

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИВЕРГЕНТНОЙ ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ АВТОПОЕЗДА ПРИ ДВИЖЕНИИ ПО ПРОГРАММНОЙ ТРАЕКТОРИИ

Попивший В. И., Безверхий А. И., Татиевский Д. Н.

1. Введение

С точки зрения безопасности движения седельного автопоезда особого внимания заслуживает анализ условий, при которых возможно скачкообразное изменение ориентации полуприцепа (внутренняя и внешняя). Это так называемая бифуркация складки, отвечающая дивергентной потере устойчивости кругового стационарного режима при вариации продольной скорости движения. Множество параметров, при которых происходят такие скачкообразные переходы стационарных состояний, представляет собой критическое множество или бифуркационное множество. Среди них для рассматриваемой системы можно выделить как параметры управления (скорость движения, угол поворота рулевых колес), так и характерные параметры (линейные размеры составляющих системы, их массы и прочее).

В данном исследовании рассматривается задача построения бифуркационного множества скоростей для синтезированного [1] управляемого движения по заданной программной траектории, содержащего набор координат тягача и прицепа, угол поворота рулевых колес и угол складывания.

Получение множества этих параметров является актуальным, поскольку позволяет организовать управление автопоездом с использованием обратной связи. Планируемые исследования могут обеспечить дополнительный контроль за предельно допустимой скоростью движения во избежание бифуркационных эффектов, способствуя тем самым повышению безопасности движения.

2. Объект исследования и его технологический аудит

Объект исследования – транспортные управляемые многозвенные колесные системы. Рассматривается плоская велосипедная модель движения автопоезда [2]. Схема сочлененного экипажа приведена на рис. 1, где:

v – продольная составляющая центра масс тягача;

θ – угол поворота управляемого модуля;

a, b – расстояние от центра масс тягача до центров передней (управляемой) оси и задней оси тягача;

c – расстояние от центра масс тягача до точки сцепки со вторым звеном;

d_1 – расстояние от центра масс второго звена до точки сцепки с тягачом;

Y_i – силы увода на осях, коэффициенты сопротивления уводу на осях ($k_1; k_2; k_3$);

m – масса тягача;

u – поперечная проекция вектора скорости центра масс тягача;

ω – угловая скорость тягача относительно вертикальной оси;
 m_2 – масса второго звена;
 v_1, u_1 – продольная и поперечная проекции вектора скорости центра масс полуприцепа;
 φ – угол складывания (угол между продольной осью тягача и полуприцепа).

