УДК 519.718
DOI: 10.15587/2312-8372.2018.140351

ДОСЛІДЖЕННЯ ПРОТОКОЛІВ МІНІМІЗАЦІЇ 5-РОЗРЯДНИХ БУЛЕВИХ ФУНКЦІЙ КОМБІНАТОРНИМ МЕТОДОМ

Різник В. В., Соломко М. Т.

Об'єктом дослідження є комбінаторний метод мінімізації 5-розрядних булевих функцій. Одним з найбільш проблемних місць мінімізації булевих функцій є складність алгоритму мінімізації та гарантія отримання мінімальної функції.

У ході дослідження використовувались протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій, які застосовуються за наявності у структурі таблиці істинності заданої функції повної бінарної комбінаторної системи з повторенням або неповної бінарної комбінаторної системи з повторенням. Операційні властивості протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій ґрунтуються на законах та аксіомах алгебри логіки.

Отримано зменшення складності процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторним методом, збільшення ймовірністі гарантованої мінімізації 5-розрядних булевих функцій. Це пов'язано з тим, що запропонований метод мінімізації 5-розрядних булевих функцій має ряд особливостей вирішення задачі мінімізації логічної функції, зокрема:

– математичний апарат блок-схеми з повторенням дає можливість отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності;

– рівносильні перетворення графічними образами у вигляді двовимірних матриць за рахунок більшої інформаційної ємності спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень;

– протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій складають бібліотеку протоколів для процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій як стандартні процедури, тому застосування окремого такого протоколу для змінних 5-розрядних булевих функцій зводиться до проведення одного алгебричного перетворення.

Завдяки цьому забезпечується можливість отримати оптимальне зменшення кількості змінних функцій без втрати її функціональності. Ефективність застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу демонструється прикладами мінімізації функції, запозичених з робіт інших авторів з метою порівняння.

У порівнянні з аналогічними відомими методами мінімізації булевих функцій це забезпечує:

– меншу складність процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій;

– збільшення ймовірності гарантованої мінімізації 5-розрядних булевих функцій.

– удосконалення алгебричного методу мінімізації булевої функції за

рахунок табличної організації комбінаторного методу, впровадження апарату образного перетворення та протоколів мінімізації.

***Ключові слова**: метод мінімізації, мінімізація логічної функції, блок-схема з повторенням, протоколи мінімізації булевих функцій.*

1. Вступ

Проблема мінімізації диз'юнктивної нормальної форми (ДНФ) логічної функції є однією з багато-екстремальних логіко-комбінаторних задач і зводиться до оптимального зменшення кількості логічних елементів вентильної схеми без втрати її функціональності. Слід зазначити, що у загальній постановці дана задача до тепер не вирішена, однак добре досліджена у класі диз'юнктивно-кон'юнктивних нормальних форм (ДКНФ).

В [1, 2] розглянуто комбінаторний метод мінімізації булевих функцій, особливості якого полягають у більшій інформативності процесу вирішення задачі, порівняно з алгебричним способом мінімізації функції, за рахунок табличної організації та впровадження апарату образного перетворення.

У даній роботі представлено застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу. Об'єктом вирішення задачі мінімізації булевої функції комбінаторним методом є блок-схема з повторенням, властивості якої, у свою чергу, дозволяють доповнити правила алгебри логіки новими правилами спрощення функції, зокрема у вигляді протоколу мінімізації.

Еволюція методів спрощення логічних функцій є результатом невпинної оптимізації, тому актуальними залишаються дослідження направлені, зокрема, на вдосконалення таких чинників як методологія мінімізації логічної функції, забезпечення гарантії отримання мінімальної функції, вартості технології мінімізації логічної функції.

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

Об'єктом дослідження є *протоколи мінімізації 5-розрядних функцій*, які застосовуються за наявності у структурі таблиці істинності повної, або неповної бінарних комбінаторних систем з повторенням.

Протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу складають бібліотеку протоколів для процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій як стандартні процедури, тому застосування окремого такого протоколу зводиться до проведення одного алгебричного перетворення.

Ефективність застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу полягає у суттєвому спрощенні процедури мінімізації логічних функцій, що дозволяє обходитись без апаратно-програмних засобів автоматизації процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій.

Недоліки застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторним методом пов'язані з малим об'ємом існуючих теоретичних розробок для їх виявлення, тому перспектива застосування протоколів мінімізації 5-розрядних логічних функцій ґрунтується на практичних шансах оптимальної мінімізації логічних функцій. При збільшенні часу обчислень під час мінімізації функції комбінаторним методом необхідним є пошук нових протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій та розширення бібліотеки протоколів.

3. Мета та задачі дослідження

Метою роботи є спрощення процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій за допомогою нових протоколів мінімізації комбінаторного методу.

Для досягнення поставленої мети необхідно вирішити такі задачі:

1. Встановити адекватність застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу для процесу мінімізацій булевих функцій.
2. Визначити операційні властивості протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій при використанні структур повної та неповної бінарних комбінаторних систем з повторенням.
3. Провести верифікацію комбінаторного методу при застосуванні протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій.
4. Провести порівняльний аналіз продуктивності та складності алгоритмів мінімізації булевих функцій, отриманих за допомогою протоколів 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу, з іншими методами мінімізації.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

Умови логічного зведення до мінімуму булевої функції, поданої у ДНФ, розглядаються у [3]. Якщо функція задовольняє таким умовам, то для її спрощення застосовують класичний алгоритм мінімізації Квайна-Мак-Класкі, що допускає автоматизацію. Зазначається, що число змінних функції для коду програми обмежується пам'яттю комп'ютера. Автор публікації [3] описує метод оптимізації, коли процес включає в себе не тільки пошук еквівалентного логічного виразу, але й залучає визначення конкретних умов, за яких логічні вирази можна ще більше скоротити. Ці типи елементів у логічному дизайні розглядаються як «ступінь свободи». У таких випадках користувач може оптимізувати заданий дизайн на підставі ступеня свободи. Тому пошук альтернативних рішень є бажаним, оскільки він може забезпечити оптимальний булевий вираз у підсумку.

Узагальнені правила спрощення кон'юнктермів у поліноміальному теоретико-множинному форматі, які ґрунтуються на запропонованих теоремах для різних початкових умов перетворення пари кон'юнктермів, геммінгова відстань між якими може бути довільна, розглянуті у публікації [4]. Зазначені правила можуть бути корисними для мінімізації у поліноміальному теоретико-множинному форматі довільних логічних функцій від *n* змінних. Ефективність запропонованих правил демонструється прикладами мінімізації функції, запозичених з робіт відомих авторів з метою порівняння результатів. З огляду на порівняльні приклади запропоновані правила дають підставу для підтвердження доцільності застосування їх у процедурах мінімізації будь-якої логічної функції від *n* змінних у поліноміальній формі.

Мінімізація булевої функції з використанням таблиці істинності, в якій послідовно зменшується одна змінна поки всі змінні не вичерпаються представлена у роботі [5]. У стандартному методі таблиця істинності (ТІ) відображає задану логічну функцією. Тоді функція виражається як сума мінімальних умов, що відповідають наборам змінних, на яких функція отримує значення одиниці. Нарешті, ця функція зменшується за допомогою булевих ідентичностей. Таким чином, всі спрощення концентруються в одному місці після ТІ. Ця процедура не завжди приводить до мінімальної реалізації. У роботі [5] розглянуто спрощення, що наприкінці кожного етапу здійснює скорочення ТІ. Показано, що метод є системним і безумовно веде до мінімальної функції. Він простіший в експлуатації, ніж на основі тільки булевих топонімів, карт Карно, Quine-McClusky та може обробляти будь-яку кількість змінних. Це пояснюється декількома прикладами.

