

Породько Л. В.,  
Лерман Л. Б.

## ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНА ЕНЕРГІЯ В КУЛЬОВИХ ШАРУВАТИХ НАНОЧАСТИНКАХ

У електростатичному наближенні розглянуто взаємодію кульових шаруватих наночастинок з електромагнітним випромінюванням. Із застосуванням трансляційних матриць знайдено розподіл полів у шарах кулі. Визначено інтенсивність енергії, що виділяється внаслідок наявності втрат у шарах. Задачу розглянуто в умовах радіальної симетрії.

**Ключові слова:** наночастинок, радіальна симетрія, трансляційні матриці, кінцеві інтегральні перетворення.

### 1. Вступ

Наночастинок мають унікальні оптичні властивості, і внаслідок їх розмірам, відкриваються широкі перспективи для їх застосування у різних галузях науки і техніки. Зараз велику увагу дослідників привертають, так звані, біметалеві наночастинок [1], які складаються із срібного ядра та золотої оболонки, або навпаки [2]. Змінюючи вміст золота і срібла у таких частинках, вдається керувати як частотою поверхневого плазмону, так і інтенсивністю поглинання [3, 4]. Це обумовлено тим, що частоти поверхневих плазмонів золота і срібла суттєво рознесені в оптичному діапазоні, а поглинання у срібних наночастинок значно більше ніж у золотих.

Розглянуто задачу про взаємодію електромагнітного випромінювання (ЕМВ) з неоднорідною кульовою наночастинок. Як і в [5], на відміну від відомих робіт [6, 7] передбачається, що в загальному випадку наночастинок можуть складатися з довільної кількості шарів (концентричні кулі). Ця обставина значно ускладнює задачу, оскільки потребує попереднього визначення напруженостей електромагнітного поля у шарах, що дозволяє визначити потужність теплових джерел.

Викладено постановку задачі електродинаміки і визначено функцію внутрішніх джерел, пов'язаних із зовнішнім опромінюванням, за допомогою трансляційних матриць побудовано розв'язок задачі електростатики і отримані формули для визначення напруженості електричного поля. Із загальних формул отримані замкнуті формули у важливому випадку поля, що діє вздовж осі симетрії кулі.

Ця робота продовжує дослідження [5–7], де визначаються характеристики світлорозсіяння, а в цій статті увага приділена визначенню внутрішніх полів у шарах.

### 2. Постановка задачі

Розглянемо кулю (рис. 1), яка складається з  $n$  концентричних шарів, зовнішні радіуси яких позначимо через  $r_j$  ( $j$  – номер шару і  $j=1,2,\dots,n$ ). Для зовнішнього радіусу кулі також використовується позначення  $a=r_n$ . Нумерація шарів починається з центру, тобто для ядра кулі  $j=1$ , а для зовнішнього середовища  $j=n+1$ . Шари характеризуються різними комплексними діелектричними проникностями (ДП)  $\epsilon_j = \epsilon'_j + i\epsilon''_j = \epsilon'_j(1 + itg\delta)$ . Характеристики зовнішнього середовища позначаються

через  $\lambda_m = \lambda_{n+1}$ ,  $c_{p,m} = c_{p,n+1}$ ,  $\rho_m = \rho_{n+1}$ ,  $\epsilon_m = \epsilon_{n+1}$ . Задачу будемо розв'язувати в сферичних координатах  $r, \theta, \phi$ , пов'язаних з центром кулі.

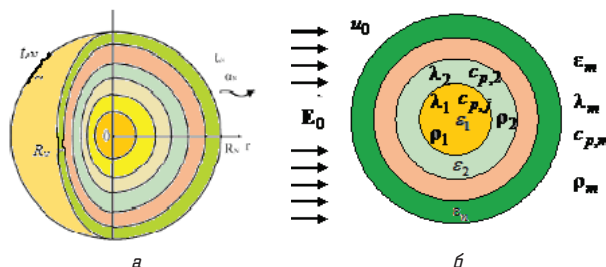


Рис. 1. Розрахункова схема багатошарової кулі: а — просторовий вигляд багатошарової кулі; б — переріз шаруватої кулі

Куля знаходиться під дією електромагнітного (лазерного) випромінювання з частотою  $\omega$  (довжиною хвилі  $\lambda_j$ ) і вектором електричної напруженості  $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0(t) = \text{Re}[\tilde{\mathbf{E}}_0(r, \theta, \phi)e^{-i\omega t}]$  та відповідним потенціалом  $\text{Re}[u_0(r, \theta, \phi)e^{-i\omega t}]$ . Внаслідок втрат енергії за рахунок наявності уявної частини ДП у шарах кулі відбуваються втрати енергії, що приводить до нагріву частинки.

