

## КОНТИНУАЛЬНИЙ ОПИС ПОЛІКРИСТАЛІЧНИХ СИСТЕМ З ВРАХУВАННЯМ ЇХ БУДОВИ

Кузін О. А., Лукіянець Б. А., Кузін М. О.

### 1. Вступ

Раціональне конструювання металічних матеріалів тісно пов'язане із фундаментальною науковою проблемою вибору адекватного математичного опису полікристалічних систем, що дозволяє проводити їх розрахунок і оптимізацію відносно режимів експлуатації.

При цьому моделювання і оцінка поведінки таких систем має обов'язково проводитись із врахуванням фізичних ефектів, що відбуваються у масштабах, які співрозмірні із структурними складовими та їх границями. Оскільки саме на рівні структурних складових формуються основні властивості матеріалів.

Відмітимо, що можливість керованої зміни геометричних та фізичних параметрів поверхонь розділу структурних складових є важливим резервом підвищення робочих властивостей металовиробів. В зв'язку із чим дані питання трансформувались в окремий науковий напрямок у матеріалознавстві – «інженерія границь зерен і зернограничне конструювання матеріалів» [1, 2].

Цей науковий напрямок є затребуваним при розробці інноваційних технологій отримання металопродукції з наперед визначеними властивостями, із оцінки залишкового ресурсу конструкцій та визначенні механізмів і причин виходу з ладу деталей та обладнання.

В умовах дії зовнішнього навантаження в деталях від границь зерен утворюються дислокації, а в наслідок різниці пружних характеристик між зернами полікристалів виникають концентрації напружень. Прогнозування поведінки полікристалів робить необхідним встановлення взаємозв'язку між структурою, енергетичними параметрами границь зерен, фізичними властивостями і факторами, що визначають опір утворенню міжзеренних пошкоджень. Тому є актуальною розробка і застосування математичних моделей, придатних для таких складних завдань міждисциплінарного характеру, як керування структурно-енергетичним станом внутрішніх поверхонь розділу.

### 2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

*Об'єктом дослідження* є поведінка границь зерен, умови утворення міжзеренних пошкоджень і інтеркристалітне руйнування полікристалічних сплавів при дії силових навантажень.

З метою більш повного врахування всіх особливостей поведінки полікристалічних матеріалів в умовах експлуатації в науковій літературі прийняті наступні ієрархічні рівні розгляду матеріалів [3]:

1. *Макрорівень*. На цьому рівні матеріал розглядається як неперервне (континуальне) середовище із властивостями, параметри яких слабо змінюються у просторі; типовий розмір фрагменту матеріалу є співрозмірний із усім виробом.

2. *Мезорівень*. Матеріал розглядається як дискретно-континуальне середовище (використовується дискретно-континуальний модельний опис із додатковими фізичними умовами в областях, які відповідають границям структурних складових, – приграничним зонам). Рівень розгляду даного масштабного рівня матеріалу відповідає структурним складовим та їх границям.

3. *Нанорівень*. Рівень розгляду матеріалу відповідає окремим атомам (або їх групам). На цьому рівні переважно використовується дискретний модельний опис.

Відмітимо, що одночасний модельний і розрахунковий розгляд усіх трьох рівнів матеріалу є складною науковою проблемою, і тому на даний момент використовується в основному в теоретичному спрямуванні [3].

В прикладних дослідженнях проводять розгляд лише одного із ієрархічних рівнів з використанням результатів, отриманих з аналізу поведінки матеріалу на інших масштабних рівнях.

В багатьох випадках руйнування деталей пов'язано із виникненням тріщин в місцях локальної зміни механічних властивостей виробів. Одними із найбільш проблемних місць можуть бути границі і стики зерен, в яких накопичення і перебудова дефектів при дії технологічних і експлуатаційних навантажень призводить до появи пошкоджень та розвитку інтеркристалітних тріщин.