Алгоритм і програма для мінімізації комбінаційних логічних функцій до 20 змінних представлені у [6], де число змінних обмежується пам'яттю комп'ютерної системи. Алгоритм заснований на послідовній кластеризації термів, починаючи з групування термів з однією зміною. Алгоритм кластеризації закінчується тоді, коли змінні не можуть більше бути згруповані. Цей алгоритм аналогічний алгоритму Квайна-Мак-Класкі, але він є простішим, оскільки усуває ряд дій алгоритму Квайна-Мак-Класкі.

Метод логіко-мінімізаційного стиснення зображень, який залежить від логічної функції демонструє робота [7]. Процес мінімізації розглядає сусідні пікселі зображення як роз'єднані мінтерми, що представляють логічну функцію та стискає 24-розрядні кольорові зображення за допомогою процедури мінімізації функції. Коефіцієнт стиснення такого методу у середньому на 25 % більший порівняно з існуючими методами стиснення зображень.

Використання генетичного алгоритму для вибору побічних об'єктів процедури мінімізації логічної функції за допомогою карти Карно демонструє робота [8].

Новий евристичний алгоритм для максимальної мінімізації булевих функцій представлено у [9]. Для реалізації запропонованого алгоритму використовуються графічні дані та представлені умови для досягнення максимального ступеня мінімізації булевої функції.

Дискусія про роль ступеня автосиметрії (autosymmetry) змінних булевої функції і чому вона заслуговує на увагу стосовно мінімізації логічної функції представлена у [10]. Закономірність змінних булевої функції може бути виражена ступенем автосиметрії, що у підсумку дає новий інструмент ефективної мінімізації.

Оптимальне спрощення булевих функцій за допомогою карт Карно з використанням об'єктно-орієнтованого алгоритму мінімізації та аналізом продуктивності запропонованого алгоритму розглядається в [11].

Спосіб збільшення ефективності мінімізації логічної функції, застосовуючи М-терми демонструє робота [12]. Зазначається, що реалізація методу можлива для будь-якої кількості змінних.

На відміну від розглянутих джерел розділу 4, у даній роботі об'єктом вирішення задачі є протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторним методом за наявності у структурі таблиці істинності повної, або неповної бінарної комбінаторних систем з повторенням.

Математичний апарат блок-схеми з повторенням дає можливість отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності. Рівносильні перетворення графічними образами у вигляді двовимірних матриць за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність, тому спроможні з ефектом замінити вербальні процедури алгебричних перетворень.

5. Методи дослідження

5.1. Алгоритм мінімізації булевих функцій комбінаторним методом

Мінімізація логічної функції представленої у ДДНФ з використанням блок-схеми з повторенням у частині склеювання змінних зводиться до пошуку блоків з однаковими змінними у відповідних розрядах, за виключенням однієї змінної. Враховуючи табличну організацію комбінаторного методу, це дає змогу підвищити ефективність пошуку мінімальної функції [1, 2].

Проведення мінімізації логічних функцій комбінаторним методом передбачає наступний алгоритм:

- а першому кроці виявляють блоки (конституанти) зі змінними, для яких можлива операція супер-склеювання змінних; у випадку відсутності операції супер-склеювання проводиться операція простого склеювання;
- наступним кроком здійснюють пошук наборів пар блоків (імплікант) з можливістю їх мінімізації заміщенням (склеюванням, поглинанням) змінних у цих парах. Отримані набори блоків знову мінімізують подібним способом, і т. д. – до отримання тупикової ДНФ (ТДНФ);
- у загальному випадку на прикінцевих кроках мінімізації можливим є застосування методу Блейка-Порецького [13], а також збільшення кількості змінних зі значенням одиниці.

Серед множини ТДНФ містяться й мінімальні функції (МДНФ). Після мінімізації логічної функції проводиться верифікація мінімізованої функції, застосовуючи задану таблицю істинності.

Початок процедури мінімізації комбінаторним методом зводиться до пошуку локального екстремуму мінімальної функції. Однак апарат алгебричних перетворень методу дозволяє здійснювати переходи з одного локального екстремуму мінімальної функції до іншого, що, таким чином, дозволяє знаходити глобальний екстремум мінімальної функції.

Під час мінімізації логічних функцій комбінаторним методом, використовуються такі правила алгебри логіки [1]:

– склеювання змінних:

$$ab + a\bar{b} = a;$$

– узагальнене склеювання змінних:

$$xy + \bar{x}z = xy + \bar{x}z + yz;$$

– заміщення змінної:

$$a + \bar{a}b = a + b;$$

– поглинання змінної:

$$ab + a = a(b + 1) = a;$$

– ідемподентність змінних:

$$a + a = a,\ aa = a;$$

– доповнення змінної:

$$a + \bar{a} = 1,\ a\bar{a} = 0;$$

– повторення константи:

$$a + 0 = a,\ a \cdot 1 = a$$

– та інші.

Алгебричні перетворення доцільно замінити рівносильними перетвореннями за допомогою підматриць (графічних образів). Процедуру склеювання за допомогою підматриць можна продемонструвати так:

$$\overline{x}_1\overline{x}_2 + \overline{x}_1 x_2 = \overline{x}_1(\overline{x}_2 + x_2) = \overline{x}_1,$$

$$\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \rightarrow 0 \quad ,$$

$$x_1x_2 + \overline{x}_1x_2 + x_2(x_1 + \overline{x}_1) = x_2,$$

$$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \rightarrow 1 .$$

За допомогою підматриць (графічних образів) можна представити й інші алгебричні перетворення [1, 2].

Приклад 1. Мінімізувати логічну функцію

$F(\mathrm{a,b,c,d}) = \Sigma(3,7,11,12,13,14,15)$ (табл. 1) алгебричним методом. Примітка: значення в Σ є мінтермами для рядків, коли функція $F(\mathrm{a,b,c,d})$ повертає "1" на виході.

Таблиця 1

Таблиця істинності логічної функції $F(\mathrm{a,b,c,d})$

№ з/п	a	b	c	d	a	b	c	d	F
3	0	0	1	1	$\bar{a}$	$\bar{b}$	c	d	**1**
7	0	1	1	1	$\bar{a}$	b	c	d	**1**
11	1	0	1	1	a	$\bar{b}$	c	d	**1**
12	1	1	0	0	a	b	$\bar{c}$	$\bar{d}$	**1**
13	1	1	0	1	a	b	$\bar{c}$	d	**1**
14	1	1	1	0	a	b	c	$\bar{d}$	**1**
15	1	1	1	1	a	b	c	d	**1**

$$
\begin{aligned}
&F(a,b,c,d) = \Sigma(3,7,11,12,13,14,15) = \\
&= \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bcd + a\bar{b}cd + ab\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + abc\bar{d} + abcd = \\
&= cd(\bar{a}\bar{b} + \bar{a}b + a\bar{b}) + ab(\bar{c}\bar{d} + \bar{c}d + c\bar{d} + cd) = \\
&= cd(\bar{a}[\bar{b} + b] + a\bar{b}) + ab(\bar{c}[\bar{d} + d] + c[\bar{d} + d]) = \\
&= cd(\bar{a}[1] + a\bar{b}) + ab(\bar{c}[1] + c[1]) = ab + a\bar{b}cd + \bar{a}cd = \\
&= ab + cd(a\bar{b} + \bar{a}) = ab + cd(a + \bar{a})(\bar{a} + \bar{b}) = ab + \bar{a}cd + \bar{b}cd = \\
&= ab + cd(\bar{a} + \bar{b}) = ab + cd.
\end{aligned}
$$

Приклад 2. Мінімізувати логічну функцію $F(\mathrm{a,b,c,d}) = \Sigma(3,7,11,12,13,14,15)$ комбінаторним методом.

$$
F = \left|\begin{array}{c|cccc} 3 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} \sim & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sim & \sim \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} \sim & 0 & 1 & 1 \\ \sim & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sim & \sim \end{array}\right| = \left|\begin{array}{cccc} \sim & \sim & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \sim & \sim \end{array}\right|.
$$

Мінімізована функція:

$F = ab + cd.$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків 12–15, які виділені червоним кольором. Результат мінімізації комбінаторним методом збігається з результатом мінімізації, отриманим за допомогою алгебричного методу, однак процес мінімізації функції комбінаторним методом є простішим.

