УДК 517.977.56
DOI: 10.15587/2312-8372.2019.180548

ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОЙ ЛИНЕЙНОЙ НЕГЛАДКОЙ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Насияти М. М.

1. Введение

Дискретные динамические модели управляемых систем представляют собой важный как в теоретическом, так и в практическом отношении класс математических моделей, позволяющий охватить очень широкий круг реальных объектов. Среди задач оптимального управления важное место занимают задачи оптимального управления, описываемые дискретными многомерными и, в частности, двухпараметрическими системами. Многие реальные процессы описываются многопараметрическими, и, в частности, двухпараметрическими системами [1–3].

Дискретные двухпараметрические системы иногда называют также дискретными 2-D системами [4–6]. Начиная с 70-х годов XX века различные аспекты задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами интенсивно изучаются [7–9].

Ряд моделей обработки изображений в пространстве состояний описываются разностными уравнениями, представляющие собой разностный аналог системы гиперболических уравнений второго порядка с краевыми условиями Гурса-Дарбу [10]. Такие модели называются системами Форназини-Маркезини [11, 12]. Подобные модели используются также и при вероятностном описании изображений [13]. Ряд задач оптимального управления дискретными двухпараметрическими системами изучены, например, в работе [14]. Поэтому *актуальным* является исследование различных дискретных задач оптимального управления.

Таким образом, *объектом исследования* является линейная задача оптимального управления, описываемая дискретными двухпараметрическими системами при предположении, что управляемый процесс является ступенчатым. Рассматриваемая разностная система уравнений является дискретным аналогом линейного гиперболического уравнения с краевыми условиями Гурса. При этом считается, что минимизируемый, терминального типа, функционал является негладкой. А *цель работы* – найти при различных условиях оптимальности достаточные и необходимые условия.

2. Методика проведения исследований

Рассмотрим задачу о минимуме терминального функционала:

$$S(u)=\sum_{i=1}^{2}\Phi_i\left(z_i\left(t_i, X\right)\right), \tag{1}$$

при ограничениях:

$$u_i(t,x)\in U_i\subset R^{r_i},\ (t,x)\in D_i,\ i=1,2, \tag{2}$$

$$\begin{gathered}z_i(t+1,\ x+1)=A_i(t,x)z_i(t,x)+B_i(t,x)z_i(t+1,x)+\\+C_i(t,x)z_i(t,x+1)+f_i(t,x,u_i(t,x)),\ i=1,2,\end{gathered} \tag{3}$$

$$\begin{gathered}z_1(t_0,x)=\alpha(x),\ x=x_0,x_0+1,...,X,\\ z_1(t,x_0)=\beta_1(t),\ t=t_0,t_0+1,...,t_1,\ a(x_0)=\beta_1(t_0),\\ z_2(t_1,x)=G(x)z_1(t_1,x),\ x=x_0,x_0+1,...,X,\\ z_2(t,x_0)=\beta_2(t),\ t=t_1,t_1+1,...,t_2,\\ \beta_2(t_1)=G(x_0)z_1(t_1,x_0),\end{gathered} \tag{4}$$

где $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ – заданные скалярные функции, имеющие производные по направлениям до второго порядка включительно;

$A_i(t,x)$, $B_i(t,x)$, $C_i(t,x)$, $i=1,2$ – заданные $(n_i\times n_i)$, $i=1,2$-мерные матричные функции соответственно;

$f_i(t,x,u_i)$, $i=1,2$ – заданные n_i, $i=1,2$-мерные вектор-функции непрерывные по совокупности переменных;

$G(x)$ – заданная дискретная матричная функция;

$\alpha(x)$, $\beta_1(t)$, $\beta_2(t)$ – заданные дискретные вектор-функции соответствующих размерностей;

U_i, $i=1,2$ – заданные непустые и ограниченные множества;

$u_i(t,x)$, $i=1,2$ – r_i-мерные дискретные вектор-функции;

$\Phi_i(t)$, $i=1,2$ – заданные скалярные функции, имеющие производные по любому направлению до второго порядка включительно;

R^{r_i} – r_i-мерное линейное действительное пространство;

D_i, $i=1,2$ – i-мерный прямоугольник;

t_0, t_1, t_2, x_0, X – заданные параметры,

Отметим, что от функций $\Phi_i(z_i)$, $i=1,2$ не требуется выполнения условия Липшица.