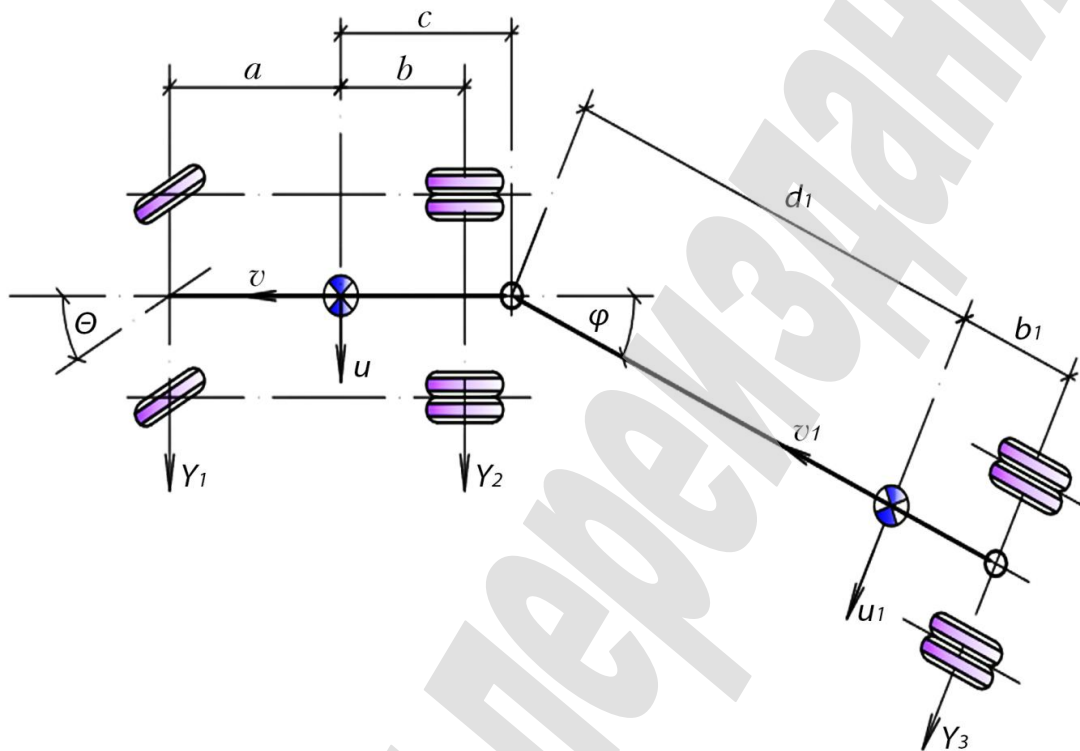


Рис. 1. Конструктивная схема модели двухзвенного автопоезда

Предмет исследования – математические модели динамики управляемого движения многосвязных колесных транспортных систем с возможностью дивергентной потери устойчивости.

Одним из наиболее проблемных мест при движении автопоездов является возможность дивергентной потери устойчивости при превышении предельно допустимых скоростей. Построение такого множества скоростей при движении по программной траектории реализовано в настоящем исследовании с целью повышения безопасности движения.

3. Цель и задачи исследования

Цель исследования – реализация возможности аналитического построения бифуркационного множества скоростей при движении по управляемой программной траектории с применением первого метода Ляпунова для вычисления бифуркационных значений совместно с методом продолжения по параметру.

Для достижения этой цели решаются следующие задачи:

1. Численное интегрирование системы дифференциальных уравнений с синтезированным законом управления.

2. Построение бифуркационного множества скоростей для дискретного набора значений управления с использованием первого метода Ляпунова и метода продолжения по параметру путем итерирования по скорости.

3. Визуализация множества критических параметров управления (бифуркационных множеств) для различных программных траекторий и моделирование (визуализация) движения системы.

4. Исследование существующих решений проблемы

Среди исследований проблемы потери дивергентной устойчивости автопоездом отметим работу по вещественным бифуркациям двухзвенных систем с качением [3]. Вопросы качественного анализа нелинейных моделей колесных экипажей с привлечением элементов теории бифуркаций изучались в [4]. В работе [5] реализован подход, позволяющий получить более полное представление бифуркационного множества модели седельного автопоезда в аналитическом виде. Следует отметить также работы по определению и анализу устойчивости круговых стационарных режимов движения модели седельного автопоезда [6, 7]. Анализ устойчивости движения модели седельного автопоезда с точки зрения определения его маневренности рассматривался также в [8, 9]. Математическое моделирование седельного автопоезда с управляемым полуприцепом и анализ ее устойчивости выполнен в работе [10].

Упомянутые выше исследования, как правило, нацелены на дальнейшее развитие графоаналитического подхода анализа множества стационарных режимов нелинейной модели двухзвенного автопоезда с использованием идей бифуркационного анализа. Однако проблемы дивергентной потери устойчивости автопоезда при движении по программной траектории в этих исследованиях не рассматривались и в настоящей работе предложены впервые.

Некоторые исследования [11, 12] имеют исключительно экспериментальный характер и были полезны при создании специализированной робототехнической установки тягач-прицеп, которая представляет определенную редкость. В связи с предполагаемыми дальнейшими экспериментами с этой установкой и ее усовершенствованием, было обращено внимание на специализированные исследования по неустойчивым режимам движения на высоких скоростях [13]. А также на особенности синтеза безопасного управления для АНВ (Articulated Heavy Vehicle) систем [14]. Известный интерес представляют исследования устойчивости рыскания системы тягач-прицеп в постоянных условиях движения, анализируемые с использованием теории бифуркаций [15].

Заметим, что в последнее время теория бифуркаций и соответствующие аналитические методы были успешно применены для изучения и контроля некоторых инженерных систем, таких как связанные спутниковые системы, компрессоры реактивных двигателей, продольная динамика полета и мощность системы [16, 17]. Описанные в этих исследованиях технологии применения бифуркационного анализа также представляют значительный интерес. Кроме

рассматриваемой в этом исследовании дивергентной потери устойчивости (бифуркация складки) в работах [18, 19] изучена также и бифуркация Хопфа (предельный цикл), также имеющая место при движении автопоезда.

Анализ приведенных публикаций позволил сделать вывод в пользу предложенных методов исследования, допускающих эффективную компьютерную реализацию.

5. Методы исследования

В данном исследовании используется исключительно аналитический подход с использованием первого метода Ляпунова [20] и метода продолжения по параметру [21, 22], при этом для идентичных моделей получены практически совпадающие результаты.