Приклад 3. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13) [14].

У [14] мінімізація функції зводиться до синтезу інфімумної диз'юктивної нормальної форми (ІДНФ) логічної функції, за допомогою досконалого матричного розміщення (ДМР) 4-вимірного куба E^4 (рис. 1). Вершини куба E^4 заданої функції, на яких $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = 1$ виділені затемненням. Затемнені вершини відповідають блокам таблиці істинності Σ(0, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 10, 11, 12, 13) заданої логічної функції.

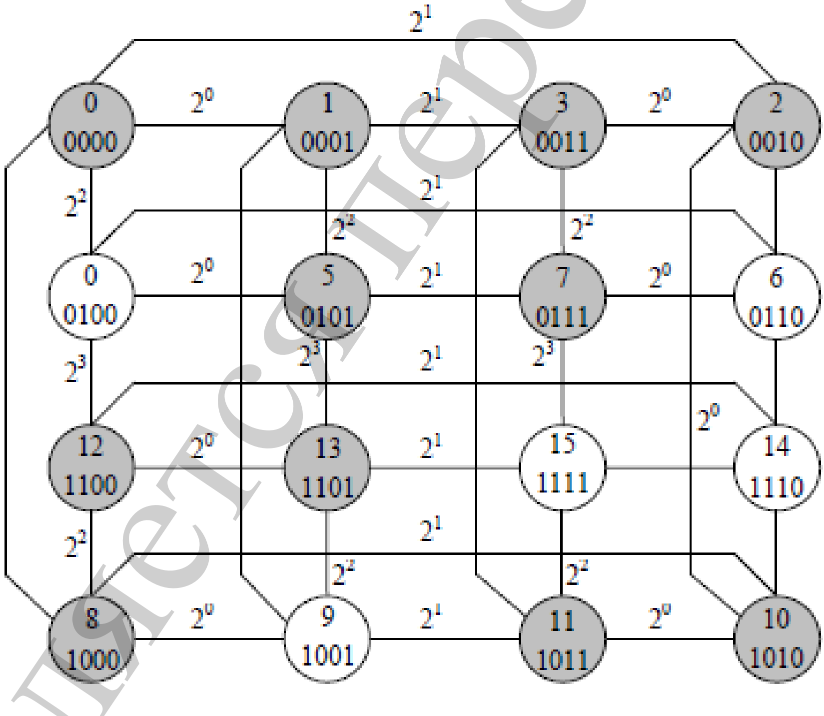

Рис. 1. Досконале матричне розміщення 4-вимірного куба E^4

Мінімізація функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ комбінаторним методом зводиться до наступної процедури:

$$F=\left|\begin{array}{c|cccc}0&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\2&0&0&1&0\\3&0&0&1&1\\5&0&1&0&1\\7&0&1&1&1\\8&1&0&0&0\\10&1&0&1&0\\11&1&0&1&1\\12&1&1&0&0\\13&1&1&0&1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}\sim&0&0&0\\0&\sim&0&1\\\sim&0&1&\sim\\0&1&1&1\\1&1&0&\sim\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}\sim&0&\sim&0\\0&\sim&0&1\\\sim&0&1&\sim\\0&\sim&1&1\\1&1&0&\sim\end{array}\right|=\left|\begin{array}{cccc}\sim&0&\sim&0\\0&\sim&\sim&1\\\sim&0&1&\sim\\1&1&0&\sim\end{array}\right|.$$

Блоки 2, 3, 10, 11 (виділені червоним кольором) мінімізовані за протоколом супер-склеювання змінних. Інші блоки мінімізовані за протоколами простого склеювання та напівсклеювання [1, 2].

Мінімізована функція:

$$F=\overline{x}_2\overline{x}_4+\overline{x}_1x_4+\overline{x}_2x_3+x_1x_2\overline{x}_3. \qquad (1)$$

Результат мінімізації (1) збігається з результатом синтезу інфімумної диз'юктивної нормальної форми логічної функції [14], однак комбінаторний метод є простішою процедурою.

5.2. Протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій

Для 5-розрядної логічної функції протоколи супер-склеювання змінних будуть такі:

– перший протокол:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x \\ 0 & 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 1 & 0 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x \\ 0 & 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 0 & 0 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 & 1 & x \\ 1 & 0 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & 0 & 0 & x \\ 1 & 1 & 0 & 1 & x \\ 1 & 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x; \qquad (2)$$

– другий протокол:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & 1 & x & y \\ 0 & 1 & 0 & x & y \\ 0 & 1 & 1 & x & y \\ 1 & 0 & 0 & x & y \\ 1 & 0 & 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & 1 & x & y \end{vmatrix} = xy; \qquad (3)$$

– третє протокол:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y & z \\ 0 & 1 & x & y & z \\ 1 & 0 & x & y & z \\ 1 & 1 & x & y & z \end{vmatrix} = xyz; \qquad (4)$$

– четвертий протокол:

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & t \\ 1 & x & y & z & t \end{vmatrix} = xyzt. \qquad (5)$$

Перший протокол (2) використовує комбінаторну систему 2-(4, 16)-design, другий (3) – 2-(3, 8)-design, третій (4) – 2-(2, 4)-design, четвертий (5) – 2-(1, 2)-design.

Змінні x, y, z, t, що утворюють повну бінарну комбінаторну систему з повторенням 2-(n, b)-design, можуть займати будь-який розряд мінтерма 5-розрядної логічної функції.

Протокол супер-склеювання змінних на конфігурації з двома комбінаторними системами 2-(2, 4)-design може мати такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & \sim & 1 & \sim & 1 \end{vmatrix} \qquad (6)$$

або такий:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & \sim & 0 & 1 & \sim \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Матриця (6) вміщує дві конфігурації, що позначені червоним та синім кольором з системами 2-(2, 4)-design. Результатом мінімізації конфігурації червоного кольору буде блок:

$$\begin{vmatrix} \sim & \sim & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Результатом мінімізації конфігурації синього кольору буде блок:

$$\left| \sim \quad \sim \quad 1 \quad 1 \quad 1 \right|. \tag{9}$$

Операція склеювання змінних блоків (8) і (9) дає підсумковий результат протоколу супер-склеювання змінних на конфігурації з двома комбінаторними системами 2-(2, 4)-design:

$$\left| \sim \quad \sim \quad 1 \quad \sim \quad 1 \right|.$$

Протокол простого склеювання змінних на конфігурації з двома комбінаторними системами 2-(1, 2)-design має, наприклад, такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \left| \sim \quad 0 \quad 0 \quad \sim \quad 0 \right|, \tag{10}$$