### **3. Мета і задачі дослідження**

*Метою роботи* є розробка підходу до континуального опису локально-неоднорідних середовищ для дослідження поведінки полікристалічних матеріалів з врахуванням енергії границь зерен.

Для досягнення поставленої мети сформульовано наступні завдання:

1. Побудувати математичну модель механіки полікристалічних просторово-градієнтних систем.

2. На основі побудованої моделі розробити підхід до розв'язання задачі утворення зернограничних пошкоджень в полікристалічних сплавах при наявності градієнта властивостей в окремих мікрооб'ємах.

3. Дослідити основні тенденції і відповідні їм закономірності впливу відносного градієнту властивостей зони «зерно – границя зерна» на опір до утворення міжзеренних пошкоджень і інтеркристалітне руйнування промислових сплавів.

### **4. Дослідження існуючих рішень проблеми**

Особливості будови металічних полікристалічних систем на масштабному рівні зерна – границі зерен мають надзвичайно важливе (а в деяких випадках і визначальне) значення для поведінки всього матеріалу [2, 3]. У зв'язку із цим в роботі проводили побудову модельних наближень, що дозволяють описувати поведінку полікристалічних матеріалів на мезорівні.

Точні розрахункові математичні модельні наближення при дослідженні поведінки полікристалів на цьому рівні є на даний момент відкритою науковою проблемою. В залежності від мети опису структури матеріалу і застосовуваних підходів такі характеристики структури, як зерна, границі зерен трактують по-різному, що призводить до суттєвого неузгодження при порівнянні модельних уявлень, поданих в різних наукових публікаціях.

Зупинимось детально на таких базових означеннях для полікристалічних систем, як зерна і їх границі.

Під терміном «зерно», згідно [4, 5], будемо розуміти окремих кристаліт полікристалічного конгломерату, що має одне кристалографічне орієнтування і розділений від інших кристалів границями. Розмір зерна може коливатись від декількох мікрометрів до сантиметрів.

Під терміном «границя зерна» будемо розуміти приповерхневу область, по обидві сторони якої кристалічні решітки різняться просторовою орієнтацією [5].

Величина даної приповерхневої області, згідно фізичних уявлень різних літературних джерел [6, 7], може суттєво змінюватись. Так, на даний момент прийнято розділяти «статичну товщину» границі, яка має товщину декілька атомних параметрів, і «динамічну товщину». Вона більше «статичної» і характеризується спектром коливань атомів в цьому шарі, що відрізняється від спектру коливань атомів центральної частини зерна [8].

Відмітимо, що особливо яскраво «динамічна товщина» проявляється для великокутових границь зерен, які мають більші відмінності будови, ніж інші границі [9].

В цьому зв'язку варто розширити поняття «границя зерна» і перейти до терміну «границя – пригранична область», яка в багатьох випадках досягає значень декількох мікрометрів [10].

Після встановлення розмірних характеристик приграничної зони важливе значення має завдання моделі будови даної зони.

В роботі використовуємо модель Кокса-Хірта [11, 12], згідно якої зерно ділиться на дві підобласті: пригранична зона і внутрішня частина зерна. Більшість дислокацій зосереджені в приграничній зоні [13], яка в результаті отримує градієнтну зміну параметрів по глибині і концентрує безпосередньо на границі дефектні структури.

В даний час накопичено значну кількість експериментальних даних про вплив границь зерен з різною енергією на поведінку полікристалічних матеріалів у процесі пластичної деформації [4, 6]. Показано, що міцність і пластичність полікристалічних сплавів залежить від частки низькоенергетичних границь, які характеризуються високим опором руйнуванню [8].

Створення низькоенергетичних границь зерен при технологічних обробках закладено в принципі зернограничного конструювання структури металовиробів. Слід відмітити, що залишається відкритим питання про роль структури границь зерен з високим рівнем енергії та їх приграничних зон в процесах міжзеренного руйнування. Хоча перехід до руйнування по границях зерен супроводжується різким погіршенням механічних властивостей і надійності виробів [10].