Пару $u(t,x)=\left(u_1(t,x),u_2(t,x)\right)$ с вышеперечисленными свойствами назовем допустимым управлением, а $z(t,x)=\left(z_1(t,x),z_2(t,x)\right)$ – допустимым состоянием.

Здесь будут получены необходимые условия оптимальности первого и второго порядков в терминах производных по направлениям [15, 16]. В случае линейного критерия качества доказано необходимое и достаточное условие оптимальности.

3. Результаты исследований и обсуждение

3.1. Формула приращения и необходимые условия оптимальности

Пусть $\left(u(t,x),\, z(t,x)\right)$ фиксированный допустимый процесс. Через $\left(\bar{u}(t,x)=u(t,x)+\Delta u(t,x),\, \bar{z}(t,x)=z(t,x)+\Delta z(t,x)\right)$ обозначим произвольный процесс. Тогда ясно, что приращение $\Delta z(t,x)$ состояния $z(t,x)$ будет решением следующей задачи:

$$\begin{aligned}
&\Delta z_i(t+1,\ x+1)=A_i(t,x)\Delta z_i(t,x)+B_i(t,x)\Delta z_i(t+1,x)+\\
&+C_i(t,x)\Delta z_i(t,x+1)+\left[f_i(t,x,\bar{u}_i(t,x))-f_i(t,x,u_i(t,x))\right],\quad i=1,2,
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
&\Delta z_1(t_0,x)=0,\ x=x_0,\ \ x_0+1,\dots,X,\\
&\Delta z_1(t,x_0)=0,\ t=t_0,\ t_0+1,\dots,t_1,\\
&\Delta z_2(t_1,x)=G(x)\Delta z_1(t_1,x),\ x=x_0,x_0+1,\dots,X,\\
&\Delta z_2(t,x_0)=0,\ t=t_1,\ t_1+1,\dots,t_2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Через $R_i(t,x;\tau,s),\ i=1,2$ обозначим $(n_i\times n_i),\ i=1,2$ матричную функцию, являющуюся решением матричной разностной системы:

$$\begin{aligned}
&R_i(t,x;\tau-1,s-1)=R_i(t,x;\tau,s)A_i(\tau,s)+\\
&B_i(\tau-1,s)R_i(t,x;\tau-1,s)+C_i(\tau,s-1)R_i(t,x;\tau,s-1),
\end{aligned} \tag{7}$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned}
&R_i(t,x;\tau-1,x-1)=R_i(t,x;\tau,x-1)C_i(\tau,x-1),\\
&R_i(t,x;t-1,s-1)=R_i(t,x;t-1,s)B_i(t-1,s),\\
&R_i(t,x;t-1,x-1)=E_i.
\end{aligned} \tag{8}$$

Тогда решение краевой задачи (5), (6) по аналогии [14] можно представить в виде:

$$\Delta z_1(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_1(t,x;\tau,s)\Delta_{\bar{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s], \tag{9}$$

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]+$$
$$+R_2(t,x;t_1-1,x-1)z_2(t_1,x)+ \tag{10}$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t-1,s)A_2(t-1,s)\right]\Delta z_2(t_1,s).$$

С учетом (9) из (10) будем иметь:

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]+$$
$$+\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;t_1-1,x-1)G(x)R_1(t_1,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+$$
$$+\sum_{s=x_0}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,s-1)-R_2(t,x;t_1-1,s)A_2(t-1,s)\right]G(s)\times$$
$$\times\left[\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{\beta=x_0}^{x-1}R_2(t_1,s;\tau,\beta)\Delta_{\overline{u}_1(\tau,\beta)}f_1[\tau,\beta]\right].$$