Матриця (10) вміщує дві конфігурації, що позначені червоним та синім кольором з системами 2-(1, 2)-design. Результат мінімізації конфігурації червоного кольору буде таким:

$$\left| 0 \quad 0 \quad 0 \quad \sim \quad 0 \right|. \tag{11}$$

Результатом мінімізації конфігурації синього кольору буде блок:

$$\left| 1 \quad 0 \quad 0 \quad \sim \quad 0 \right|. \tag{12}$$

Операція склеювання змінних блоків (11) і (12) дає підсумковий результат протоколу простого склеювання змінних на конфігурації з двома комбінаторними системами 2-(1, 2)-design:

$$\left| \sim \quad 0 \quad 0 \quad \sim \quad 0 \right|.$$

Протокол супер-склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує порівну змінні x та $\overline{x}$, з комбінаторною системою 2-(3, 8)-design з лексікографічним порядком набуває вигляду:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \bar{x} & y \\ 0 & 0 & 1 & \bar{x} & y \\ 0 & 1 & 0 & \bar{x} & y \\ 0 & 1 & 1 & \bar{x} & y \\ 1 & 0 & 0 & x & y \\ 1 & 0 & 1 & x & y \\ 1 & 1 & 0 & x & y \\ 1 & 1 & 1 & x & y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \sim & \sim & \bar{x} & y \\ 1 & \sim & \sim & x & y \end{vmatrix}. \tag{13}$$

Протокол супер-склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує порівну змінні x та $\bar{x}$, з комбінаторною системою 2-(3, 8)-design і почерговим лексікографічним порядком стане таким:

$$\begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 0 & 0 & 1 \\ y & x & 0 & 1 & 1 \\ y & x & 1 & 0 & 1 \\ y & x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & \sim & \sim & 0 \\ y & x & \sim & \sim & 1 \end{vmatrix}. \tag{14}$$

Протокол склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує порівну змінні x та $\bar{x}$, з комбінаторною системою 2-(3, 8)-design з нелексикографічним порядком, змінить форму запису:

$$\begin{vmatrix} \bar{x} & y & 0 & 1 & 1 \\ \bar{x} & y & 1 & 0 & 0 \\ \bar{x} & y & 1 & 0 & 1 \\ \bar{x} & y & 1 & 1 & 1 \\ x & y & 0 & 0 & 0 \\ x & y & 0 & 0 & 1 \\ x & y & 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{x} & y & 1 & 0 & \sim \\ \bar{x} & y & \sim & 1 & 1 \\ x & y & 0 & 0 & \sim \\ x & y & \sim & 1 & 0 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

Протокол склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує порівну змінні x та $\bar{x}$, з надлишковою 2-(3, 8)-design з нелексикографічним порядком, набуває іншого вигляду:

$$\begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 1 \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 1 & 1 & 1 \\ y & x & 0 & 0 & 1 \\ y & x & 0 & 1 & 1 \\ y & x & 1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 & 0 & 1 \\ y & x & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & \sim & \sim & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & \sim \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & \sim \\ y & x & \sim & \sim & 1 \\ y & x & 1 & \sim & \sim \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \sim & \sim & \sim & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & \sim \\ y & \sim & 1 & 0 & \sim \\ y & x & 1 & \sim & \sim \end{vmatrix}. \qquad (16)$$

У загальному випадку конфігурація таблиці істинності заданої функції, крім підматриці повної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, b)-design, вміщує й підматриці неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design, де x – число блоків неповної комбінаторної системи з повторенням. Властивості неповної комбінаторної системи з повторенням 2-(n, x/b)-design дозволяють також встановлювати протоколи, що забезпечують ефективну мінімізацію булевих функцій [2].

Протокол склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує в однаковій кількості змінні x та $\bar{x}$, з надлишковою комбінаторною системою 2-(3, 6/8)-design з нелексикографічним порядком має, наприклад, такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 1 \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 1 & 1 & 1 \\ y & x & 0 & 0 & 1 \\ y & x & 0 & 1 & 1 \\ y & x & 1 & 0 & 1 \\ y & x & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & \sim & \sim & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & \sim \\ y & x & \sim & \sim & 1 \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \sim & \sim & \sim & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & \sim \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix}. \qquad (17)$$

Протокол склеювання змінних на конфігурації, у якій присутній один стовпчик з однаковими змінними y, а другий стовпчик вміщує в неоднаковій кількості змінні x та $\bar{x}$, з надлишковою комбінаторною системою 2-(3, 6/8)-design з нелексикографічним порядком буде, наприклад, таким:

$$\begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 0 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 0 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & \sim \\ y & \bar{x} & \sim & 1 & 0 \\ y & x & \sim & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & \sim \\ y & \sim & \sim & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix} \qquad (18)$$

або таким:

$$\begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 0 & 0 & 1 \\ y & \bar{x} & 0 & 1 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 0 & 0 \\ y & \bar{x} & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 0 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 0 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 0 \\ y & x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & \sim \\ y & \bar{x} & \sim & \sim & 0 \\ y & x & \sim & 1 & 0 \\ y & x & 1 & \sim & 0 \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & \bar{x} & 0 & 0 & \sim \\ y & \bar{x} & \sim & \sim & 0 \\ y & \sim & \sim & 1 & 0 \\ y & \sim & 1 & \sim & 0 \\ y & x & 1 & 1 & \sim \end{vmatrix}. \qquad (19)$$

Протокол склеювання змінних на конфігурації з комбінаторною системою 2-(3, 6/8)-design може мати такий вигляд:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \sim & 1 & 1 \\ 0 & \sim & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \sim & 1 \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Протокол склеювання змінних на конфігурації з комбінаторною системою 2-(2, 3/4)-design є таким:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sim & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \sim & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}. \tag{21}$$

Протоколи (2)–(7), (10), (13)–(21) складають бібліотеку протоколів для процесу мінімізації 5-розрядних булевих функцій як стандартні процедури. Тому застосування окремого такого протоколу для змінних 5-розрядних булевих функцій зводиться до проведення одного алгебричного перетворення.

6. Результати дослідження

Приклад 4. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом без протоколу мінімізації, яка задана наступною таблицею істинності Σ(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 31) [1].

За одним з варіантів розв'язку спочатку виявляють пари блоків, які допускають процедури склеювання і заміщення змінних.

На першому кроці можна здійснити склеювання конституант і заміщення змінних.

$F =$	№ з/п	1					2					3					4					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0		1	
	2	0	0	0	1	0																
	3	0	0	0	1	1	0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1		
	4	0	0	1	0	0	0	0	1	0		0	0	1	0		0	0	1	0		
	5	0	0	1	0	1	0	0	1		1	0	0	1		1	0	0	1		1	
	6	0	0	1	1	1																
	7	0	1	0	0	1																
	8	0	1	0	1	1	0	1	0		1	0	1	0		1	0	1	0		1	
	9	0	1	1	0	0																
	10	0	1	1	0	1	0	1	1	0		0	1	1	0		0	1	1			=
	11	0	1	1	1	0																
	12	0	1	1	1	1	0	1	1	1												
	13	1	0	0	0	0																
	14	1	0	0	0	1	1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0		
	15	1	0	0	1	0	1	0		1	0	1	0		1	0	1	0		1	0	
	16	1	0	1	0	0	1	0	1		0	1	0	1		0	1	0	1		0	
	17	1	0	1	1	0																
	18	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	1	1		1	0	
	19	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	1	1		0	
	20	1	1	1	1	0																
	21	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1			1	1	1		

Алгебричні перетворення 1-ї матриці (результат перетворення записаний у 2-у матрицю):

▪ склеювання змінних 2 та 3 блоків

$$\overline{x_1 x_2 x_3}x_4\overline{x_5} + \overline{x_1 x_2 x_3}x_4 x_5 = \overline{x_1 x_2 x_3}x_4(\overline{x_5} + x_5) = \overline{x_1 x_2 x_3}x_4,$$