Для решения поставленных задач использовались методы динамики системы связанных тел, математический аппарат теории устойчивости, теории бифуркаций и управления, символьные преобразования и численные методы, эвристические поисковые алгоритмы.

6. Результаты исследования

Описанная выше модель двухзвенного автопоезда учитывает воздействие линейных боковых сил увода Y_i , которые согласно аксиоматики Рокара [23] определяются соотношениями:

$$Y_i = k_i \cdot \delta_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

где δ_i ($i = 1, 2, 3$) – углы увода (приведенные) на осях.

При установившемся движении по окружности заданного радиуса имеет место соотношение:

$$\omega = \frac{v}{R},$$

где v – продольная составляющая скорости центра масс тягача; R – радиус траектории точки на продольной оси тягача, скорость которой направлена вдоль продольной оси тягача.

Условием дивергентной потери устойчивости (по Ляпунову) будет наличие хотя бы одного корня с положительной действительной частью при решении характеристического уравнения системы (1).

Результаты получены для следующих числовых значений параметров:
 $g=9,81$ м/с²; $a=4,217$ м; $b=3,376$ м; $b_1=2,93$ м; $d_1=8,075$ м; $c=3,376$ м;
 $m=6417$ кг; $m_2=41846$ кг; $k_1=100000$ Н; $k_2=300000$ Н; $k_3=300000$ Н;
 $\kappa_1=0,8$; $\kappa_2=0,8$; $\kappa_3=0,8$.

Продольные силы в пятне контакта колес с опорной поверхностью не учитывались. Силы бокового увода аппроксимировались в виде арктангенсоид.

Для решения задачи использовалась система Maple и специально разработанное приложение на языке C# с использованием технологии OpenMapleAPI, позволяющее автоматизировать (в интерактивном режиме изменять параметры модели) сценарий, реализованный на внутреннем языке системы Maple.

В системе Maple запишем выражения для динамических уравнений:

$$e1 := -m * (U + \omega * v) + Y1 + \cos(\phi) * Y3 - 2 * m^2 * \sin(\phi) * \omega * d1 * \Phi + m^2 * \sin(\phi) * d1 * \Phi^2 + m^2 * \cos(\phi) * d1 * \Omega - m^2 * \cos(\phi) * d1 * \text{PP} + m^2 * \sin(\phi) * d1 * \omega^2 + Y2 - m^2 * U + m^2 * c * \Omega - m^2 * \omega * v;$$

$$e2 := c * m^2 * \omega * v - b * Y2 - J * \Omega + c * m^2 * \cos(\phi) * d1 * \text{PP} - c * m^2 * \sin(\phi) * d1 * \Phi^2 - c * m^2 * \cos(\phi) * d1 * \Omega + a * Y1 + c * m^2 * U - m^2 * c^2 * \Omega - c * \cos(\phi) * Y3 - c * m^2 * \sin(\phi) * d1 * \omega^2 + 2 * c * m^2 * \sin(\phi) * \omega * d1 * \Phi;$$

$$e3 := -J^2 * (\Omega - \text{PP}) - L1 * Y3 + d1 * \cos(\phi) * m^2 * U + d1 * \cos(\phi) * m^2 * \omega * v - d1 * \sin(\phi) * m^2 * \omega * u - d1^2 * m^2 * \Omega + d1^2 * m^2 * \text{PP} - c * m^2 * \cos(\phi) * d1 * \Omega + c * m^2 * \sin(\phi) * d1 * \omega^2; \quad (1)$$

В этих выражениях (система дифференциальных уравнений движения):

U – производная боковой составляющей центра масс;

Ω – производная угловой скорости (ω) относительно вертикальной оси;

Φ – скорость изменения угла поворота (ϕ) заднего звена;

PP – угловое ускорение заднего звена.

Вычислив якобиан системы J_{oo} , получим характеристическое уравнение:

$$\text{chp} := \text{linalg}[\text{charpoly}](J_{oo}, \lambda);$$

и его корни:

$$\text{eigv} := \text{evalf}(\text{solve}(\text{chp}, \lambda)).$$

Приложение определяет момент появления корня с неотрицательной действительной частью при варьировании значения скорости.

На рис. 2 общий вид приложения с добифуркационным состоянием автопоезда (все корни характеристического уравнения с отрицательной действительной частью).