Інтенсивність падаючого світла (одиниця вимірювання  $\text{Вт}/\text{м}^2$ ) задається формулою [2]:

$$I(t) = I_0 = c\mathbf{E}_0^2\sqrt{\epsilon_m}/(8\pi), \text{ якщо } t > 0, \\ \text{і } I(t) = 0, t < 0. \quad (1)$$

У загальному випадку з рівнянь Максвелла у випадку гармонічної залежності полів можна отримати хвильові рівняння. Частинними розв'язками цього рівняння є плоскі хвилі  $\mathbf{E}e^{-kr-i\omega t}$ , де  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(x, y, z)$  – просторовий радіус-вектор,  $k = 2\pi\sqrt{\epsilon}/\lambda$  – хвильове число. Якщо розглядається обмежена, відносно мала область ( $x, y, z \ll \lambda$ ),  $k \rightarrow 0$ , то поля становиться можливим описувати наближеним співвідношенням  $\mathbf{E}e^{-i\omega t}$ , яке і приймається в цій роботі.

Далі розглядаються малі частинки (наночастинок), що дозволяють обмежитись електростатичним (довгохвильовим) наближенням. Для знаходження  $\mathbf{E}$  потрібно розв'язати задачу електростатики, яку звичайно записують у вигляді рівняння відносно потенціалу  $u = u(r, \theta, \phi)$ :

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad} u) = 0, \quad (2)$$

де  $\mu = \mu(r)$ ,  $\epsilon$  кусково-сталою функцією.

У сферичних координатах вектор електричної напруженості виражається через потенціал відомою формулою:

$$\mathbf{E}(r, \theta, j) = \operatorname{grad} u(r, \theta, j) = \frac{\partial u}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta. \quad (3)$$

### 3. Розв'язок задачі та його обґрунтування

У постановці задачі потенціали і напруженості електричного поля пропорційні часовому множнику  $\exp(-i\omega t)$ , і задача розв'язується в електростатичному наближенні. Тому при виводі розрахункових співвідношень для скорочення запису цей множник будемо опускати. Задачу будемо формулювати відносно потенціалів.

Потенціали електростатичного поля в кожному з шарів позначимо через  $u_j = u_j(r, \theta, j)$ , потенціал зовнішнього поля — через  $u_0 = u_0(r, \theta, \varphi)$ , а збурений потенціал, який вносить куля, через  $u_p = u_p(r, \theta, \varphi)$ . Для кожного шару електричні напруженості  $\mathbf{E}_j(r, \theta, \varphi)$  пов'язані з потенціалами співвідношеннями:

$$\mathbf{E}_j(r, \theta, \varphi) = \operatorname{grad} u_j(r, \theta, \varphi) = \frac{\partial u_j}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta, \quad (4)$$

де  $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_\theta$  — орти сферичної системи координат.

Для кожного шару ДП є сталою, і рівняння (2) перетворюється на рівняння Лапласа, записаним для кожного шару:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_j}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_j}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (5)$$

На межах шарів повинні справджуватися умови неперервності потенціалів і нормальної складової вектора електричної індукції  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ ,  $u_j = u_{j+1}$ ,

$$\epsilon_j \frac{\partial u_j}{\partial r} = \epsilon_{j+1} \frac{\partial u_{j+1}}{\partial r}. \quad (6)$$

На поверхні кулі, тобто у випадку, коли  $j = n$  і  $r = a$ , матимемо умови:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{n+1} \Leftrightarrow u_n = u_0 + u_p, \\ \epsilon_n \frac{\partial u_n}{\partial r} &= \epsilon_m \left( \frac{\partial u_0}{\partial r} + \frac{\partial u_p}{\partial r} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

До умов (5, 6) додаються умови обмеженості розв'язків в початку координат і на нескінченності, тобто

$$u_l < \infty \text{ при } r \rightarrow 0 \text{ і } u_p \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (8)$$