▪ склеювання і заміщення змінних 4, 5 та 6 блоків

$$\overline{x_1 x_2}x_3\overline{x_4 x_5} + \overline{x_1 x_2}x_3\overline{x_4}x_5 + \overline{x_1 x_2}x_3 x_4 x_5 = \overline{x_1 x_2}x_3 \times$$
$$\times(\overline{x_4 x_5} + \overline{x_4}x_5 + x_4 x_5) = \overline{x_1 x_2}x_3(\overline{x_4 x_5} + \overline{x_4}x_5 + \overline{x_4} + x_4 x_5) =$$
$$= \overline{x_1 x_2}x_3(\overline{x_4 x_5} + \overline{x_4}x_5 + \overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1 x_2}x_3 \times$$
$$\times(\overline{x_4}(\overline{x_5} + x_5) + \overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1 x_2}x_3(\overline{x_4} + \overline{x_4} + x_5) =$$
$$= \overline{x_1 x_2}x_3(\overline{x_4} + x_5) = \overline{x_1 x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1 x_2}x_3 x_5,$$

▪ склеювання змінних 7 та 8 блоків

$$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 + \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 x_5 = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_5 (\overline{x}_4 + x_4) = \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_5,$$

▪ склеювання змінних 9 та 10 блоків

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 x_5 = \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4 (\overline{x}_5 + x_5) = \overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4,$$

▪ склеювання змінних 11 та 12 блоків

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 x_5 = \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 (\overline{x}_5 + x_5) = \overline{x}_1 x_2 x_3 x_4,$$

▪ склеювання змінних 13 та 14 блоків

$$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 (\overline{x}_5 + x_5) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4,$$

▪ склеювання і заміщення змінних 15, 16 та 17 блоків

$$\begin{aligned}
&x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4 \overline{x}_5 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 \times \\
&\times(\overline{x}_3 x_4 + x_3 \overline{x}_4 + x_3 x_4) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 (\overline{x}_3 x_4 + x_3 x_4 + x_3 \overline{x}_4) = \\
&= x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 (\overline{x}_3 x_4 + x_3 x_4 + x_4 + x_3 \overline{x}_4) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 (x_4(\overline{x}_3 + x_3) + x_4 + x_3) = \\
&= x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 (x_4 + x_4 + x_3) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_5 (x_4 + x_3) = x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_2 x_4 \overline{x}_5,
\end{aligned}$$

▪ склеювання змінних 20 та 21 блоків

$$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 x_5 = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 (\overline{x}_5 + x_5) = x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4.$$

На **другому кроці** виконують склеювання імплікант і заміщення змінних.

Алгебричні перетворення 2-ї матриці (результат перетворення записаний у 3-ю матрицю):

▪ склеювання змінних 12 та 21 блоків

$$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_3 x_4 = x_2 x_3 x_4 (\overline{x}_1 + x_1) = x_2 x_3 x_4.$$

Алгебричні перетворення 3-ї матриці (результат перетворення записаний у 4-у матрицю):

▪ заміщення змінних для 10, 18, 19 та 21 блоків

$$\overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5} + x_1x_2x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_2x_3x_4 =$$
$$= x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3\overline{x_4} + x_1x_2x_3\overline{x_4}\,\overline{x_5} + x_2x_3x_4 +$$
$$+ x_1x_2\overline{x_3}x_4\overline{x_5} = x_2x_3(x_4 + \overline{x_1}\,\overline{x_4} + x_1\overline{x_4}\,\overline{x_5}) +$$
$$+ x_2x_4(x_3 + x_1\overline{x_3}\,\overline{x_5}) = x_2x_3(x_4 + \overline{x_1} + x_1\overline{x_5}) +$$
$$+ x_2x_4(x_3 + x_1\overline{x_5}) = x_2x_3(x_4 + \overline{x_1} + x_1\overline{x_5}) +$$
$$+ x_2x_4(x_3 + x_1\overline{x_5}) = x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3 +$$
$$+ x_1x_2x_3\overline{x_5} + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4\overline{x_5} = x_2x_3x_4 +$$
$$+ \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3\overline{x_5} + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4\overline{x_5} =$$
$$= x_2x_3x_4 + \overline{x_1}x_2x_3 + x_1x_2x_3\overline{x_5} + x_1x_2x_4\overline{x_5}.$$

▪ заміщення змінних для 1 та 3 блоків

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4 = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(\overline{x_4}x_5 + x_4) =$$
$$= \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}(x_5 + x_4) = \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_5 + \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}x_4.$$

Алгебричні перетворення 4-ї матриці (результат перетворення записаний у 5-у матрицю):

▪ склеювання змінних 15 та 18 блоків

$$x_1\overline{x_2}x_4\overline{x_5} + x_1x_2x_4\overline{x_5} = x_1x_4\overline{x_5}(\overline{x_2} + x_2) = x_1x_4\overline{x_5},$$

▪ склеювання змінних 16 та 19 блоків

$$x_1\overline{x_2}x_3\overline{x_5} + x_1x_2x_3\overline{x_5} = x_1x_3\overline{x_5}(\overline{x_2} + x_2) = x_1x_3\overline{x_5},$$

▪ заміщення змінних для 8 та 10 блоків

$$\overline{x_1}x_2\overline{x_3}x_5 + \overline{x_1}x_2x_3 = \overline{x_1}x_2(\overline{x_3}x_5 + x_3) =$$
$$= \overline{x_1}x_2(x_5 + x_3) = \overline{x_1}x_2x_5 + \overline{x_1}x_2x_3,$$

▪ заміщення змінних для 4 та 10 блоків

$$\overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3 = \overline{x_1}x_3(\overline{x_2}\,\overline{x_4} + x_2) =$$
$$= \overline{x_1}x_3(\overline{x_4} + x_2) = \overline{x_1}x_3\overline{x_4} + \overline{x_1}x_2x_3,$$

▪ склеювання змінних 1 та 5 блоків

$$\overline{x_1x_2x_3}x_5+\overline{x_1x_2}x_3x_5=\overline{x_1x_2}x_5(\overline{x_3}+x_3)=\overline{x_1x_2}x_5.$$

	№ з/п	5 x_1	5 x_2	5 x_3	5 x_4	5 x_5	6 x_1	6 x_2	6 x_3	6 x_4	6 x_5	7 x_1	7 x_2	7 x_3	7 x_4	7 x_5	8 x_1	8 x_2	8 x_3	8 x_4	8 x_5
	1																				
	2																				
	3	0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1		0	0	0	1	
	4	0		1	0		0		1	0		0		1	0						
	5	0	0			1															
	6																				
	7																				
	8	0	1			1	0				1	0				1	0				1
	9																				
=	10	0	1	1			0	1	1												
	11																				
	12																				
	13																				
	14	1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0		1	0	0	0	
	15																				
	16													1	0	0			1	0	0
	17																				
	18	1			1	0	1			1	0	1			1	0	1			1	0
	19	1		1		0	1		1		0	1		1		0					
	20																				
	21		1	1	1			1	1	1			1	1	1			1	1	1	

Алгебричні перетворення 5-ї матриці (результат перетворення записаний у 6-у матрицю):

▪ склеювання змінних 5 та 8 блоків

$$\overline{x_1x_2}x_5+\overline{x_1}x_2x_5=\overline{x_1}x_5(\overline{x_2}+x_2)=\overline{x_1}x_5.$$

Алгебричні перетворення 6-ї матриці (результат перетворення записаний у 7-у матрицю):

▪ узагальнене заміщення змінних для 4, 8 та 16 блоків

$$\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+\overline{x_1}x_2x_3+x_2x_3x_4=\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+$$
$$+x_2x_3x_4+\overline{x_1}x_2x_3=\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+x_2x_3x_4,$$

▪ узагальнене заміщення змінних для 4, та 19 блоків

$$\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+x_1x_3\overline{x_5}=\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+x_1x_3\overline{x_5}+$$
$$+x_3x_3\overline{x_4x_5}=\overline{x_1}x_3\overline{x_4}+x_1x_3\overline{x_5}+x_3\overline{x_4x_5}.$$

