УДК 519.688+517.9
JEL Classification: F59
DOI: 10.15587/2312-8372.2019.179265

АПРОКСИМАЦІЯ ТА ПРОГНОЗУВАННЯ КВАЗІСТАЦІОНАРНИХ ПРОЦЕСІВ З РАПТОВИМИ ВИКИДАМИ

Кубів С. І.

1. Вступ

У світовій практиці на ринку товарів військового призначення (ТВП) включення в комерційні оферти, в якості складових частин, офсетних угод застосовується порівняно давно. Незважаючи на глобальні економічні спади, ринок військових офсетів демонструє сильну динаміку, що поповнюється значними програмами оборонних закупівель в країнах Азіатсько-тихоокеанського регіону і на Близькому Сході. В останні роки в офсетних контрактах з'явилися більш жорсткі умови щодо країн-імпортерів, щодо військових компенсацій і збільшення штрафних санкцій за невиконання зобов'язань. Така ситуація сприятиме зростанню ринку товарів військового призначення, але вона може також негативно вплинути на доходи країн-експортерів.

Представлена робота присвячена вельми актуальній та специфічній області фінансово-економічної діяльності – проблемам формування та оцінки офсетної політики держав на міжнародних ринках, зокрема, укладенню та виконанню офсетних контрактів [1, 2]. Процес укладення та виконання умов офсетного контракту в статистичному сенсі, безумовно, є нестаціонарним. Крім того, при укладенні офсетного контракту можуть мати місце найрізноманітніші раптові події, форс-мажорні обставини тощо – явища, які неможливо докладно описати та з припустимою точністю передбачити в повному обсязі.

Нестаціонарний випадковий процес – адекватна математична модель реальних процесів, що протікають у технічних системах, в економіці та суспільстві. При високому ступені абстракції та універсальності такої моделі результати, отримані при її використанні, звичайно, також будуть достатньо абстрактними, відокремленими від конкретних застосувань. Тому, перш за все, треба конкретизувати предметну область промислового або аграрного виробництва, економіки тощо. Від специфіки предметної області практично повністю будуть залежати характеристики процесів, що протікають в системі – динаміка (зокрема, статистична динаміка), поточні та фінальні імовірнісні характеристики, вид та асимптотика перехідних процесів і т. ін. Повертаючись до тематики офсетних контрактів, можна стверджувати, що в певному сенсі вони представляють собою нестаціонарні (можливо, слабо нестаціонарні) випадкові процеси з короткостроковими або середньостроковими викидами [3].

В роботі не будуть розглянуті регіональні або глобальні процеси розвитку, вичерпний аналіз цієї проблеми зроблено, в роботі [1]. Розглянемо тільки статистичні аспекти теми. Дуже важливими частинами науково-практичних досліджень у даній сфері діяльності є наступні:

– побудова математичної моделі процесу, що аналізується;

– побудова методу прогнозування розвитку даного процесу;

– оцінювання (на попередньому етапі – хоча б якісне) асимптотичних характеристик процесу.

Тому актуальним є розв'язання перерахованих завдань, чому і присвячена дана робота.

Таким чином, *об'єктом дослідження* є гетероскедастичні процеси при формуванні та оцінці офсетної політики держав на міжнародних ринках, зокрема, при укладенні та виконанні офсетних контрактів.

Метою даної роботи в цілому є розробка ефективної методики вибору математичних моделей дискретних часових рядів різних класів для квазістаціонарних процесів з викидами, що застосовуються при практичному прогнозуванні процесів.

2. Методика проведення досліджень

Математичні моделі раптових змін можуть будуватися, наприклад, на основі теорії викидів випадкових процесів [1] або методами теорії марковських процесів [2]. При дослідженні були використані методи теорії нестаціонарних випадкових процесів та теорії викидів випадкових процесів [4].

Теорія викидів достатньо відома і опрацьована, проте не досліджена у випадках нестаціонарних випадкових процесів. Існуюча теорія викидів дозволяє визначити імовірності знаходження випадкового параметру поза допусковим рівнем.

Для опису часових рядів використано математичні моделі, які можуть набувати різних форм. Серед них можна виділити авторегресивні моделі, моделі ковзкого середнього та інтегральні моделі. На їхній основі побудовано моделі авторегресивного ковзного середнього (ARMA), авторегресивного інтегрованого ковзного середнього (ARIMA) та фрактального проінтегрованого ковзного середнього (FARIMA).

3. Результати досліджень та обговорення

3.1. Математична модель офсетного процесу

В економіці та економетриці часто оперують поняттям гетероскедастичного, тобто слабо нестаціонарного процесу [4, 5]. Однак поняття нестаціонарності взагалі та слабкої нестаціонарності зокрема також треба конкретизувати.