Розв'язки рівнянь для  $j$ -го шару і збуреного потенціалу записуються у вигляді розкладів за сферичними гармоніками  $Y_{lm}(\theta, j) = P_l^m(\cos \theta) e^{imj}$ ,  $P_l^m(\cos \theta)$  — приєднані функції Лежандра [7, 8].

$$u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} \left[ A_{lm}^{(j)} \left( \frac{r}{a} \right)^l + B_{lm}^{(j)} \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$u_l(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(l)} \left( \frac{r}{a} \right)^l Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

$$u_p(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} B_{lm}^{(n+1)} \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} Y_{lm}(\theta, \varphi). \quad (9)$$

Враховано, що внаслідок обмеженості розв'язків в початку координат і на нескінченності  $A_{lm}^{(n+1)} = 0$ ,  $B_{lm}^{(1)} = 0$ .

При дії довільного зовнішнього поля на поверхні кулі, тобто при  $r = a$ , його потенціал  $u_0(r, \theta, \varphi)$  та частинна похідна  $\partial u_0(r, \theta, \varphi) / \partial r$ , обчислені на поверхні, будуть задавати деякі функції  $F(\theta, \varphi) = u_0(a, \theta, \varphi)$ ,  $G(\theta, \varphi) = \partial u_0(a, \theta, \varphi) / \partial r$ , які при досить загальних умовах можна розкласти в ряд за сферичними гармоніками:

$$\begin{aligned} F(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} f_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{imj}, \\ G(\theta, \varphi) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} g_{lm} P_l^m(\cos \theta) e^{imj}, \end{aligned} \quad (10)$$

де коефіцієнти  $f_{lm}$ ,  $g_{lm}$  рядів обчислюються за відомими формулами [9].

Розв'язок задачі отриманий за допомогою трансляційних матриць [6, 7, 10], полягає в знаходженні у розкладах (10) довільних сталих в кожному шарі. Матриці переходу від  $j$ -го до  $(j+1)$ -го шару  $T_{lm}^{(j)}(r_{j+1}, r_j)$  дозволяють зв'язати довільні сталі сусідніх шарів:

$$\gamma_{lm}^{(j+1)} = T_{lm}^{(j)}(r_{j+1}, r_j) \gamma_{lm}^{(j)}, \quad (11)$$

де  $\gamma_{lm}^{(j)} = [A_{lm}^{(j)}, B_{lm}^{(j)}]^T$  — вектор довільних сталих для  $j$ -го шару, а матриця переходу для кулі має вигляд:

$$\begin{aligned} T_{lm}^{(j)} &= T_{lm}^{(j)}(r_{j+1}, r_j) = \begin{bmatrix} t_{11}^{(j,lm)} & t_{12}^{(j,lm)} \\ t_{21}^{(j,lm)} & t_{22}^{(j,lm)} \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\Delta_{lm}^{(j)}} \begin{bmatrix} -\epsilon_{j+1}(l+1) \left( \frac{a}{r_j} \right)^2 - \epsilon_j l \left( \frac{a}{r_j} \right)^2 & -\epsilon_{j+1}(l+1) \left( \frac{a}{r_j} \right)^{2l+3} - \epsilon_j(l+1) \left( \frac{a}{r_j} \right)^{2l+3} \\ -\epsilon_{j+1} l \left( \frac{r_j}{a} \right)^{2l-1} + \epsilon_j l \left( \frac{r_j}{a} \right)^{2l-1} & -\epsilon_{j+1} l \left( \frac{r_j}{a} \right)^2 + \epsilon_j(l+1) \left( \frac{r_j}{a} \right)^2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (12)$$

а визначник  $\Delta_{lm}^{(j)} = -\epsilon_{j+1}(2l+1) \left( a/r_j \right)^2$  з точністю до множника  $\epsilon_{j+1}$  є визначником Вронського фундаментальних розв'язків, який обчислено на межі поділу шарів.