Алгебричні перетворення 7-ї матриці (результат перетворення записаний у 8-у матрицю):

▪ узагальнене заміщення змінних для 4, 10 та 21 блоків

$$\overline{x}_1 x_5 + x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + \overline{x}_1 x_3 \overline{x}_4 = \overline{x}_1 x_5 + x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5,$$

▪ узагальнене заміщення змінних для 16, 18 та 19 блоків

$$x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 x_4 \overline{x}_5 = x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 x_4 \overline{x}_5 + x_1 x_3 \overline{x}_5 \overline{x}_5 =$$
$$= x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 x_4 \overline{x}_5 + x_1 x_3 \overline{x}_5 = x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5 + x_1 x_4 \overline{x}_5.$$

Спроби подальшого застосування операцій алгебричного перетворення не дають результату. Отже знайдена мінімальна форма логічної функції.

$$F = \overline{x}_1 x_5 + \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 + x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 + x_1 x_4 \overline{x}_5 + x_3 \overline{x}_4 \overline{x}_5.$$

Приклад 5. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, що задана таблицею істинності Σ(1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 31) комбінаторним методом, застосовуючи протоколи мінімізації.

$$
F=\left|\begin{array}{c|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
12 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
14 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
20 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
26 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right|=
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & 1\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0
\end{array}\right|=
$$

$$
=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
0 & 1 & 1 & 1 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & \sim\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0
\end{array}\right|=
\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0
\end{array}\right|.
$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків 4, 12, 20, 28, які виділені червоним кольором. Мінімізація блоків у другій матриці, що виділені синім кольором, проведена за протоколом (17). Блоки, що виділені зеленим кольором мінімізовані протоколом (18).

Мінімізована функція:

$$
F=\overline{x}_1x_5+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4+x_2x_3x_4+x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4+x_1x_4\overline{x}_5+x_3\overline{x}_4\overline{x}_5.
$$

Протоколи (16), (19) дають інший спосіб мінімізації заданої функції:

$$F=\left|\begin{array}{r|ccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\
11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
12 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
14 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
17 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\
18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
20 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
26 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
0 & \sim & 1 & 0 & \sim\\
0 & 1 & 1 & \sim & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & \sim & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
1 & \sim & 1 & \sim & 0\\
1 & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
0 & \sim & 1 & 0 & \sim\\
0 & 1 & 1 & \sim & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & \sim & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
1 & \sim & 1 & \sim & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
0 & \sim & 1 & 0 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & \sim & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
1 & \sim & 1 & \sim & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
0 & \sim & 1 & 0 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & \sim & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0\\
1 & \sim & 1 & \sim & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & \sim & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & 0 & \sim & 0 & 0\\
1 & 0 & \sim & 1 & 0\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
0 & \sim & \sim & \sim & 1\\
0 & 0 & 0 & 1 & \sim\\
1 & 0 & 0 & 0 & \sim\\
1 & \sim & \sim & 1 & 0\\
\sim & \sim & 1 & 0 & 0\\
\sim & 1 & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|.$$

Мінімізація блоків 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 11, 12, 13, 14, 15 у першій матриці проведена за протоколом (16), а блоків 16, 17, 18, 20, 22, 26, 28, 30, 31 – за протоколом (19). Однак мінімізація у другому варіанті розв’язку з застосуванням протоколів мінімізації є складнішою, порівняно з першим варіантом. Звідси випливає, що для зменшення складності мінімізації булевої функції комбінаторним методом необхідно при виборі протоколу мінімізації надавати перевагу протоколам з операцією супер-склеювання змінних.

Порівнюючи розв’язки прикладів 4 і 5 бачимо, що процедура мінімізації з використанням протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій (приклад 5) є суттєво простішою.

Приклад 6. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(2, 3, 4, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 16, 17, 28, 29, 30, 31).

$$F = \left|\begin{array}{c|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 14 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 19 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 20 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 23 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 26 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 27 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} \sim & \sim & 0 & 1 & \sim \\ 0 & 0 & 1 & \sim & \sim \\ 0 & 1 & 1 & \sim & \sim \\ 1 & 0 & 1 & \sim & \sim \\ 1 & 1 & 1 & \sim & \sim \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} \sim & \sim & 0 & 1 & \sim \\ \sim & 0 & 1 & \sim & \sim \\ \sim & 1 & 1 & \sim & \sim \end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{ccccc} \sim & \sim & 0 & 1 & \sim \\ \sim & \sim & 1 & \sim & \sim \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} \sim & \sim & \sim & 1 & \sim \\ \sim & \sim & 1 & \sim & \sim \end{array}\right|.$$

Мінімізована функція:

$$F = x_3 + x_4.$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків:

- 4–7 (виділені синім кольором);
- 12–15 (виділені зеленим кольором);
- 20–23 (виділені бузинковим кольором);
- 28–31 (виділені фіолетовим кольором).

Мінімізація блоків 2, 3, 10, 11, 18, 19, 26, 27 у першій матриці проведена за протоколом (7).

Приклад 7. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(0, 4, 5, 13, 16, 21, 22, 23, 24, 25, 28, 29, 30, 31) [5]:

$$
F = \left|\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
23 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
24 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
25 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\sim & \sim & 1 & 0 & 1 \\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim \\
1 & 1 & 0 & 0 & \sim \\
1 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{array}\right| =
$$

$$
= \left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \sim \\
\sim & \sim & 1 & 0 & 1 \\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim \\
1 & 1 & 0 & 0 & \sim \\
1 & 1 & 1 & 0 & \sim
\end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \sim \\
\sim & \sim & 1 & 0 & 1 \\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim \\
1 & 1 & \sim & 0 & \sim
\end{array}\right|.
$$

Мінімізована функція:

$$
F = \overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} + \overline{x_1}\,\overline{x_2}x_3\overline{x_4} + x_3\overline{x_4}x_5 + x_1x_3x_4 + x_1x_2\overline{x_4}.
$$

Операція супер-склеювання змінних у першій матриці проведена для блоків 5, 13, 21, 29, які виділені синім кольором. Мінімізація блоків 22, 23, 30, 31 у першій матриці проведена за протоколом, аналогічно протоколу (6).

У табл. 2 подані результати мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ методом скорочення таблиці істинності [5] та комбінаторним методом.

Таблиця 2

Результат мінімізації функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$

Мінімізація методом скорочення таблиці істинності
$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1x_3x_4+x_1x_2\overline{x}_4+\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4x_5+\overline{x}_2x_3\overline{x}_4x_5+x_1x_3\overline{x}_4\overline{x}_5$
Мінімізація комбінаторним методом
$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)=x_1x_3x_4+x_1x_2\overline{x}_4+\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4x_5+\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4+x_3\overline{x}_4x_5$

З огляду табл. 2 бачимо, що комбінаторний метод в останньому мінтермі мінімізованої функції дає на одну вхідну змінну менше.

Приклад 8. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(0, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 14, 16, 18, 24, 26, 28, 30) [15].

$$F=\left|\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 14 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 24 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 26 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc} \sim & 0 & 0 & \sim & 0\\ 0 & 0 & \sim & 1 & 1\\ 0 & \sim & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \sim & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \sim & \sim & 0 \end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc} \sim & 0 & 0 & \sim & 0\\ 0 & 0 & \sim & 1 & 1\\ 0 & \sim & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \sim & 1\\ \sim & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & \sim & \sim & 0 \end{array}\right|.$$

Мінімізована функція:

$$F=\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_5+\overline{x}_1\overline{x}_2x_4x_5+\overline{x}_1x_3\overline{x}_4x_5+\overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_5+x_2x_3x_4\overline{x}_5+x_1x_2\overline{x}_5.$$

Мінімізація блоків 0, 2, 16, 18 у першій матриці проведена за протоколом (10). Мінімізація блоків 24, 26, 28, 30 у першій матриці проведена подібним чином.

