УДК 28.17.19

Аль-Азави Рази Джабур

УСТОЙЧИВОСТЬ МНОГОСТАДИЙНОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ПРИ КАТАСТРОФАХ С ПЕРЕМЕННОЙ ИНТЕНСИВНОСТЬЮ

Моделируется многостадийный процесс восстановления объекта произвольной природы при нестационарном потоке событий-аварий и экспоненциальной интенсивности восстановительных работ. Процесс проходит фиксированную последовательность этапов и описан уравнениями Колмогорова для вероятностей состояний. Представлены некоторые параметры Марковской модели.

Ключевые слова: *цепь Маркова, уравнения Колмогорова, максимальная энтропия.*

1. Введение

Рассматривается актуальная с точки зрения безопасности жизнедеятельности проблема моделирования процесса восстановления объекта силами специальной подсистемы, включающей человека-оператора. Общий подход к математическому моделированию систем «Человек — Машина — Среда» описан в работе [1]. Настоящая работа является развитием [2], где подобная задача была рассмотрена впервые.

Содержательное описание объекта моделирования и неформальная постановка задачи достаточно очевидна и была опубликована в предыдущих работах авторов [3—6]. В качестве входного воздействия, инициирующего отклик системы, рассматривается нестационарная последовательность аварий или катастроф (далее — «события»). Ликвидация аварий происходит в результате фиксированной последовательности мероприятий. Время, затраченное на каждый этап, случайно. В процессе ликвидации аварии работоспособность оператора может ухудшаться случайным образом от этапа к этапу. Восстановление работоспособности оператора в процессе ликвидации аварии не происходит. Целью данной работы является оценка динамических и стационарных (предельных) вероятностей для всех возможных состояний системы, которая имеет многоступенчатую подсистему восстановления, включающую человека.

2. Математическое описание и модель объекта

Рассмотрена Марковская модель n-этапного восстановления объекта после нестационарного потока катастроф. Соответствующий математический аппарат впервые систематически изложен в работе А. Я. Хинчина [7], и получил дальнейшее развитие в теории массового обслуживания [8]. Результатом моделирования является вектор $P(S_i, t)$ вероятностей состояний и его предельное значение P_i, соответствующее стационарному состоянию системы в целом.

Для частного случая, при $n = 3$ и отсутствии ветвления, т. е. различий работоспособности оператора, стандартным образом, построена система (1) дифференциальных уравнений Колмогорова, с учетом условия $\sum P_i = 1$.

Известно, что предельные при $t \to \infty$ вероятности существуют и совпадают со стационаром системы (1). Легко получаем устойчивое стационарное решение системы (1):

$$\begin{aligned}
&P_0' = -\lambda P_0 + \mu_1 P_1,\\
&P_1' = \mu_2 P_2 - (\lambda + \mu_1) P_1,\\
&P_2' = \mu_3 P_3 - (\lambda + \mu_2) P_2,\\
&P_3' = \lambda P_0 + \lambda P_1 + \lambda P_2 - \mu_3 P_3 .
\end{aligned} \tag{1}$$

Уравнения системы (1) легко обобщить на произвольное число состояний n и переменную интенсивность событий $\lambda(t)$ для нестационарного Пуассоновского потока аварий. Формулы стационарного решения также легко записать для произвольного n, однако они не могут быть использованы для переменного $\lambda(t)$. Соответствующая общему случаю, неавтономная система имеет матричный вид:

$$P'(t) = A(t) \cdot P(t) + F(t), \tag{2}$$

где $\mathbf{F}^T = (0,...,\lambda(t))$, $\mathbf{P}^T = (P_0, P_1, ..., P_n)$, при условии нормировки $\sum P_i = 1$.

Матрица (3) системы (1) двудиагональная, с отрицательными собственными значениями, из которых наименьшее по модулю — λ.

$$A = \begin{pmatrix} -\lambda & \mu_1 & ...0 & 0 \\ 0 & -(\lambda+\mu_1) & \mu_2 & ..0 \\ .. & .. & .. & .. \\ 0 & 0 & 0.. & -(\lambda+\mu_n) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Используем эмпирическую формулу для интенсивности катастроф:

$$\lambda(t) = \lambda_0 + bte^{\frac{-t}{a}}, \tag{4}$$

график которой, представлен на рис. 1. Она хорошо описывает «мульти-шоковый» характер катастроф — высокая интенсивность и частота в начале, а потом резкий спад интенсивности.

Отметим, что начало координат не может быть стационаром системы (1), поскольку не удовлетворяет условию нормировки для вероятностей. Формальная подстановка в (1) $\mathbf{P}' = \mathbf{0}$ также неправомерна и дает парадоксальный результат, поскольку система не автономна.

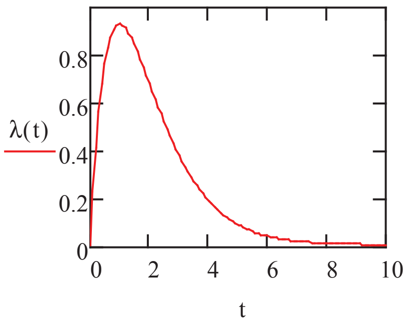

Рис. 1. «Мульти-шок» катастрофы природы: зависимость интенсивности событий от времени

Величины P_i, хотя и удовлетворяют условиям нормировки, являются функциями времени. Это — не стационар, и может быть использован лишь в пределе, когда $\lambda(t) \to \lambda_0$. На рис. 2 приведены характерные графики решений для реального случая, когда отношение средних времен аварии и ее ликвидации $\alpha = (1/\lambda)/(1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3) = 6{,}3$, а средняя общая длительность процесса $\tau = (1/\lambda) + (1/\mu_1 + 1/\mu_2 + 1/\mu_3) = 115{,}8$. Из рис. 2 видно, что устанавливаемость процесса очень медленная ($t \cong 40$).