Полагая

$$\Omega(t,x;\tau,s)=R_2(t,x;t_1-1,x-1)G(x)R_1(t_1,x;\tau,s)+$$
$$+\sum_{\beta=s+1}^{x-1}\left[R_2(t,x;t_1-1,\beta-1)-R_2(t,x;t_1-1,\beta)A_2(t_1-1,s)\right]G(\beta)R_1(t_1,\beta;\tau,s), \tag{11}$$

вышеприведенное представление записывается в виде:

$$\Delta z_2(t,x)=\sum_{\tau=t_0}^{t_1-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}\Omega(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{u}_1(\tau,s)}f_1[\tau,s]+$$
$$+\sum_{\tau=t_1}^{t-1}\sum_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{\overline{v}_2(\tau,s)}f_2[\tau,s]. \tag{12}$$

Отсюда ясно, что:

$$\Delta z_1(t_1, X) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} R_1(t_1, X;\, t, x) \Delta_{\overline{u}_1(t,x)} f_1[t, x],$$

$$\Delta z_2(t_2, X) = \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Omega(t_2, X;\, t, x) \Delta_{\overline{u}_1(t,x)} f_1[t, x] + \tag{13}$$

$$+ \sum_{\tau=t_0}^{t_2-1} \sum_{s=x_0}^{X-1} R_2(t_2, X;\, \tau, s) \Delta_{\overline{u}_2(\tau,s)} f_2[\tau, s].$$

Предположим, что множества:

$$f_i(t, x, U_i) = \{\alpha_i \in R^{\gamma_i} :\ \alpha_i = f_i(t, x, v_i),\ v_i \in U\},\ \ i = 1,2. \tag{14}$$

выпуклы при всех (t, x).

Специальное приращение допустимого управления $u(t,x) = (u_1(t,x),\, u_2(t,x))'$ определим по формуле:

$$\begin{cases} \Delta u_1(t, x; \varepsilon) = v_1(t, x; \varepsilon) - u_1(t, x), & (t, x) \in D_1, \\ \Delta u_2(t, x; \varepsilon) = 0, \quad (t, x) \in D_2, \end{cases} \tag{15}$$

где $\varepsilon \in [0,1]$ − произвольное число, а $v_1(t, x; \varepsilon) \in U_1$, $(t, x) \in D_1$ − произвольное допустимое управление такое, что:

$$\Delta_{v_1(t,x;\varepsilon)} f_1(t, x) = \varepsilon \Delta_{v_1(t,x)} f_1[t, x]. \tag{16}$$

(Это возможно в силу выпуклости множества (14)).

Через $\Delta z(t, x; \varepsilon) = (\Delta z_1(t, x; \varepsilon), \Delta z_2(t, x; \varepsilon))$ обозначим специальное приращение состояния $z(t, x) = (z_1(t, x), z_2(t, x))$, отвечающее приращению (15) управления.

Из представлений (13) ясно, что:

$$\Delta z_1(t_1, X;\, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} R_1(t_1, X;\, t, x) \Delta_{v_1(t,x)} f_1[t, x],$$

$$\Delta z_2(t_2, X;\, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{t=t_0}^{t_1-1} \sum_{x=x_0}^{X-1} \Omega(t_2, X;\, t, x) \Delta_{v_1(t,x)} f_1[t, x].$$

Положим

$$\ell_1(v_1)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}R_1(t_1,X;\,t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x],$$

$$\ell_2(v_2)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Omega(t_2,X;\,t,x)\Delta_{v_1(t,x)}f_1[t,x].$$