Результат мінімізації функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)$ картою Карно [15] є такий:

F=B'C'E+ABE'+A'C'DE+A'B'CE+A'BD'E+BCDE'. (22)

Однак функція (22) не проходить верифікацію. Наприклад, при тестуванні кодом 00000 функція (22) не дає одиницю. Таким чином, у виразі мінімальної функції (22) [15] буде допущена помилка.

Приклад 9. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(0, 2, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 16, 18, 21, 23, 25, 27, 29, 31) [15].

$$F = \left|\begin{array}{c|ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 18 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 23 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 25 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 27 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} \sim & 0 & 0 & \sim & 0 \\ \sim & \sim & 1 & \sim & 1 \\ \sim & 1 & 0 & \sim & 1 \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ccccc} \sim & 0 & 0 & \sim & 0 \\ \sim & \sim & 1 & \sim & 1 \\ \sim & 1 & \sim & \sim & 1 \end{array}\right|.$$

Мінімізована функція:

$$F = \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_5 + x_3 x_5 + x_2 x_5.$$

Мінімізація блоків 5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31 у першій матриці проведена за протоколом (7). Мінімізація блоків 0, 2, 16, 18 та 9, 11, 25, 27 у першій матриці проведена за протоколом (10). Результат мінімізації заданої функції комбінаторним методом та картою Карно [15] однаковий, однак процес мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом є простішим.

Приклад 10. Мінімізувати логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом, яка задана наступною таблицею істинності Σ(0, 5, 7, 11, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 23, 24, 28, 29, 30, 31) [16].

$$F=\left|\begin{array}{c|ccccc}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
5 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\
7 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\
11 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
12 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
13 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
15 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\
16 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
21 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
22 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\
23 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1\\
24 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
28 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\
29 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\\
30 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\
31 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & \sim & 0 & 0 & 0\\
\sim & \sim & 1 & \sim & 1\\
0 & 1 & 0 & 1 & 1\\
\sim & 1 & 1 & 0 & 0\\
1 & \sim & 1 & 1 & 0
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & \sim & 0 & 0 & 0\\
\sim & \sim & 1 & \sim & 1\\
0 & 1 & \sim & 1 & 1\\
\sim & 1 & 1 & 0 & \sim\\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|.$$

Мінімізація блоків 5, 7, 13, 15, 21, 23, 29, 31 у першій матриці проведена за протоколом (6). Мінімізація блоків 0, 16, 24 у першій матриці проведена за протоколом (21). Мінімізація блоків 12, 28 та 22, 30 у першій матриці проведена за допомогою простого склеювання.

Отримана мінімальна функція (остання матриця) допускає збільшення кількості змінних зі значенням одиниці:

$$\left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & \sim & 0 & 0 & 0\\
\sim & \sim & 1 & \sim & 1\\
0 & 1 & \sim & 1 & 1\\
\sim & 1 & 1 & 0 & \sim\\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & 0 & 0 & 0\\
\sim & \sim & 1 & \sim & 1\\
0 & 1 & \sim & 1 & 1\\
\sim & 1 & 1 & 0 & \sim\\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}
\sim & 0 & 0 & 0 & 0\\
1 & 1 & \sim & 0 & 0\\
\sim & \sim & 1 & \sim & 1\\
0 & 1 & \sim & 1 & 1\\
\sim & 1 & 1 & 0 & \sim\\
1 & \sim & 1 & 1 & \sim
\end{array}\right|.$$

Мінімізована функція:

$$F=\overline{x_2 x_3 x_4 x_5}+x_1 x_2 \overline{x_4 x_5}+x_3 x_5+\overline{x_1} x_2 x_4 x_5+x_2 x_3 \overline{x_4}+x_1 x_3 x_4.$$

Результат мінімізації функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ комбінаторним методом та картою Карно [16] є однаковим.

$$F=\left|\begin{array}{c|ccccc}1&0&0&0&0&1\\2&0&0&0&1&0\\3&0&0&0&1&1\\4&0&0&1&0&0\\5&0&0&1&0&1\\7&0&0&1&1&1\\9&0&1&0&0&1\\11&0&1&0&1&1\\12&0&1&1&0&0\\13&0&1&1&0&1\\14&0&1&1&1&0\\15&0&1&1&1&1\\16&1&0&0&0&0\\17&1&0&0&0&1\\18&1&0&0&1&0\\20&1&0&1&0&0\\22&1&0&1&1&0\\26&1&1&0&1&0\\28&1&1&1&0&0\\30&1&1&1&1&0\\31&1&1&1&1&1\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&1&1\\0&0&1&0&1\\0&0&1&1&1\\0&1&0&0&1\\0&1&0&1&1\\0&1&1&0&1\\0&1&1&1&0\\0&1&1&1&1\\1&0&0&0&0\\1&0&0&0&1\\1&0&0&1&0\\1&0&1&1&0\\1&1&0&1&0\\1&1&1&1&0\\1&1&1&1&1\\\sim&\sim&1&0&0\end{array}\right|=$$

$$=\left|\begin{array}{ccccc}0&\sim&\sim&\sim&1\\0&0&0&1&\sim\\0&1&1&1&\sim\\1&0&0&0&\sim\\1&\sim&\sim&1&0\\1&1&1&1&\sim\\\sim&\sim&1&0&0\end{array}\right|=\left|\begin{array}{ccccc}0&\sim&\sim&\sim&1\\0&0&0&1&\sim\\\sim&1&1&1&\sim\\1&0&0&0&\sim\\1&\sim&\sim&1&0\\\sim&\sim&1&0&0\end{array}\right|.$$

7. SWOT-аналіз результатів досліджень

Strengths. До сильної сторони застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу можна віднести зменшення складності процесу мінімізації функції, що вигідно відрізняє комбінаторний метод у порівнянні з аналогами за такими чинниками:

– збільшенням продуктивності розумової праці (інтелектуальної складової) під час мінімізації 5-розрядних булевих функцій, що сприяє підвищенню наукового рівня дослідження протоколів мінімізації, вдосконаленню алгоритму мінімізації логічних функцій, розширенню контрольних функцій та глибшому розумінню логічних перетворень;

– меншою вартістю розробки та впровадження за рахунок скорочення потреби у застосуванні апаратно-програмних засобів автоматизації.

Порівняно з алгоритмом мінімізації булевих функцій в [1], у даній роботі об'єктом вирішення задачі є нові протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторним методом. Ефективність застосування розроблених протоколів демонструється шляхом порівняння прикладів 4 та 5 мінімізації булевих функцій без використання протоколів мінімізації та з протоколами мінімізації у розділі 6 «Результати дослідження». З огляду на зазначені приклади випливає, що застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій суттєво спрощує процедуру мінімізації булевих функцій, без втрати її функціональності.

Алгоритм мінімізації булевої функції комбінаторним методом ґрунтується на блок – схемі з повторенням, якою є власне таблиця істинності заданої функції. Це дозволяє зосередити принцип мінімізації у межах протоколу обчислення функції (у межах таблиці істинності функції) і, таким чином, обійтись без допоміжних об'єктів, як то карта Карно, діаграми Вейча, ациклічний граф, кубічне представлення і т. п.