З позицій фізичного матеріалознавства на енергетичному рівні будова даної зони визначає значення вільної енергії границі зерна. Причому чим вище її рівень, тим вважається, що границя містить більше дефектів [14].

Умова (критерій) локального руйнування записується у вигляді [14]:

$$A_H \geq 2\lambda_L - \lambda_B, \quad (1)$$

де  $A_H$  – робота навантаження;  $\lambda_L$  – вільна енергія (поверхнева енергія) матеріалу;  $\lambda_B$  – вільна енергія границі зерна.

Як видно із співвідношення (1), при досягненні дефектності структури в приграничній області критичного значення, що відповідає на енергетичному рівні поверхневій енергії, в тілі розпочинається процес руйнування.

З врахуванням співвідношення (1) можна записати також і силові критерії руйнування.

## 5. Методи дослідження

Деградацію металічних матеріалів на рівні структури будемо враховувати за допомогою змінної скалярної природи – пошкоджуваності.

Введення скалярної змінної для оцінки змін в структурі матеріалу під час навантажень було запропоновано в роботах [15, 16], які на даний момент не втратили важливості, враховуючи їх експериментально-прикладне значення.

При побудові математичних співвідношень моделі полікристалічних матеріалів використаємо енергетичний підхід, який показав свою ефективність в математичних моделях континуальних середовищ із врахуванням взаємопов'язаних полів різної природи, дефектності будови твердих тіл [17, 18].

Будувати модель будемо, розглядаючи тільки силові навантаження.

Введемо функцію вільної енергії системи, яка залежить як від історії деформації, так і поточного її значення:

$$f(t) = \int_0^t K(t, \tau) g(\hat{\epsilon}) d\tau, \quad (2)$$

де  $K(t, \tau)$  – ядро спадковості;  $g(\hat{\epsilon})$  – функція, що енергетично враховує зміну внутрішніх параметрів;  $\hat{\epsilon}$  – тензор деформацій.

Для запропонованої моделі приймемо гіпотезу затухаючої пам'яті, згідно якої більш віддалені в часі стани системи мають менший вплив на поточне значення змінних в даний момент часу.

Приймемо апріорно властивість адитивності вільної енергії і тому представимо вільну енергію в довільний момент часу  $t = t_*$  у вигляді [19]:

$$f(t = t_*) = f^H + f^H, \quad (3)$$

де  $f^H$  – вільна енергія, що задається поточними значеннями тензора деформацій;  
 $f^H$  – вільна енергія, що задається історією зміни навантажень на тіло.

Розглянуте модельне представлення відповідає наступним положенням:

1. Новий модельний опис враховує як частинний випадок більш прості моделі, зокрема, пружних систем (при  $f^H = 0$ ).

2. Якщо об'єкт не знаходиться під навантаженням ( $f^H = 0$ ), то це не означає, що він перебуває в стані термодинамічної рівноваги, що враховується доданком  $f^H$ .

Відмітимо, що  $f^H$  можна на модельному рівні трактувати також і як величину  $\lambda_B$  у виразі (1).

Прийmemo, що  $f^H$  залежить від внутрішньої будови – структури матеріалу і зв'яжемо  $f^H$  зі скалярною змінною пошкодженістю  $\omega$  за допомогою наступного виразу:

$$f^H = f^H \left( \omega, |\vec{\nabla}\omega|, \frac{1}{V_0} \int \omega dV \right), \quad (4)$$

де  $\omega$  – рівень пошкодженості;  $\vec{\nabla}$  – оператор Гамільтона;  $V_0$  – характерний розмір досліджуваної області;  $|\dots|$  – символ модуля вектора.

Вираз (4) враховує той факт, що вільна енергія тіла в точці залежить від локальних структурних змін, так і змін в деякій області.

Даний вираз знаходиться у відповідності із сучасними тенденціями розвитку матеріалознавства, фізики твердого тіла та механіки [20, 21]. У відповідності з ними на механічну поведінку тіла має вплив не тільки абсолютне значення величин, але і їх градієнт, а також середній розподіл величини в деякому околі [22, 23].