Вычислим специальное приращение функционала качества с учетом выражений для $\ell_i(v_1)$, $i=1,2$:

$$\Delta S_\varepsilon(u(t,x))=S(u(t,x)+\Delta u(t,x;\,\varepsilon))-S(u(t,x))=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}\left[\Phi_i(z_i(t_i,X)+\Delta z_i(t_i,X;\,\varepsilon))-\Phi_i(z_i(t_i,X))\right]=$$

$$=\left[\Phi_1(z_1(t_1,X)+\varepsilon\,\ell_1(v_1))-\Phi_1(z_1(t_1,X))\right]+$$

$$+\left[\Phi_2(z_2(t_2,X)+\varepsilon\,\ell_2(v_1))-\Phi_2(z_1(t_1,X))\right].$$

Отсюда, с учетом работ, например, [15, 16] имеем:

$$\Delta S_\varepsilon(u(t,x))=\varepsilon\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial\ell_i(v_1)}+\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial\ell_i(v_1)^2}+o(\varepsilon^2). \qquad (17)$$

Из разложения (17) сразу следует, что:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i(z_i(t_i,X))}{\partial\ell_i(v_1)}\ge 0. \qquad (18)$$

Далее, по аналогии с (15), положим:

$$\begin{cases}\Delta u_1(t,x;\mu)=0, & (t,x)\in D_1,\\ \Delta u_2(t,x;\mu)=v_2(t,x;\mu)-u_2(t,x), & (t,x)\in D_2,\end{cases} \qquad (19)$$

где $\mu\in[0,1]$ – произвольное число, а $v_2(t,x;\varepsilon)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$ произвольное число такое, что:

$$\Delta_{v_2(t,x;\mu)}f_2[t,x]=\mu\Delta_{v_2(t,x)}f_2[t,x], \qquad (20)$$

где $v_2(t,x)\in U$, $(t,x)\in D_2$ – произвольное допустимое управление, соответствующее управлению $v_2(t,x;\mu)$.

Через $\Delta z(t,x;\mu)=(\Delta z_1(t,x;\mu),\Delta z_2(t,x;\mu))$ обозначим специальное приращение состояния $z(t,x)=(z_1(t,x),z_2(t,x))$. Из представлений (9), (12) ясно, что:

$$\begin{cases}\Delta z_1(t,x;\mu)=0, \quad (t,x)\in D_1\cup(t_1,X),\\ \Delta z_2(t,x)=\mu\sum\limits_{\tau=t_1}^{t-1}\sum\limits_{s=x_0}^{x-1}R_2(t,x;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s].\end{cases} \tag{21}$$

Положим

$$\ell_3(v_2)=\sum_{\tau=t_0}^{t_2-1}\sum_{s=x_0}^{X-1}R_2(t_2,X;\tau,s)\Delta_{v_2(\tau,s)}f_2[\tau,s],$$

и вычислим специальное приращение критерия качества:

$$\begin{aligned}&\Delta S_\mu(u(t,x))=S(u(t,x)+\Delta u(t,x;\mu))-S(u(t,x))=\\ &=\Phi_2(z_2(t_2,X)+\Delta z_2(t_2,X;\mu))-\Phi_2(z_2(t_2,X))=\\ &=\Phi_2(z_2(t_2,X)+\mu\ell_3(v_2))-\Phi_2(z_2(t_2,X))=\\ &=\mu\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3(v_2)}+\frac{\mu^2}{2}\frac{\partial^2\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3^2(v_2)}+o(\mu^2).\end{aligned} \tag{22}$$

При достаточно малых μ из разложения (22) следует, что вдоль оптимального процесса $(u(t,x),z(t,x))$:

$$\frac{\partial\Phi_2(z_2(t_2,X))}{\partial\ell_3(v_2)}\geq 0. \tag{23}$$

Сформулируем результат:

Теорема 1. Если множества (14) выпуклы, то для оптимальности допустимого управления $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ в задаче (6)–(9) необходимо, чтобы выполнялись соотношения (18), (23) соответственно для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ и $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

Дадим понятие особого управления в рассматриваемой задаче.