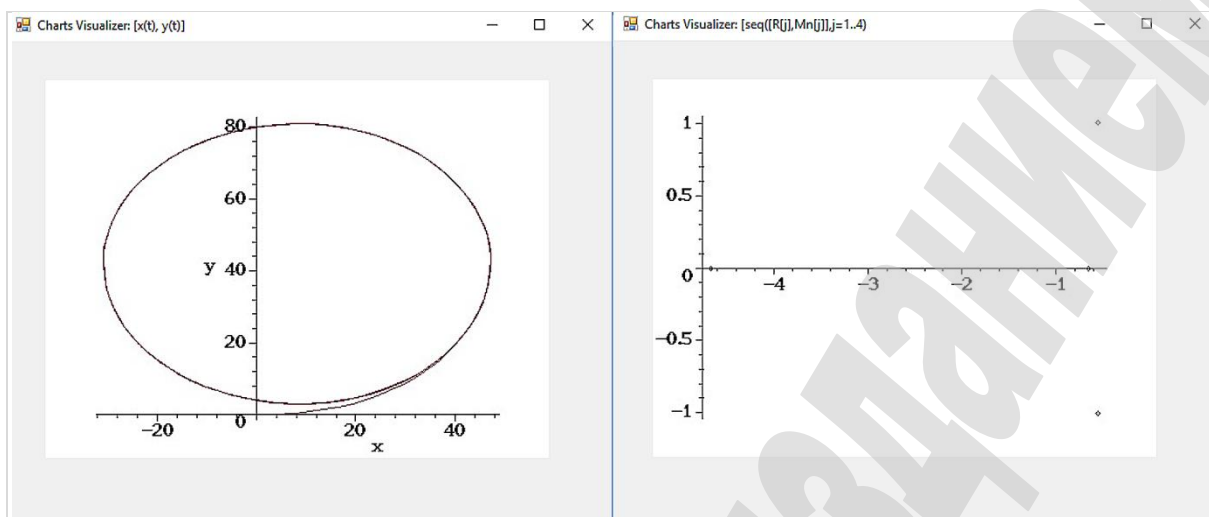


Рис. 2. Добифуркационное состояние системы

Дивергентная неустойчивость реализуется при скорости $v=11,5$ м/с – получена в [5], на основе численно-аналитического метода продолжения по двум параметрам.

С использованием разработанного приложения можно задать сколь угодно малую погрешность вычислений, получено более точное значение 11,5009 м/с.

Бифуркационное значение скорости получено методом продолжения по параметру с шагом 0,0001 (это требуемая точность), на рис. 3 – потеря дивергентной устойчивости – появление корней с положительной действительной частью.

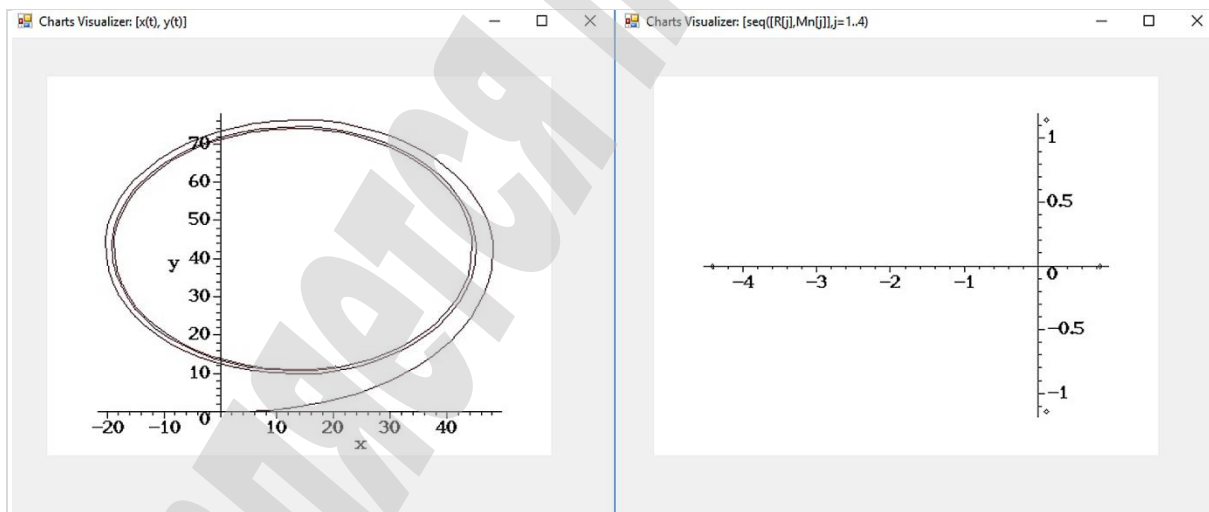


Рис. 3. Вычисление бифуркационного значения скорости

Для построения множества бифуркационных значений выполняется итерирование по всем параметрам управления программной траектории и для каждого такого значения производится итерирование по скорости до достижения ее бифуркационного значения. Для ускорения такого процесса эмпирически определены начальные (пороговые) значения скоростей. На каждой итерации выполняется проверка корней характеристического уравнения на наличие хотя бы