При переході від  $j$ -го до  $(j+q)$ -го шару будемо мати:

$$\gamma_{lm}^{(j+q)} = T_{lm}^{(j+q)}(r_{j+q}, r_j) \gamma_{lm}^{(j)}, \quad (13)$$

де при запису використана трансляційна матриця, яка визначається добутком матриць переходу:

$$T_{lm}^{(j+q)}(r_{j+q}, r_j) = T_{lm}^{(j+q-1)} T_{lm}^{(j+q-2)} \dots T_{lm}^{(j)}. \quad (14)$$

Якщо в рівності (14) покласти  $j=1$ ,  $j+q=n$ , то одержимо трансляційну матрицю переходу від першої до останньої межі поділу

$$T_{lm}^{(n)} = T_{lm}^{(n)}(r_n, r_1) = \prod_{j=1}^{n-1} T_{lm}^{(n-j)}. \quad (15)$$

Всі довільні сталі виражаються через дві:  $A_{lm}^{(1)}$  та  $B_{lm}^{(n+1)}$ , які визначаються з системи:

$$\begin{aligned} (t_{11}^{(lm)} + t_{21}^{(lm)})A_{lm}^{(1)} - B_{lm}^{(n+1)} &= f_{lm}, \\ \varepsilon_n [t_{11}^{(lm)} l - t_{21}^{(lm)} (l+1)] A_{lm}^{(1)} + \varepsilon_m (l+1) B_{lm}^{(n+1)} &= \varepsilon_m a g_{lm}, \end{aligned} \quad (16)$$

де через  $t_{11}^{(lm)}, t_{21}^{(lm)}, t_{12}^{(lm)}, t_{22}^{(lm)}$  позначені елементи трансляційної матриці  $T_{lm}^{(n)}$ .

З системи (16) знаходимо:

$$A_{lm}^{(1)} = \frac{\varepsilon_m [f_{lm} (l+1) + a g_{lm}]}{\varepsilon_m [t_{11}^{(lm)} + t_{21}^{(lm)}] (l+1) + \varepsilon_n [t_{11}^{(lm)} l - t_{21}^{(lm)} (l+1)]}, \quad (17)$$

$$B_{lm}^{(n+1)} = \frac{\varepsilon_m a g_{lm} [t_{11}^{(l)} + t_{21}^{(l)}] - \varepsilon_n f_{lm} [t_{11}^{(l)} l + t_{21}^{(l)} (l+1)]}{\varepsilon_m [t_{11}^{(l)} + t_{21}^{(l)}] (l+1) + \varepsilon_n [t_{11}^{(l)} l - t_{21}^{(l)} (l+1)]}. \quad (18)$$

Тепер можна знайти всі потрібні потенціали. Наприклад, для збуреного потенціалу із застосуванням трансляційної матриці будемо мати:

$$\begin{bmatrix} A_{lm}^{(n)} \\ B_{lm}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(lm)} & t_{12}^{(lm)} \\ t_{21}^{(lm)} & t_{22}^{(lm)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_{lm}^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(lm)} A_{lm}^{(1)} \\ t_{21}^{(lm)} A_{lm}^{(1)} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} A_{lm}^{(n)} &= t_{11}^{(l)} A_{lm}^{(1)} \\ B_{lm}^{(n)} &= t_{21}^{(l)} A_{lm}^{(1)}, \end{aligned}$$

і тоді потенціал в останньому шарі представляється у вигляді:

$$u_{lm}^{(n)} = A_{lm}^{(1)} \left[ t_{11}^{(lm)} \left( \frac{r}{a} \right)^l + t_{21}^{(lm)} \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right]. \quad (19)$$

Аналогічні вирази отримуємо і для інших шарів, змінюються тільки елементи матриць переходу, але всі розв'язки будуть залежати лише від сталої  $A_{lm}^{(1)}$ , яка визначається формулою (17). Таким чином, для потенціалів у шарах матимемо розклад:

$$u_j(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{m=l} A_{lm}^{(1)} \left[ t_{11,1j}^{(lm)} \left( \frac{r}{a} \right)^l + t_{21,1j}^{(lm)} \left( \frac{a}{r} \right)^{l+1} \right] Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad (20)$$

де через  $t_{11,1j}^{(lm)}, t_{21,1j}^{(lm)}$  позначені елементи трансляційної матриці при переході від 1-го до  $j$ -го шару.