Особливо яскраво це проявляється в областях, які характеризуються високим рівнем енергії, а також розподілом деградаційних структурних характеристик в локальних об'ємах [24].

Відмітимо, що розподіл нелокальних характеристик деградації структури в заданому околі можна також отримати і за допомогою фізичних методів дослідження, зокрема, методу LM-твердості [25].

## 6. Результати досліджень

Запишемо співвідношення (2) із врахуванням представлення (3):

$$\sigma = \frac{\partial f}{\partial \hat{e}} = \frac{\partial f^H}{\partial \hat{e}} + \frac{\partial f^H}{\partial \hat{e}}. \quad (5)$$

Для ізотропного пружного тіла отримаємо:

$$\frac{\partial f^0}{\partial \hat{e}} = KeI + 2G \left( \hat{e} - \frac{1}{3} eI \right), \quad (6)$$

де  $K$  – модуль об'ємного стиску;  $G$  – модуль зсуву;  $e = \hat{e} \cdot I = \vec{\nabla} \cdot \vec{u}$  – перший інваріант тензора напружень;  $I$  – одиничний тензор.

Для перетворення другого виразу (5) набір змінних, що описують нелокальну пошкодженість матеріалу подамо у вигляді:

$$\vec{\omega}^* = \left( \omega, |\vec{\nabla} \omega|, \frac{1}{V_0} \int_V \omega dV \right), \quad (7)$$

де  $\vec{\omega}^*$  – вектор узагальненої пошкодженості.

Для спрощення запису зробимо наступне позначення:

$$a_1 = \omega, a_2 = |\vec{\nabla} \omega|, a_3 = \frac{1}{V_0} \int_V \omega dV. \quad (8)$$

В результаті вираз (7) матиме наступний вигляд:

$$\vec{\omega}^* = (a_1, a_2, a_3). \quad (9)$$

Слідуючи підходам, які подані в роботі [19], другий доданок співвідношення (5) подано у вигляді:

$$\frac{\partial f^H}{\partial |\vec{\omega}^*|} \cdot \frac{\partial |\vec{\omega}^*|}{\partial \hat{e}} = \frac{|\vec{\omega}^*|}{1 - |\vec{\omega}^*|} Ke\hat{I} + \frac{|\vec{\omega}^*|}{1 - |\vec{\omega}^*|} 2G \left( \hat{e} - \frac{1}{3} e\hat{I} \right). \quad (10)$$

У виразі (10), з метою збереження інваріантності математичних перетворень, був зроблений перехід від вектора «узагальненої» пошкодженості до його модуля.

Вибір множника  $\frac{|\vec{\omega}^*|}{1 - |\vec{\omega}^*|}$  пов'язаний із необхідністю на функціональному

рівні враховувати нелінійність динаміки пошкодженості конструкцій, яка показана, зокрема, в роботах [25, 26].

З врахуванням виразу (9) співвідношення (5) буде мати вигляд:

$$\hat{\sigma} = \frac{K}{1 - |\vec{\omega}^*|} e\hat{I} + \frac{2G}{1 - |\vec{\omega}^*|} \left( \hat{e} - \frac{1}{3} e\hat{I} \right). \quad (11)$$

У поданому формулюванні пошкодженість  $|\vec{\omega}^*$  відповідає своєму класичному поданню як зменшення «відклику» матеріалу конструкції на дію навантаження.

Проведемо аналіз отриманих модельних співвідношень. З врахуванням результатів (7), (8), вираз (11) матиме вигляд:

$$\hat{\sigma} = \left( \frac{1}{1 - \left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \right)^{1/2}} \right) \left( Ke\hat{I} + 2G(\hat{e} - \frac{1}{3}e\hat{I}) \right). \quad (12)$$

У виразі (12) в математичному поданні  $\left( \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \right)^{1/2}$  показане узагальнене трактування модуля вектора у функціональному просторі за рахунок введення додаткових числових констант  $\alpha_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

Відмітимо, що дане подання можна трактувати як зважену за допомогою відповідних коефіцієнтів апроксимацію [27], яка дозволяє більш широко, ніж інші існуючі модельні уявлення враховувати структуру приграничної області полікристалічних систем.