одного корня с положительной действительной частью, что будет соответствовать бифуркационному значению параметра скорости движения автопоезда.

Таким образом, на рис. 4 изображены сгенерированные бифуркационные множества скоростей для различных программных траекторий. При этом бифуркационное множество скоростей в м/с отображается красным цветом, управление в градусах – зеленым.

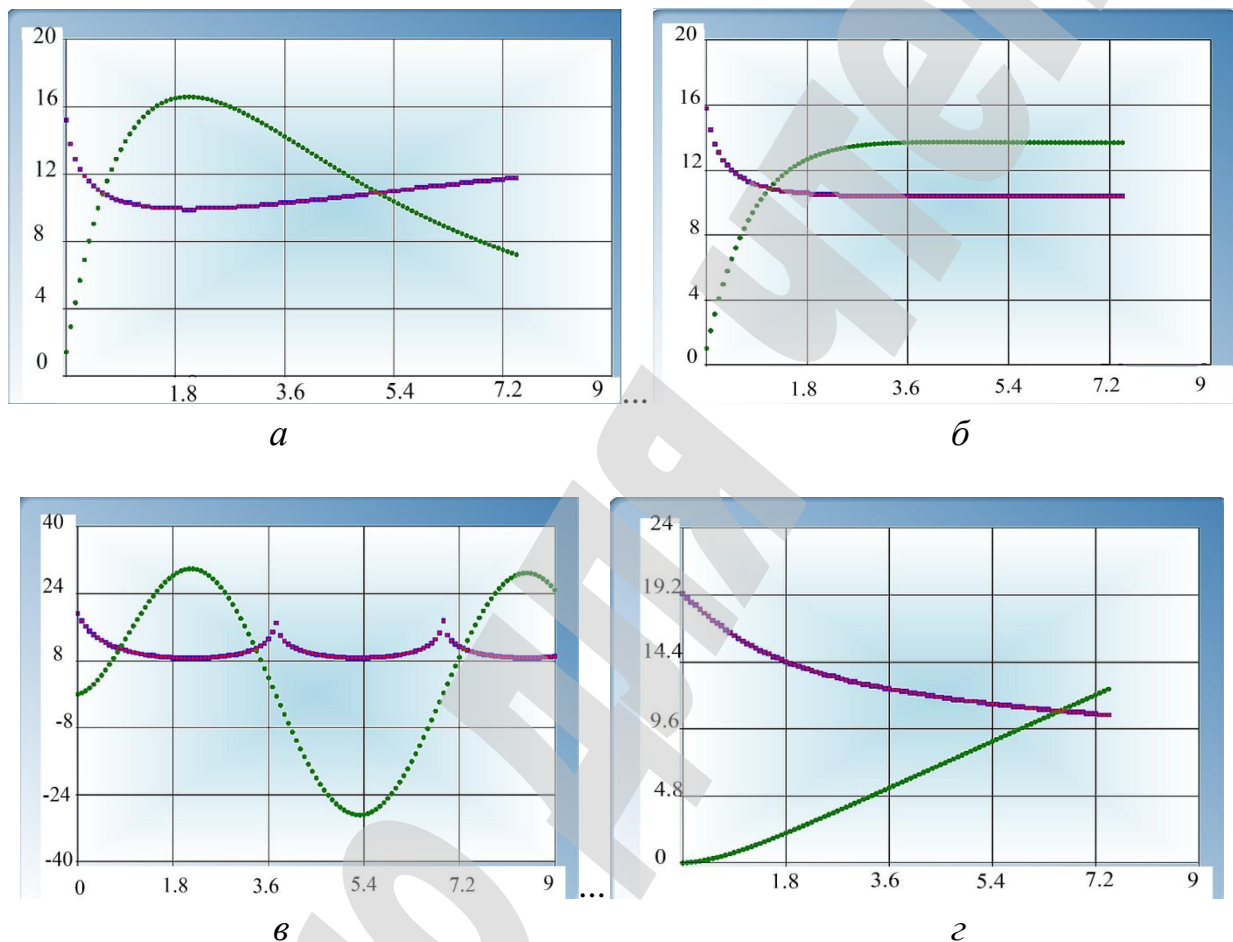


Рис. 4. Сгенерированные бифуркационные множества скоростей для различных программных траекторий: *a* – по параболе; *б* – по окружности; *в* – по синусоиде; *г* – по клотоиде