Визначення стаціонарності випадкового процесу є одним з ключових у теорії ймовірностей. Воно дається у багатьох роботах зі статистичної теорії, наприклад, [6, 7]. Нагадаємо лише, що у прикладній статистиці та в економетриці частіше за все використовують поняття стаціонарності в широкому сенсі. Крім того, процес, стаціонарний у вузькому сенсі, є процесом, стаціонарним у широкому сенсі (але не навпаки. Це зауваження знадобиться у подальшому).

Нестаціонарний процес є таким, що не задовольняє умовам стаціонарності хоча б у широкому сенсі. Існує така класифікація нестаціонарних процесів:

– нестаціонарний процес з постійним математичним сподіванням та зі змінною в часі дисперсією;

– нестаціонарний процес з постійною дисперсією та зі змінним в часі математичним сподіванням;

– нестаціонарний процес з зі змінними в часі математичним сподіванням та дисперсією.

Широко вживаний, особливо в економетриці, термін «слабо нестаціонарний процес» є не досить конкретним, тому що він не дає регулярного шляху до визначення кількісних і, відповідно, порівняльних оцінок, більш придатним є термін «квазістаціонарний процес», що має деяке наближення до стаціонарного процесу. Цей термін зазвичай застосовується в тих випадках, коли характерний час встановлення рівноваги в стохастичній системі багато менше характерного часу зміни рівноважних параметрів системи, які визначаються впливом на систему. Квазістаціонарний процес протікає в консервативній системі і поширюється в ній так швидко, що за час поширення цього процесу в межах системи її стан не встигає змінитися. Під «системою» будемо розуміти як технічну, так й економічну систему, враховуючи їх характерні особливості.

При оцінці стійкості економічних систем під дією випадкових факторів широко використовують методи теорії викидів випадкових процесів. Викиди випадкового процесу (стаціонарного або квазістаціонарного) – це окремий розділ теорії випадкових процесів [8, 9]. Керуючись методами теорії нестаціонарних випадкових процесів та теорії викидів випадкових процесів, можна стверджувати, що комбінація квазістаціонарного процесу з послідовністю випадкових викидів цілком задовільно моделюється так званим фрактальним або самоподібним процесом [10, 11]. Останній має таку властивість: при порівняно повільних змінах математичного сподівання та/або дисперсії процесу на інтервалі спостереження T_s можуть мати місце короткострокові викиди (стрибки дисперсії) з середньою довжиною δt_σ, $\delta t_\sigma << T_s$. Самоподібні процеси також мають властивість повільно убуваючої залежності кореляційних та спектральних характеристик процесу.

У якості універсальної математичної моделі самоподібних процесів з повільно убуваючими залежностями використовують модель фрактальної інтегрованої авторегресії та ковзного середнього (*fractionally integrated autoregressive moving average* – *FARIMA*) [11]. Однак в цій моделі не враховується вплив викидів випадкових процесів на коефіцієнти чисельника та знаменника дрібно-раціональної функції, якою апроксимується сам процес авторегресії та ковзного середнього. Тому в наступному підрозділі розглянемо зв’язок параметрів викиду та коефіцієнтів апроксимуючої функції.

3.2. Властивості коефіцієнтів моделей різних класів для квазістаціонарних процесів з викидами

Змішаний процес авторегресії та ковзного середнього представляє собою дискретний часовий ряд виду:

$$y(n)=\sum_{l=1}^{L} b_l y(n-l)+\sum_{k=0}^{K} a_k u(n-k), \tag{1}$$

де $u(n-k)$, $k=0,1,2,\ldots,K$ – фактори зовнішнього збудження (випадкові шумові сигнали);

$y(n-l)$, $l=1,2,\ldots,L$ – відклики системи у попередні моменти часу;

a_k, b_l – вагові коефіцієнти. У загальному випадку $K \neq L$.

Взявши *z*-перетворення від виразу (1), отримаємо системну функцію $H(z)$. Запишемо загальний вираз для моделі авторегресії та ковзного середнього на площині *z*-перетворення:

$$H_{ARMA}(z)=\frac{\sum_{k=0}^{K} a_k z^{-k}}{1-\sum_{l=1}^{L} b_l z^{-l}}. \tag{2}$$

Судячи по виразу (1), маємо справу з моделлю стаціонарного дискретного часового ряду, який описується різницевим рівнянням з постійними коефіцієнтами. Відповідно, вираз (2) – системна функція даного часового ряду.

Змішаною моделлю авторегресії та ковзного середнього ($ARMA$) з відповідно обраними коефіцієнтами a_k, b_l можна цілком задовільно описувати реальні процеси. При раціональному виборі коефіцієнтів a_k, b_l можна будувати найбільш економічні моделі, що дають прийнятну апроксимацію з мінімальним числом параметрів.

Для таких специфічних видів нестаціонарності випадкових процесів, як процес з лінійно наростаючим математичним сподіванням, можна модифікувати модель $ARMA$ шляхом інтегрування членів, за допомогою яких формується ковзне середнє. Такий клас моделей представляє собою моделі авторегресії та проінтегрованого ковзного середнього (процес $ARIMA$).