Стационарные вероятности определены свободным членом $F(t)$ в уравнении (2). Действительно, в однородном уравнении с матрицей A, соответствующем (2) представим $A = A_0 + A_1(t)$, используя представление (4) для $\lambda(t)$. Очевидно, матрица А0 асимптотически устойчива, $\int_0^\infty \| A(t) \| dt < \infty$.

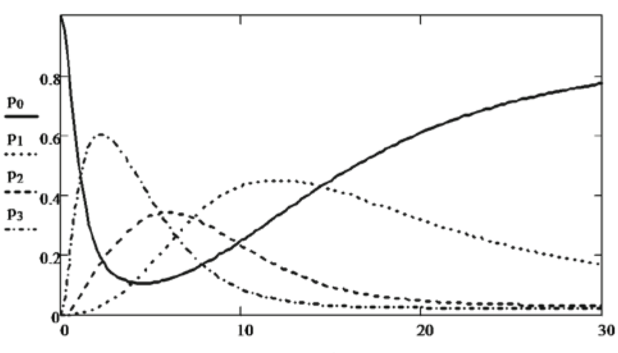

Рис. 2. Решения уравнений (1) Колмогорова с $\lambda(t)$ в форме (4): зависимость интенсивности событий от времени

Используя неравенство Гроноулла-Беллмана [9], доказано [10], что матрица А системы (2) также асимптотически устойчива, а значит ее собственные движения быстро затухают. Отметим, что наличие одинаковых интенсивностей μ приводит к кратным собственным числам в (3), что замедляет установление процесса.

Литература

1. Дзюндзюк, Б. В. Структуры и типы моделей систем «человек — машина — среда» [Текст] / Б. В. Дзюндзюк, И. В. Наумейко, Н. Н. Сердюк, Т. Е. Стыценко // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. — Харьков, 2007. — Вып. 138. — С. 47—50.
2. Наумейко, И. В. Марковские модели систем «человек — машина — среда» [Текст] / И. В. Наумейко, Н. Н. Сердюк // Электроника и информатика. — Харьков, 2005. — Вып. 4.
3. Наумейко, И. В. Модели систем «Человек — Машина — Среда» с восстановлением при неклассических потоках событий [Текст] / И. В. Наумейко, Р. Дж. Аль-Азави // Восточно-Европейского журнала передовых технологий. — 2013. — № 2/10(62). — С. 55—58.
4. Наумейко, И. В. Еще одна динамическая модель марковской системы человек — машина — среда, на которую действуют вредные факторы [Текст] / И. В. Наумейко, Р. Дж. Аль-Азави // Радиотехника. — № 172. — Харьков, 2013. — С. 118—124.
5. Аль-Азави, Р. Дж. Динамическая модель марковской человек — машина — среда, которая осуществляется некоторыми опасности [Текст] / Р. Дж. Аль-Азави // Инновационный потенциал украинской науки — XXI век. — Том 2. — Харьков, апреля 2013. — С. 95—96.
6. Севастьянов, Б. А. Формулы Эрланга в телефонии при произвольном законе распределения длительности разговора [Текст] / Б. А. Севастьянов // Труды III Всесоюзного математического съезда. — М.: АН СССР. — 1959. — Т. IV.
7. Хинчин, А. Я. Работы по математической теории массового обслуживания [Текст] / А. Я. Хинчин; под ред. Б. В. Гнеденко. — М.: Физматгиз, 1963. — 236 с.
8. Ивченко, Г. И. Теория массового обслуживания [Текст] / Г. И. Ивченко, В. А. Каштанов, И. Н. Коваленко. — М.: Высшая школа, 1982. — 256 с.
9. Беккенбах, Э. Неравенства [Текст] / Э. Беккенбах, Р. Беллман. — М.: Мир, 1965. — 276 с.
10. Самойленко, А. М. Дифференциальные уравнения [Текст] / А. М. Самойленко. — М.: Высшая школа, 1989. — 383 с.

СТАБІЛЬНІСТЬ БАГАТОСТАДІЙНОГО ПРОЦЕСУ ВІДНОВЛЕННЯ ПРИ КАТАСТРОФАХ ЗІ ЗМІННОЮ ІНТЕНСИВНІСТЮ

Моделюється багатостадійний процес відновлення об'єкта довільної природи при нестаціонарному потоці подій-аварій і експоненційної інтенсивності відновлювальних робіт. Процес проходить фіксовану послідовність етапів і описаний рівняннями Колмогорова для ймовірностей станів. Представлені деякі параметри Марківської моделі.

Ключові слова: ланцюг Маркова, рівняння Колмогорова, максимальна ентропія.

***Аль-Азави Рази Джабур**, аспирант, кафедра прикладной математики, Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Украина.*

***Аль-Азаві Разі Джабур**, аспірант, кафедра прикладної математики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Україна.*

***Al-Azawi Razi Jabur**, Kharkiv National University of Radio Electronics, Ukraine*