При этом парабола задана:

- явной функцией $y(x)=5*x^2/216$;
- окружность $y(x) = -(R^2 - x^2)^{1/2} + R, R = 30\text{ м}$ – поворот на 90° ;
- синусоида $y(x)=3*\sin(0.1*x)$.

Клотоида задана параметрически в сценарии Maple в виде (параметризована интегралами Френеля):

$$X(t):= 200*(\text{int}(\cos((1/2)*\text{Pi}*u^2), u = 0 .. t)),$$

$$Y(t) := 200 * (\text{int}(\sin((1/2) * \text{Pi} * u^2), u = 0 .. t)).$$

Построение бифуркационного множества позволяет определить максимально допустимую скорость движения по программной траектории без дивергентной потери устойчивости, – это минимальное значение скорости в бифуркационном множестве. При докритической скорости движение устойчиво, программная и реальная траектории (красная и синяя) совпадают (рис. 5).

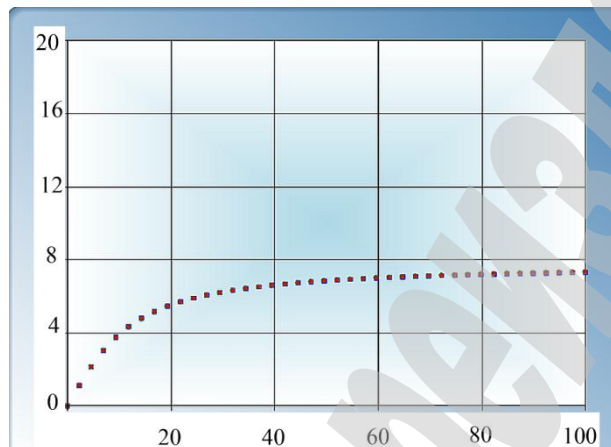


Рис. 5. Маневр «переставка» с докритической скоростью ($v=11,1$ м/с)

При ее превышении наблюдаются бифуркационные явления (рис. 6, реальная траектория изображена синим цветом).

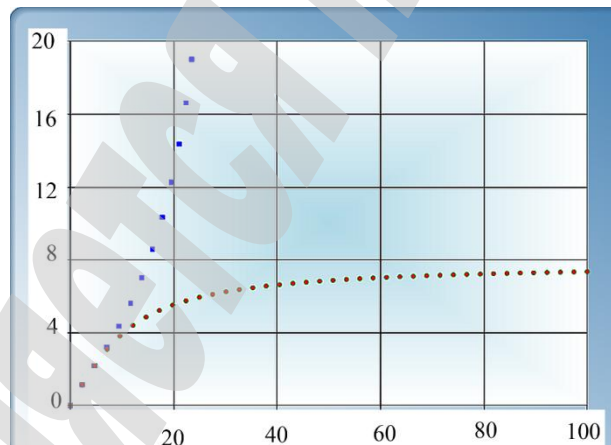


Рис. 6. Дивергентная потеря устойчивости при маневре «переставка» ($v=11,4$ м/с)

Для исходной модели дивергентная потеря устойчивости для данного маневра реализуется на скорости 11,3 м/с – минимальное ее значение в бифуркационном множестве.

Дивергентную потерю устойчивости автопоезда при движении по клотоиде с различными скоростями иллюстрирует рис. 7.

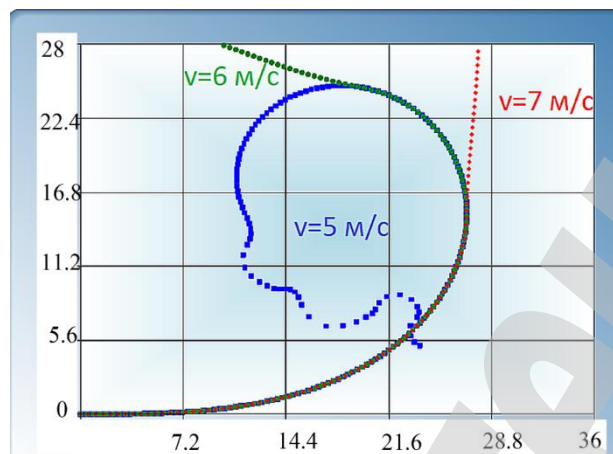


Рис. 7. Дивергентная потеря устойчивости при движении по клотоиде

Чем ниже скорость, тем больший участок клотоиды может быть пройден без дивергентной потери устойчивости.