Для отримання розрахункових залежностей згідно співвідношень (5)–(12) використаємо рівняння рівноваги:

$$\vec{\nabla} \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad (13)$$

і отримаємо:

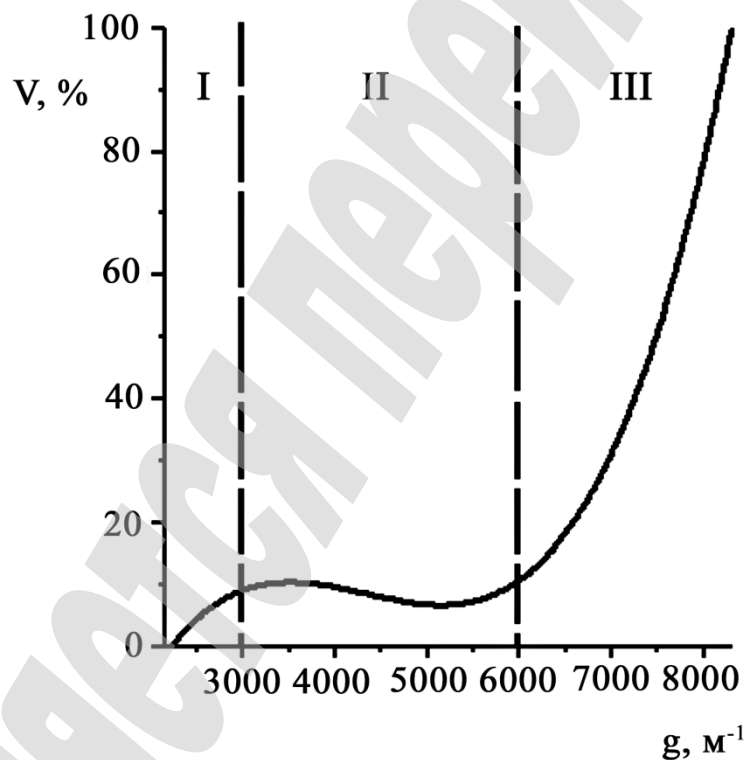
$$\left. \begin{aligned} & \vec{\nabla} \cdot \left( \frac{K(x)}{1 - \sqrt{\alpha_1 (\omega(x))^2 + \alpha_2 (|\vec{\nabla} \omega(x)|)^2 + \alpha_3 \left( \frac{1}{V_0} \int_V \omega dV \right)^2}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \hat{I} + \right. \\ & \left. + \frac{2G(x)}{1 - \sqrt{\alpha_1 (\omega(x))^2 + \alpha_2 (|\vec{\nabla} \omega(x)|)^2 + \alpha_3 \left( \frac{1}{V_0} \int_V \omega dV \right)^2}} \left( \vec{\nabla} \otimes \vec{u} - \frac{1}{3} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \hat{I} \right) \right) = 0, \end{aligned} \right) \quad (14)$$

де  $\vec{u}$  – вектор переміщень;  $\otimes$  – символ тензорного добутку.

Вищенаведене рівняння є основою для розрахунків і встановлення напружено-деформованого стану матеріалу на мезорівні з врахуванням нелокальності пошкоджень в зернограничних областях.

Розроблена модель дозволила провести аналіз впливу властивостей локальних об'ємів зерен на схильність до міжзеренного руйнування сталей при ударних випробовуваннях зразків в інтервалі температур від  $+100\text{ }^{\circ}\text{C}$  до  $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Досліджували сталі 40, 40Х, 40ХГ, 40ХГР, 40ХС після гартування і відпуску при  $600\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а також окрихчувальної обробки (повторний відпуск при  $550\text{ }^{\circ}\text{C}$  з наступним повільним охолодженням).