Определение 1. Допустимое управление $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x))$ назовем особым первого порядка управлением в задаче (1)–(5), если для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$ и $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$ выполняются соответственно соотношения:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial\Phi_i\left(z_i\left(t_i,X\right)\right)}{\partial\ell_i\left(v_1\right)}\equiv 0,$$

$$\frac{\partial\Phi_2\left(z_2\left(t_2,X\right)\right)}{\partial\ell_3\left(v_2\right)}=0. \qquad (24)$$

При выполнении условий (24) из разложений (17), (22) соответственно, следует, что:

$$\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial^2\Phi_i\left(z_i\left(t_i,X\right)\right)}{\partial\ell_i^2\left(v_1\right)}\geq 0, \qquad (25)$$

$$\frac{\partial^2\Phi_2\left(z_2\left(t_2,X\right)\right)}{\partial\ell_3^2\left(v_2\right)}\geq 0. \qquad (26)$$

Сформулируем полученный результат:

Теорема 2. Для оптимальности особого, первого порядка управления $u(t,x)=\left(u_1\left(t,x\right),u_2\left(t,x\right)\right)$ в задаче (1)–(4) в случае выпуклости множества (14) необходимо, чтобы неравенства (25), (26) выполнялись соответственно для всех $v_1\left(t,x\right)\in U_1$, $\left(t,x\right)\in D_1$ и $v_2\left(t,x\right)\in U_2$, $\left(t,x\right)\in D_2$.

Неравенства (25), (26) являются необходимыми условиями оптимальности второго порядка в терминах производных по направлениям.

3.2. Необходимое и достаточное условие оптимальности

Предположим, что в задаче (5), (6) минимизируемый функционал является линейным, то есть:

$$S(u)=\sum_{i=1}^{2}g_i' z_i\left(t_i,X\right), \qquad (27)$$

где g_i, $i=1,2$ – заданные n_i, $i=1,2$-мерные соответственно, постоянные векторы.

В этом случае приращение критерия качества (27) записывается в виде:

$$\Delta S(u)=\sum_{i=1}^{2}g_i'\,\Delta z_i\left(t_i,X\right).$$

Учитывая представления (9)–(12), отсюда будем иметь:

$$\Delta S(u)=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} g_1' R_1(t_1, X, t, x)\Delta_{\bar{u}_1(t,x)} f_1[t,x]+$$

$$+\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} g_2' \Omega(t_2, X, t, x)\Delta_{\bar{u}_1(t,x)} f_1[t,x]+$$

$$+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} g_2' R_2(t_2, X;\, t, x)\Delta_{\bar{u}_2(t,x)} f_2[t,x]=$$

$$=\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\left[g_1' R_1(t_1, X; t, x)+ g_2' \Omega_1(t_2, X, t, x) \right]\times$$

$$\times\Delta_{\bar{u}_1(t,x)} f_1[t,x]+\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1} g_2' R_2(t_2, X;\, t, x)\Delta_{\bar{u}_2(t,x)} f_2[t,x].$$

Положим

$$\begin{gathered}
H_i(t,x,u_i,\psi_i)=\psi_i' f_i(t,x,u_i),\quad i=1,2,\\
\psi_1(t,x)=-R_1'(t_1,X;t,x)\,g_1-\Omega_1'(t_2,X,t,x)\,g_2,\\
\psi_2(t,x)=-R_2'(t_2,X;t,x)\,g_2.
\end{gathered}\tag{28}$$

Тогда формула приращения записывается в виде:

$$\begin{gathered}
\Delta S(u)=-\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{\bar{u}_1(t,x)} H_1\left(t,x,z_1^0(t,x),u_1^0(t,x),\psi_1^0(t,x)\right)-\\
-\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{\bar{u}_2(t,x)} H_2\left(t,x,z_2^0(t,x),u_2^0(t,x),\psi_2^0(t,x)\right).
\end{gathered}\tag{29}$$

При помощи формулы приращения (29) рассуждениями, аналогичными например из [14], доказывается:

Теорема 3. Для оптимальности допустимого управления $\left(u(t,x),z(t,x)\right)$ в задаче (1)–(4), (27) необходимо и достаточно, чтобы неравенство:

$$\begin{gathered}
\sum_{t=t_0}^{t_1-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_1(t,x)} H_1\left(t,x,z_1(t,x),u_1(t,x),\psi_1(t,x)\right)\le 0\,,\\
\sum_{t=t_1}^{t_2-1}\sum_{x=x_0}^{X-1}\Delta_{v_2(t,x)} H_2\left(t,x,z_2(t,x),u_2(t,x),\psi_2(t,x)\right)\le 0,
\end{gathered}\tag{30}$$

выполнялись соответственно для всех $v_1(t,x)\in U_1$, $(t,x)\in D_1$, $v_2(t,x)\in U_2$, $(t,x)\in D_2$.

4. Выводы

В представленной работе рассмотрен случай вырождения полученного необходимого условия оптимальности и установлены необходимые условия оптимальности второго порядка в терминах производных по направлениям.

Получено необходимое и достаточное условие оптимальности. А также при предположении линейности функционала качества доказано необходимое и достаточное условие оптимальности в форме дискретного условия максимума.

Результаты работы могут найти приложение в различных областях современной теории оптимального управления, а также при изучении конкретных задач оптимального управления.

Литература

1. Гайшун, И. В., Хоанг Ван Куанг (1991). Условия полной управляемости и наблюдаемости дискретных двухпараметрических систем. *Дифференциальные уравнения, 2,* 187–193.
2. Kaczorek, T. (1985). *Two-Dimensional Linear Systems*. Springer, 399. doi: https://doi.org/10.1007/bfb0005617
3. Fornasini, E., Marchesini, G. (1976). State-space realization theory of two-dimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control, 21 (4),* 484–492. doi: https://doi.org/10.1109/tac.1976.1101305
4. Afkhami, H., Argha, A., Roopaei, M., Ahrari Nouri, M. (2011). Optimal Iterative Learning Control Method for 2-D Systems using 1-D Model (WAM) of 2-D Systems. *World Applied Sciences Journal, 13 (11),* 2410–2419.
5. Nyman, P.-O. (2009). Hierarchical least squares optimal control of 2-D systems. *2009 American Control Conference*. doi: https://doi.org/10.1109/acc.2009.5160019
6. Rogers, E., Galkowski, K., Owens, D. H. (2007). *Control Systems Theory and Applications for Linear Repetitive Processes*. Springer. doi: https://doi.org/10.1007/978-3-540-71537-5
7. Kaczorek, T. (2005). Controllability and minimum energy control of positive 2D systems with delays. *Control and Cybernetics, 34 (2),* 411–423.
8. Kaczorek, T. (1991). Some recent results in singular 2-D systems theory. *Kybernetika, 27 (3), 253*–262.
9. Przyborowski, P., Kaczorek, T. (2009). Positive 2D Discrete-Time Linear Lyapunov Systems. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, 19 (1),* 95–106. doi: https://doi.org/10.2478/v10006-009-0009-3
10. Гайшун, И. В. (1996). *Многопараметрические системы управления.* Мн.: Наука и техника, 200.
11. Bisiacco, M., Fornasini, E. (1990). Optimal Control of Two-Dimensional Systems. *SIAM Journal on Control and Optimization, 28 (3),* 582–601. doi: https://doi.org/10.1137/0328035
12. Fornasini, E., Marchesini, G. (1976). State-space realization theory of two-dimensional filters. *IEEE Transactions on Automatic Control, 21 (4),* 484–492. doi: https://doi.org/10.1109/tac.1976.1101305
13. Прэтт, У. (1982). *Цифровая обработка изображений. Т. I, II.* М.: Наука.
14. Мансимов, К. Б. (2013). *Дискретные системы.* Баку: Изд-во БГУ, 151.

15. Демьянов, В. Ф. (1974). *Минимакс: Дифференцируемость по направлениям.* Л.: Изд-во ЛГУ, 120.

16. Демьянов, В. Ф., Рубинов, А. М. (1990). *Основы негладкого анализа и квази-дифференциальное исчисление.* М.: Наука, 432.