Для визначення напруженості потрібно знайти частинні похідні потенціалів по координатах. Оскільки  $Y_{lm}(\theta, \varphi) = P_m(\cos \theta) (\cos m\varphi + \sin m\varphi)$ ,

$$|\mathbf{E}_j|^2 = \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_j}{\partial \varphi} \right)^2. \quad (21)$$

Вираз (21) достатньо складний для безпосереднього застосування, оскільки пов'язаний з підведенням подвійних рядів до квадрату. Задача суттєво спрощується у випадку, коли поле однорідне і діє вздовж осі кулі, наприклад осі  $z$ . Тоді його потенціал задається виразом  $u_0 = -E_0 z = -E_0 r \cos \theta$ , і в цьому випадку в розкладі потенціалу зовнішнього поля маємо лише один член ( $\cos \theta = P_1(\cos \theta)$ ,  $l=1, m=0$ ). На поверхні кулі буде  $f_{10} = -E_0 a$ ,  $g_{10} = -E_0$ .

Відповідно за випадком значень індексів  $l=1, m=0$  (задача становиться асиметричною, і індекс  $m$  писати не будемо) всі коефіцієнти розкладів потенціалів за винятком одного обертаються на нуль, тобто

$$u_j(r, \theta) = A \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \cos \theta, \quad (22)$$

де введено позначення

$$A = A_1^{(1)} = \frac{3a\varepsilon_m E_0}{2\varepsilon_m [t_{11}^{(1)} + t_{21}^{(1)}] + \varepsilon_n [t_{11}^{(1)} - 2t_{21}^{(1)}]}.$$

Відповідно для похідних матимемо, враховуючи, що  $\partial u_j(r, \theta) / \partial \varphi = 0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_j(r, \theta)}{\partial r} &= \frac{1}{a} A \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta, \\ \frac{\partial u_j(r, \theta)}{\partial \theta} &= -A \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \sin \theta, \end{aligned} \quad (23)$$

і тоді

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_j|^2 &= \left( \frac{\partial u_j}{\partial r} \right)^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_j}{\partial \theta} \right)^2 = \\ &= A^2 \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right] \cos \theta \right\}^2 + \\ &+ A^2 \left\{ \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right] \sin \theta \right\}^2. \end{aligned} \quad (24)$$

Отже вектори напруженості і їх модулі в шарах знайдені, що дозволяє визначити розподіл і потужність внутрішніх джерел у шарах. Для застосування формули (24) при розв'язуванні задачі теплопровідності [10], зробили деякі алгебраїчні перетворення. У результаті отримаємо вираз, який має два доданки і енергія поля представляється у вигляді:

$$\begin{aligned} |\mathbf{E}_j|^2 &= \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]^2 + \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^2 \right\} + \\ &+ \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]^2 - \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^2 \right\} \cos 2\theta. \end{aligned} \quad (25)$$

Для подальших застосувань запишемо вираз у вигляді:

$$|\mathbf{E}_j|^2 = S(r, \theta) = S_0(r) + S_2(r) \cos 2\theta, \quad (26)$$

де введені позначення

$$S_0(r) = \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]^2 + \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^2 \right\}, \quad (27)$$

$$S_2(r) = \frac{A^2}{2} \left\{ \frac{1}{a^2} \left[ t_{11,1j}^{(1)} - 2t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^3 \right]^2 - \left[ t_{11,1j}^{(1)} \frac{r}{a} + t_{21,1j}^{(1)} \left( \frac{a}{r} \right)^2 \right]^2 \right\}. \quad (28)$$

#### 4. Висновки

Розроблено математичний апарат для визначення напруженості електростатичних полів у багаточастинкових наночастинках. Це дає можливість визначити енергію, яка виділяється при дії лазерного випромінювання і може бути використано для лікування онкологічних захворювань.

