013-2)
27. Holovne upravlinnia statystyky v Zaporizkii oblasti. URL: <http://www.zp.ukrstat.gov.ua/> (Last accessed: 08.03.2018).
28. Zhao J., Dessouky M., Bukkapatnam S. Optimal Slack Time for Schedule-Based Transit Operations // Transportation Science. 2006. Vol. 40, No. 4. P. 529–539. doi:[10.1287/trsc.1060.0170](https://doi.org/10.1287/trsc.1060.0170)