Рівносильні перетворення графічними образами у вигляді двовимірних матриць за своїми властивостями мають більшу інформаційну ємність за рахунок табличної організації математичного апарату блок – схеми з повторенням. Це дозволяє отримати більше інформації стосовно ортогональності, суміжності, однозначності блоків таблиці істинності (комбінаторної системи). Тому рівносильні перетворення графічними образами спроможні з ефектом замінити, зокрема, вербальні процедури алгебричних перетворень (приклад 1), мінімізацію методом синтезу інфімумної диз'юктивної нормальної форми (ІДНФ) логічної функції, з використанням досконалого матричного розміщення n-вимірного куба E^n (приклад 2). Порівняння комбінаторного методу з іншими методами мінімізації булевих функцій представлено в [1, 2].

Weaknesses. Слабка сторона застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу пов'язана з малою практикою застосування методів мінімізації різноманітних варіантів 5-розрядних булевих функцій. Негативні внутрішні фактори притаманні протоколам мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторним методом полягають у збільшенні часу отримання мінімальної функції при недостатній бібліотеці протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій.

Opportunities. Перспективою подальших досліджень протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу є пошук нових протоколів, порядок їхнього застосування з метою підвищення точності розв'язку задачі мінімізації функції в межах визначеного часу. Додаткові можливості, що може принести впровадження протоколів мінімізації комбінаторного методу, полягають у створенні та підтримці бібліотеки протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій як стандартних процедур з метою оптимізації пошуку мінімальних логічних функцій.

Threats. Протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу є незалежним від протоколів інших методів мінімізації, тому загроза негативної дії на об’єкт дослідження зовнішніх чинників відсутня. Аналогом комбінаторного методу мінімізації 5-розрядних булевої функції є алгебричний метод [17]. Алгебричний метод мінімізації 5-розрядних булевих функцій кращий тим, що для нього вже завчасу встановлені закони спрощення, виявлені властивості та створені алгоритми мінімізації булевих функцій. Однак алгебричний метод є вербальною процедурою операційних перетворень, що дає менший ефект якості мінімізації, порівняно з образними перетвореннями комбінаторного методу.

8. Висновки

1. Встановлено, що впровадження протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу дає змогу спростити процедуру мінімізації 5-розрядних булевої функції без втрати її функціональності.

2. Показано, що протоколи мінімізації 5-розрядних булевих функцій підтримують мінімізацію функції при наявності у структурі таблиці істинності повної бінарної комбінаторної системи з повторенням або неповної бінарної комбінаторної системи з повторенням. Застосування протоколів мінімізації є найбільш ефективною за наявності повної бінарної комбінаторної системи з повторенням. Ефективність застосування протоколів мінімізації за наявності неповної бінарної комбінаторної системи з повторенням зменшується не суттєво.

3. Встановлено, що результати верифікації мінімізованих функцій, отриманої з використанням протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу, задовольняють вихідну таблицю істинності заданої функції і, отже, засвідчують оптимальне зменшення кількості змінних функції без втрати її функціональності.

4. Ефективність застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу демонструється прикладами мінімізації функції, запозичених з робіт інших авторів з метою порівняння:

– *приклад* 7 [5];
– *приклад* 8 [15];
– *приклад* 9 [15];
– *приклад* 10 [16].

З огляду на зазначені приклади та приклади 4, 5 і 6 застосування протоколів мінімізації 5-розрядних булевих функцій комбінаторного методу дає підставу для доцільності застосування їх у процесах мінімізації логічних функцій.

Література

1. Riznyk V., Solomko M. Minimization of Boolean functions by combinatorial method // Technology Audit and Production Reserves. 2017. Vol. 4, Issue 2 (36). P. 49–64. doi: http://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.108532

2. Riznyk V., Solomko M. Application of super-sticking algebraic operation of variables for Boolean functions minimization by combinatorial method // Technology Audit and Production Reserves. 2017. Vol. 6, Issue 2 (38). P. 60–76. doi: http://doi.org/10.15587/2312-8372.2017.118336

3. Manojlovic V. Minimization of Switching Functions using Quine-McCluskey Method // International Journal of Computer Applications. 2013. Vol. 82, Issue 4. P. 12–16. doi: http://doi.org/10.5120/14103-2127

4. Rytsar B. The Minimization Method of Boolean Functionns in Polynomial Set-theoretical Format: conf. At Rzeszow, 2015. P. 130–146. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1492/Paper_37.pdf

5. Rathore T. S. Minimal Realizations of Logic Functions Using Truth Table Method with Distributed Simplification // IETE Journal of Education. 2014. Vol. 55, Issue 1. P. 26–32. doi: http://doi.org/10.1080/09747338.2014.921412

6. Dan R. Software for The Minimization of The Combinational Logic Functions // The Romanian Review Precision Mechanics, Optics & Mechatronics. 2010. Vol. 20, Issue 37. P. 95–99. URL: https://www.researchgate.net/publication/268270733_Software_for_The_Minimization_of_The_Combinational_Logic_Functions_SOFTWARE_FOR_THE_MINIMIZATION_OF_THE_COMBINATIONAL_LOGIC_FUNCTIONS

7. Zolfaghari B., Sheidaeian H. A New Case for Image Compression Using Logic Function Minimization // The International Journal of Multimedia & Its Applications. 2011. Vol. 3, Issue 2. P. 45–62. doi: http://doi.org/10.5121/ijma.2011.3204

8. Nosrati M., Karimi R., Nariri M. Minimization of boolean functions using genetic algorithm // Anale. Seria Informatica. 2012. Vol. X fasc. 1. P. 73–77. URL: http://anale-informatica.tibiscus.ro/download/lucrari/10-1-08-Nosrati.pdf

9. Nosrati M., Karimi R. An Algorithm for Minimizing of Boolean Functions Based on Graph DS // World Applied Programming. 2011. Vol. 1, Issue 3. P. 209–214.

10. Bernasconi A., Ciriani V. Three-Level Logic Minimization Based on Function Regularities // IEEE Transactions on computer-aided design of integrated circuits and systems. 2003. Vol. 22, Issue 8. P. 1005–1016. URL: http://cs.ecs.baylor.edu/~maurer/CSI5346/ThreeLevelMin.pdf

11. Solairaju A., Periyasamy R. Optimal Boolean Function Simplification through K-Map using Object-Oriented Algorithm // International Journal of Computer Applications. 2011. Vol. 15, Issue 7. P. 28–32. doi: http://doi.org/10.5120/1959-2621

12. Mohana Ranga Rao R. An Innovative procedure to minimize Boolean function // International journal of advanced engineering sciences and technologies. 2011. Vol. 3, Issue 1. P. 12–14.

13. Zakrevskiy A. D., Pottosin Yu. V., Cheremisinova L. D. Logicheskie osnovy proektirovaniya diskretnykh ustroystv. Matematika. Prikladnaya matematika. Moscow: Fizmatlit, 2007. 592 p. URL: https://www.twirpx.com/file/2197687/

14. Ivanov Yu. D., Zakharova O. S. Algoritm sinteza infimumnykh diz"yuktivnykh normal'nykh form logicheskikh funktsiy // Trudy Odesskogo

politekhnicheskogo universiteta. 2004. Issue 2 (22). P. 1–7. URL: http://pratsi.opu.ua/app/webroot/articles/1313074117.pdf

15. Simplification and minimization of boolean functions. URL: https://shubh977.files.wordpress.com/2017/02/chap4.pdf (Last accessed: 15.07.2018)

16. Sudnitson A. Diskretnaya matematika. Minimizatsiya bulevykh funktsiy. Primer iz knigi A. D. Zakrevskogo. 2008. P. 11. URL: http://ati.ttu.ee/~alsu/DM%20_MinBF_2008_lecture.pdf (Last accessed: 15.07.2017)

17. Martyniuk O. M. Osnovy dyskretnoi matematyky. Konspekt lektsii. Odeskyi natsionalnyi politekhnichnyi universytet: Nauka i tekhnika, 2008. 300 p.

orcid.org/0000-0003-0168-5657