#### Література

1. Prashant, K. Jain Au nanoparticles target cancer [Text] / K. J. Prashant, I. H. El-Sayed, M. A. El-Sayed // *Nanoday*. — 2007. — V. 2, № 1. — P. 18–29.
2. Govorono, A. O. Gold nanoparticle ensembles as heaters and actuators: melting and collective plasmon resonances [Text] / A. O. Govorono, Wei Zhang // *Nanoscale Res Lett.* — 2006. — № 1. — P. 84–90.
3. Борен, К. Поглощение и рассеяние света малыми частицами [Текст] / К. Борен, Д. Хафмен. — М.: Мир, 1986. — 664 с.
4. Chatterjee, K. Plasmon resonance shifts in oxide-coated silver nanoparticles [Text] / K. Chatterjee, S. Banerjee, D. Chakravorty // *Phys. Rev.* — 2002. — В. 66. — P. 085421-1 — 085421-7.
5. Лерман, Л. Б. Виникнення додаткових плазмових резонансів у шаруватих малих частинках [Текст] / Л. Б. Лерман // *Наносистеми, наноматеріали, нанотехнології.* — 2009. — Т. 7, № 1. — С. 37–47.
6. Гречко, Л. Г. Поляризованість структурно-неоднорідних кульових частинок [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Д. Л. Водоп'янов, С. В. Шостак. — Вісник Київського університету. — Серія: фіз-мат науки. — 2007. — № 1.
7. Гречко, Л. Г. Розсіювання електромагнітного випромінювання на багаточастинковій кулі [Текст] / Л. Г. Гречко, Л. Б. Лерман, Н. Г. Шкода // *Вісник Київського університету.* — Сер. фіз.-мат. — 2004. — № 3. — С. 376–384.
8. Корн, Г. Справочник по математике [Текст] / Т. Корн. — М.: Наука, 1973. — С. 831.

9. Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. — М.: Наука, 1972. — 355 с.
10. Породько, Л. В. Врахування кінцевої швидкості поширення тепла при лазерному розігріві поверхні твердого тіла [Текст] / Л. В. Породько, Л. Б. Лерман, О. Ю. Семчук // *Хімія, фізика та технологія поверхні.* — 2011. — Т. 2, № 3. — С. 343–346.

#### ЕЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ СЛОИСТЫХ НАНОЧАСТИЦАХ

В электростатическом приближении рассмотрено взаимодействие сферических слоистых наночастиц с электромагнитным излучением. С применением трансляционных матриц найдено распределение полей в слоистых шарах. Найдена интенсивность энергии, выделяемой вследствие наличия потерь в слоях. Задачу рассмотрено в условиях радиальной симметрии.

**Ключевые слова:** наночастицы, радиальная симметрия, трансляционные матрицы, конечные интегральные преобразования.

*Породько Лілія Володимирівна, аспірант, відділ теорії наноструктурних систем, Інститут хімії поверхні ім. О. О. Чуйка НАН України, Україна, e-mail: lilphys@mail.ru.*

*Лерман Леонід Борисович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, відділ теорії наноструктурних систем, Інститут хімії поверхні ім. О. О. Чуйка НАН України, Україна, e-mail: llerman@yandex.ru.*

*Породько Лілія Владимировна, аспірант, відділ теорії наноструктурних систем, Інститут хімії поверхні ім. А. А. Чуйко НАН України, Україна.*

*Лерман Леонід Борисович, кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, відділ теорії наноструктурних систем, Інститут хімії поверхні ім. А. А. Чуйко НАН України, Україна.*

*Porodko Liliya, Chuiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine, e-mail: lilphys@mail.ru. Lerman Leonid, Chuiko Institute of Surface Chemistry of National Academy of Sciences of Ukraine, Ukraine, e-mail: llerman@yandex.ru*

УДК 523.24:521.1; 523.6

**Черкас Ю. В.,  
Коломиец С. В.,  
Волощук Ю. И.**

## СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АСТЕРОИДОВ ПО БОЛЬШОЙ ПОЛУОСИ. LS-МЕТОД

*В работе приведена методика спектрального анализа распределения большой полуоси астероидов (данная методика также может быть использованной для анализа других элементов, как астероидов, так и других малых тел Солнечной системы) без построения соответствующих гистограмм численности/вероятности, получения которых является ключевым фактором большинства, если не всех, работ аналогичного направления.*

**Ключевые слова:** спектральный анализ, неравномерный ряд, элементы орбит, астероиды.

#### 1. Введение

На сегодняшний день подавляющее большинство работ, направленных на изучение особенностей распределений орбит малых тел Солнечной системы в пространстве возможных орбит, базируется на построении гистограмм численности (или же вероятности) по выбранному параметру [1–4]. Данный метод интуитив-

но понятен и имеет свои преимущества, позволившие в свое время сделать ряд открытий, например, наличие люков Кирквуда в главном поясе астероидов и других особенностей, вызванных резонансными явлениями и соизмеримостями. Более того, применив простые преобразования (удаление тренда, исключение нестационарных участков), можно получить остаточный ряд, который, согласно некоторым теориям и гипотезам [2–4],