На основі експериментальних досліджень [28] отримана функціональна залежність частки міжзеренного руйнування  $V$  від відносного градієнту властивостей сплавів  $g$  в локальних об'ємах. Встановлено, що сталі в залежності від відносного градієнту властивостей в локальних об'ємах можна розділити на три групи: з малою, стабільною і катастрофічною схильністю до міжзеренного руйнування (рис. 1).



**Рис. 1.** Залежність міжзеренного руйнування  $V$  від параметру  $g$ :

I – зона малої (незначного) міжзеренного руйнування; II – зона стабільного міжзеренного руйнування; III – зона катастрофічного міжзеренного руйнування

Визначення густини дислокацій в локальних об'ємах досліджених сталей з використанням методу, який запропонований в роботах [29, 30], показало, що густина дислокацій на границях зерен є вищою після всіх режимів термічної обробки. В окрихченому стані густина дислокацій зростає більш суттєво для сталей схильних до міжзеренного руйнування (табл. 1).



Таблиця 1

Вплив режимів термічної обробки на мікротвердість, густину дислокацій в локальних об'ємах зерен і міжзеренне руйнування сталей 40 і 40Х

Марка сталі	Стан сталі	Мікротвердість, $10^7 \text{ Н/м}^2$		Густина дислокацій, $\text{см}^{-2}$		Частка міжзеренного руйнування, %
		зерна	границі	зерна	границі	
40	В'язкий	235	246	$2,21 \cdot 10^{11}$	$2,43 \cdot 10^{11}$	2
	Крихкий	237	266	$2,25 \cdot 10^{11}$	$2,84 \cdot 10^{11}$	12
40Х	В'язкий	246	265	$2,26 \cdot 10^{11}$	$2,62 \cdot 10^{11}$	10
	Крихкий	249	288	$2,31 \cdot 10^{11}$	$3,10 \cdot 10^{11}$	55

Проведені розрахунки показали, що запропоновані модельні і експериментальні залежності схильності сталей до міжзеренного руйнування від характеристик локальних об'ємів на мезорівні описуються фізично обґрунтованим параметром – відносним градієнтом властивостей. Він має прямий зв'язок із густиною дислокацій в приграничних зонах зерен, а також пов'язаний з їх пошкодженістю.

## 7. SWOT-аналіз результатів досліджень

*Strengths.* Запропоновані розрахункові співвідношення моделі, які дозволяють проводити розрахунки середовищ з врахуванням їх структури, та аналізувати їх напружено-деформований стан.

*Weakness.* При різних варіаціях коефіцієнтів  $\{\alpha_i\}$  отримуємо різні математичні моделі середовищ. Так, при  $\{\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \alpha_3 = 0\}$  отримуємо рівняння «класичної» моделі пошкоджених середовищ, а при  $\{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0\}$  – рівняння теорії пружності. Відмітимо, що вибір вищенаведених коефіцієнтів на даний момент є відкритим питанням, оскільки встановлення впливу характеристик структури на експлуатаційні параметри матеріалів є науковою проблемою, яка не до кінця розв'язана [31].

*Opportunities.* З використанням розроблених моделей визначені фізично обґрунтовані параметри оцінки зміни локальних властивостей в зернограничних областях, що дозволяють оцінювати схильність до утворення міжзеренних пошкоджень сплавів технологічними обробками, які змінюють структурно-енергетичний стан границь зерен полікристалів.

Відмітимо, що континуальна оцінка поведінки полікристалічних систем з одночасним використанням трьох параметрів структури – пошкодженості, її градієнта та середнього значення пошкодженості в околі є достатньо наукоємним питанням для подальших досліджень.

Визначені граничні значення характеристик локальних об'ємів зерен, при яких зменшується здатність до утворення міжзеренних пошкоджень сплавів. Завдяки цьому забезпечується можливість впровадження інноваційних технологій зернограничного конструювання структури металовиробів, що дозволяє у порівнянні з відомими технологіями суттєво підвищити параметри

надійності деталей – довговічність, ресурс, безвідмовність при мінімальних економічних витратах.