Дискретний процес авторегресії та проінтегрованого ковзного середнього формується шляхом послідовного m-кратного сумування процесу (1), який, по суті, є процесом $ARMA$. Якщо у процесі $ARIMA$ порядок рівняння ковзного середнього дорівнює K, порядок рівняння авторегресії – L, а кратність інтегрування є M, отримуємо модель $ARIMA(K,M,L)$. Таким чином, моделлю $ARIMA(K,M,L)$ охоплюються класи стаціонарних $(M=0)$ процесів та процесів з нестаціонарністю M-го $(M>1)$ порядку.

Відомо [11], що абстрактні фрактальні процеси можуть мати дрібну та навіть змішану розмірність. Якщо кратність інтегрування M лежить у діапазоні $M+m$, $m\in[-1/2,1/2]$, $M=1,2,\ldots$, то приходимо до моделі авторегресії та фрактального проінтегрованого ковзного середнього $FARIMA[K,(M+m),L]$. Перетворення (2) включатиме розкладання чисельника $A(z)$ у біноміальний ряд:

$$\left[1-A(z)\right]^{d}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\binom{m}{n}\left[A(z)\right]^{n}, \tag{3}$$

де

$$\binom{m}{n}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n-1)}{n!}.$$

Вельми корисною властивістю такого розкладання є простота регулювання коефіцієнтів авторегресії та ковзного середнього в залежності від знаку параметру m. Зокрема, знаки коефіцієнтів автокореляції процесу, що описується рівняннями (1)–(3), співпадають зі знаком параметру m. Завдяки цій властивості швидкі зміни параметрів процесу (по суті, викиди) можна відслідковувати та прогнозувати з прийнятною точністю.

З іншого боку, при застосуванні моделі $FARIMA\left[K,(M+m),L\right]$ невірне визначення параметрів K, L приводить до розбіжностей в оцінюванні коефіцієнтів моделей авторегресії та ковзного середнього та, як наслідок, до похибок ідентифікації моделі. Для забезпечення стійкості моделі оцінки коефіцієнтів поліномів чисельника та знаменника раціональної функції мають базуватися на порівняльно малій частині даних вибірки. Іншими словами, максимальні величини часових зсувів повинні бути менше довжини вибірки, принаймні, на порядок. При невиконанні цієї умови похибки оцінювання на кінцях вибірки будуть необмежено зростати.

4. Висновки

Аналіз часової структури дискретних рядів різної природи відіграє ключову роль в прогнозуванні гетероскедастичних процесів, на які накладені раптові викиди. Розглянуті математичні моделі дискретних часових рядів, які характеризуються квазістаціонарністю та наявністю раптових викидів. В ході дослідження виявлено, що для апроксимації таких рядів найбільш перспективним підходом є застосування комбінованих фрактальних моделей авторегресії та інтегрованого ковзного середнього.

Проаналізовані переваги застосування таких моделей та труднощі, що виникають при неточному оцінюванні параметрів моделі. Показано, що слід звертати увагу на точність визначення коефіцієнтів розкладання поліномів чисельника та знаменника дрібно-раціональної функції, що використовується. Співвідношення між довжиною зсуву при обчисленні коефіцієнтів автокореляції та загальною довжиною вибірки може служити прийнятним індикатором коректності рішення.

Література

1. Бегма, В. М., Мокляк, С. П., Свергунов, О. О., Толочний, Ю. В.; Бегма, В. М. (ред.) (2011). *Офсетна політика держав в умовах глобалізації. Оцінки та прогнози.* К.: НІСД, 352.

2. Горбулін, В. П. (ред.) (2005). *Актуальні проблеми удосконалення системи військово-технічного співробітництва України*. К.: Національний центр з питань євроатлантичної інтеграції України; за загальною редакцією; Євроатлантикінформ, 287.

3. Офсетний шанс. *Defense Express*. Available at: https://defence-ua.com/index.php/statti/4944-spetstema-ofsetnyy-shans

4. Бідюк, П. І., Половцев, О. В. (1999). *Аналіз та моделювання економічних процесів перехідного періоду.* Київ: НТУУ «КПІ», 230.

5. Dougherty, C. (2016). *Introduction to Econometrics.* Oxford University Press, 608.

6. Rosenblatt, M. (1974). *Random Processes.* New York: Springer-Verlag, 228. doi: http://doi.org/10.1007/978-1-4612-9852-6

7. Doob, J. L. (1990). *Stochastic Processes.* Wiley-Interscience, 664.

8. Тихонов, В. И. (1970). *Выбросы случайных процессов*. М.: Наука, 392.

9. Тихонов, В. И., Хименко, В. И. (1987). *Выбросы траекторий случайных процессов*. М.: Наука, 304.

10. Stallings, W. (2002). *High-Speed Networks and Internets: Performance and Quality of Service.* Pearson Education, 744.

11. Pipiras, V., Taqqu, M. (2017). *Long-Range Dependence and Self-Similarity.* Cambridge University Press, 668.