Кроме получения бифуркационных значений скоростей приложение позволяет варьировать параметр управления (при постоянной скорости или одновременно). Возможно также варьировать и характерные параметры, что, очевидно, имеет важное значение на этапе конструирования двухзвенных систем, строя для них соответствующие бифуркационные множества.

7. SWOT-анализ результатов исследований

Strengths. К сильным сторонам предложенного метода следует отнести тот факт, что в основе математической модели управляемого движения сочлененного автопоезда лежат классические положения механики системы твердых тел (с учетом наличия неголономных связей). Задача синтеза программного управляемого движения решалась на основе строго обоснованных подходов теории автоматического управления и контроля динамических систем. Корректность полученных результатов проверялась на основе независимого численного моделирования системы.

Реализация построения бифуркационного множества скоростей исключительно аналитическим методом позволяет значительно ускорить процесс такого построения и дает возможность применения этого подхода в режиме реального времени, сообщая водителю автопоезда о недопустимости превышения скорости.

Weaknesses. К слабым сторонам следует отнести недостаточное накопление экспериментального эмпирического материала, хотя проведенные эксперименты со специально разработанной робототехнической установкой (тягач-прицеп) показывают хорошее согласование с теорией. Разработанная установка на данный момент имеет ряд конструктивных недостатков (ограничение по управлению, проскальзывание колес), что требует ее технического усовершенствования.

Opportunities. Перспективами дальнейших исследований являются техническое усовершенствование разработанной экспериментальной установки и дальнейшее исследование водительских маневров с построением для них бифуркационных множеств.

Threats. При внедрении результатов данного исследования, необходима разработка технического устройства с функциями, помогающими повысить безопасность и эффективность управления транспортным средством путем получения значений из бифуркационного множества скоростей в режиме реального времени. Для каждого оповещения устройство может воспроизводить звуковой сигнал или отображать информацию на дисплее.

8. Выводы

1. Выполнено численное интегрирование системы дифференциальных уравнений с синтезированным законом управления в системе символьных вычислений Maple. Такое интегрирование производится на каждом дискрете управляемой траектории в специально разработанном приложении. Результаты численного интегрирования визуализируются в виде данных фазовых портретов и решений характеристического уравнения системы.

2. Произведено построение бифуркационного множества скоростей для дискретного набора значений управления с использованием первого метода Ляпунова и метода продолжения по параметру путем итерирования по скорости. Метод продолжения по параметру применен также для управления и характерных параметров модели, что позволило получить бифуркационные множества в зависимости от изменения этих параметров. Эти результаты могут быть использованы на этапе проектирования многозвенных систем, определяя их оптимальные линейные размеры.

3. Реализована визуализация множества критических параметров скорости и управления для различных программных траекторий (типовых водительских маневров) и моделирование движения системы в среде Unity 3D и с применением разработанной робототехнической установки. Такая визуализация позволяет исследовать движение автопоезда в момент возникновения бифуркации и выработать рекомендации по управлению автопоездом для выхода из создавшейся ситуации. При отсутствии проскальзывания и неровностей поверхности экспериментальные результаты установки соответствуют теоретическим.

Литература

1. Вербицкий В. Г., Полякова Н. П., Татиевский Д. Н. Исследование возможности реализации управляемого движения автопоезда вдоль программной кривой // Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки. 2018. Т. 29 (68), № 6. С. 2–4.

2. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Вещественные бифуркации двухзвенных систем с качением // Прикладная математика и механика. 1996. № 3. С. 418–425.

3. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Бифуркации стационарных состояний связки абсолютно твердых и катящихся упругих тел // Известия АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 30–37.

4. Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в

динамике колесных машин. Киев: Наукова думка, 1990. 216 с.