*Threats.* Основним обмежуючим фактором, який має найбільш істотний вплив на впровадження запропонованих у роботі методик в інженерну практику, – це необхідність проведення процедури визначення механічних властивостей полікристалічних систем на мезорівні. А також математичного і комп'ютерного моделювання таких систем з врахуванням їх структури.

## 8. Висновки

1. На основі підходів термодинаміки побудована математична модель механіки полікристалічних систем, яка враховує нелокальність розподілу пошкодженості в матеріалі досліджуваної області. Отримані залежності, як частинний випадок, враховують класичні та більш «прості» моделі середовищ і знаходяться у відповідності із сучасними уявленнями про будову структури матеріалу на мезорівні.

2. Запропоновані співвідношення моделі, які дозволяють проводити розрахунки середовищ з врахуванням їх структури, та аналізувати їх напружено-деформований стан. З використанням розроблених моделей визначені фізично обґрунтовані параметри оцінки зміни локальних властивостей в зернограничних областях, що дозволяють керувати схильністю до утворення міжзеренних пошкоджень сплавів технологічними обробками, які змінюють структурно-енергетичний стан границь зерен полікристалів.

3. Встановлено, що в залежності від параметрів фізичних і механічних характеристик локальних об'ємів структури полікристалічні матеріали поділяються на три групи – з малою, стабільною і катастрофічною схильністю до міжзеренного руйнування. Підвищення експлуатаційної надійності сплавів вимагає зменшення відносного градієнту властивостей зони «зерно – границя зерна».

## Література

1. Watanabe T. Grain Boundary Design For Desirable Mechanical Properties // Le Journal de Physique Colloques. 1988. Vol. 4. P. 507–519. doi: <http://doi.org/10.1051/jphyscol:1988562>

2. Lejcek P. Grain Boundary Segregation in Metals. Springer, 2010. 249 p. doi: <http://doi.org/10.1007/978-3-642-12505-8>

3. Макаров П. В. Об иерархической природе деформации и разрушения твердых тел // Физическая мезомеханика. 2004. Т. 7, № 4. С. 25–34.

4. Козлов Э. В. Измельчение зерна как основной ресурс повышения предела текучести // Вестник ТГУ. 2003. Т. 8, № 4. С. 509–513.

5. Энциклопедический словарь по металлургии: в 2-х томах. М.: Интермет Инжиниринг, 2000. 821 с.

6. Computational and theoretical aspects of a grain-boundary model that accounts for grain misorientation and grain-boundary orientation / Gottschalk D. et. al. // Computational Materials Science. 2016. Vol. 111. P. 443–459. doi: <http://doi.org/10.1016/j.commatsci.2015.09.048>

7. Kobayashi R., Warren J. A., Craig Carter W. A continuum model of grain boundaries // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2000. Vol. 140, Issue 1-2. P. 141–150. doi: [http://doi.org/10.1016/s0167-2789\(00\)00023-3](http://doi.org/10.1016/s0167-2789(00)00023-3)

8. Штремель М. А. Прочность сплавов. Часть I. Дефекты решетки. М.: МИСИС, 1999. 384 с.
9. Барьерное торможение дислокаций. Проблема Холла-Петча / Козлов Э. В., Жданов А. Н., Конева Н. А. // Физическая мезомеханика. 2006. Т. 9, № 3. С. 81–92.
10. Спектр и источники полей внутренних напряжений в деформированных металлах и сплавах / Корнева Н. А., Тишкина Л. И., Козлов Э. В. // Известия РАН. Серия физическая. 1998. Т. 62, № 7. С. 1350–1356.
11. Mughrabi H. A two-parameter description of heterogeneous dislocation distributions in deformed metal crystals // *Materials Science and Engineering*. 1987. Vol. 85. P. 15–31. doi: [http://doi.org/10.1016/0025-5416\(87\)90463-0](http://doi.org/10.1016/0025-5416(87)90463-0)
12. Kocks U. F. The relation between polycrystal deformation and single-crystal deformation // *Metallurgical and Materials Transactions B*. 1970. Vol. 1, Issue 5. P. 1121–1143. doi: <http://doi.org/10.1007/bf02900224>
13. Hirth J. P. The influence of grain boundaries on mechanical properties // *Metallurgical Transactions*. 1972. Vol. 3, Issue 12. P. 3047–3067. doi: <http://doi.org/10.1007/bf02661312>
14. Weinberg F. Grain boundaries in metals. Canada Department of Mines and Technical Surveys, 1958. 79 p. doi: <http://doi.org/10.4095/306660>
15. Работнов Ю. Н. Механизм длительного разрушения // Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 5–7.
16. Качанов Л. М. О времени разрушения в условиях ползучести // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1958. № 8. С. 26–31.
17. Фізико-математичне моделювання складних систем / під ред. Бурака Я. Й., Чаплі Є. Я. Львів: Сполом, 2004. 264 с.
18. Пелещак Р. М., Лукиянец Б. А. Электронное перераспределение в окрестности ядра линейной дислокации // Письма в ЖТФ. 1998. Т. 24, № 2. С. 37–41.
19. Кузин Н. О. Об одной математической модели изменения свойств материала // Прикладная механика. 2015. Т. 51, № 4. С. 125–132.
20. Afaghi-Khatibi A., Ye L., Mat Y.-W. An Effective Crack Growth Model for Residual Strength Evaluation of Composite Laminates with Circular Holes // *Journal of Composite Materials*. 1996. Vol. 30, Issue 2. P. 142–163. doi: <http://doi.org/10.1177/002199839603000201>
21. Chang K.-Y., Llu, S., Chang F.-K. Damage Tolerance of Laminated Composites Containing an Open Hole and Subjected to Tensile Loadings // *Journal of Composite Materials*. 1991. Vol. 25, Issue 3. P. 274–301. doi: <http://doi.org/10.1177/002199839102500303>
22. Xia S., Takezono S., Tao K. A nonlocal damage approach to analysis of the fracture process zone // *Engineering Fracture Mechanics*. 1994. Vol. 48, Issue 1. P. 41–51. doi: [http://doi.org/10.1016/0013-7944\(94\)90141-4](http://doi.org/10.1016/0013-7944(94)90141-4)
23. Legan M. A. Correlation of local strength gradient criteria in a stress concentration zone with linear fracture mechanics // *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*. 1994. Vol. 34, Issue 4. P. 585–592. doi: <http://doi.org/10.1007/bf00851480>
24. Харлаб В. Д. Градиентный критерий хрупкого разрушения: Межвуз. темат. сб. тр. СПБИСИ // Исследование по механике строительных конструкций и материалов. СПб.: Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 1993. С. 4–16.

25. Лебедев А. А., Швец В. П. Оценка поврежденности конструкционных сталей по параметрам рассеяния характеристик твердости материалов в нагруженном и разгруженном состояниях // Проблемы прочности. 2008. № 3. С. 29–37.

26. Maugin G. A. The thermomechanics of plasticity and fracture. Cambridge: Cambridge University Press, 1992. 350 p. doi: <http://doi.org/10.1017/cbo9781139172400>

27. Егоров А. И. Оптимальное управление линейными системами. К.: Выща школа, 1988. 278 с.

28. Кузин О. А. Роль изменения свойств локальных объемов зерен в процессах интеркристаллитного разрушения сталей после улучшения // European multi science journal. 2018. № 15. С. 27–29.

29. Иванова В. С. Механика и синергетика усталостного разрушения // ФХММ. 1986. № 1. С. 62–68.

30. Иванова В. С. Синергетика разрушения и механические свойства. М.: Наука, 1989. 167 с.

31. Волков И. А. Уравнения состояния вязкоупруго-пластических сред с повреждениями. М.: Физматлит, 2008. 424 с.