5. Verbitsky V., Bezverkhyi A., Tatievskyi D. Handling Analysis and Defining Conditions of Dangerous-Safe Divergent Stability Loss of a Two-Link Road Train Nonlinear Model // *Mathematical Modelling and Applications*. 2018. Vol. 3, Issue 2. P. 31–38. doi: <http://www.sciencepublishinggroup.com/journal/paperinfo?journalid=247&doi=10.11648/j.mcs.20180301.13>

6. Вербицкий В. Г., Загороднов М. И. Определение и анализ устойчивости круговых стационарных режимов движения модели седельного автопоезда // *Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту*. 2007. № 1. С. 10–19.

7. Вербицкий В. Г., Лобас Л. Г. Многообразия стационарных состояний двухзвенного автопоезда и их устойчивость // *Прикладная механика*. 1990. № 12. С. 97–104.

8. Мойся Д. Л., Бумага А. Д. Определение маневренности и анализ устойчивости движения модели седельного автопоезда // *Вісник Донецького інституту автомобільного транспорту*. 2007. № 3. С. 10–19.

9. Мойся Д. Л. Анализ стационарных состояний и их устойчивости трехзвенного автопоезда с безпорным промежуточным звеном автопоезда // *Вісник Національного транспортного університету*. 2008. № 17. С. 8–13.

10. Вербицкий В. Г., Мойся Д. Л. Математична модель седельного автопоїзда з керуванням напівприцепом // *Міжвузівський збірник «Наукові нотатки»*. 2010. № 28. С. 98–103.

11. Kaneko T., Kageyama I. A study on the braking stability of articulated heavy vehicles // *JSAE Review*. 2003. Vol. 24, Issue 2. P. 157–164. doi: [http://doi.org/10.1016/s0389-4304\(03\)00007-9](http://doi.org/10.1016/s0389-4304(03)00007-9)

12. Аналіз результатів дослідження курсової стійкості руху експериментального автопоїзда в сталому русі / Бондаренко А. Є. і т. д. // *Вісник Донецької академії автомобільного транспорту*. 2010. № 2. С. 53–61.

13. Ei-Gindy M., Mrad N., Tong X. Sensitivity of rearward amplification control of a truck/full trailer to tyre cornering stiffness variations // *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part D: Journal of Automobile Engineering*. 2001. Vol. 215, Issue 5. P. 579–588. doi: <http://doi.org/10.1243/0954407011528176>

14. Abdulwahab A. Investigations on the Roll Stability of a Semitrailer Vehicle Subjected to Gusty Crosswind Aerodynamic Forces: Doctoral thesis. University of Huddersfield, 2018. 239 p.

15. Analysis of bifurcation and stability for a tractor semi-trailer in planar motion / Ding N. et. al. // *Vehicle System Dynamics*. 2014. Vol. 52, Issue 12. P. 1729–1751. doi: <http://doi.org/10.1080/00423114.2014.960431>

16. di Bernardo M. Bifurcation analysis for control systems applications / ed. by Chen G., Hill D. J., Yu X. // *Bifurcation control theory and application*. Heidelberg: Springer-Verlag, 2003. P. 249–264.

17. Catino B., Santini S., di Bernardo M. MCS adaptive control of vehicle dynamics: an application of bifurcation techniques to control system design // *42nd IEEE conference on decision and control*. Maui: IEEE, 2003. Vol. 3. P. 2252–2257. doi: <http://doi.org/10.1109/cdc.2003.1272953>

18. Troger H., Zeman K. Application of Bifurcation Theory to Tractor-Semitrailer

Dynamics // Vehicle System Dynamics. 1981. Vol. 10, Issue 2-3. P. 156–161.
doi: <http://doi.org/10.1080/00423118108968660>

19. Troger H., Zeman K. A Nonlinear Analysis of the Generic Types of Loss of Stability of the Steady State Motion of a Tractor-Semitrailer* // Vehicle System Dynamics. 1984. Vol. 13, Issue 4. P. 161–172. doi: <http://doi.org/10.1080/00423118408968773>

20. Ляпунов А. М. Общая задача обустойчивости движения. Череповец: Меркурий-ПРЕСС, 2000. 386 с.

21. Shinohara Y. A geometric method for the numerical solution of nonlinear equations and its application to nonlinear oscillations // Publications of the Research Institute for Mathematical Sciences. 1972. Vol. 8, Issue 1. P. 13–42.
doi: <http://doi.org/10.2977/prims/1195193225>

22. Методы анализа нелинейных динамических моделей / Холодниок М. и т. д. М.: Мир, 1991. 368 с.

23. Рокар И. Неустойчивость в механике / пер. с фр. Житомирского В. К.; под ред. Обморшева А. Н. М.: Издательство иностранной литературы, 1959. 287 с.