УДК 519.766.4
DOI: 10.15587/2312-8372.2020.198436

РОЗРОБКА МЕТОДУ ПРОГНОЗУВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПОДІЙ У ПЕРІОДИ НЕСТАБІЛЬНОСТІ

Петровська С. В.

РАЗРАБОТКА МЕТОДА ПРОГНОЗИРОВАНИЯ СЛУЧАЙНЫХ СОБЫТИЙ В ПЕРИОДЫ НЕСТАБИЛЬНОСТИ

Петровская С. В.

DEVELOPMENT OF A METHOD FOR FORECASTING RANDOM EVENTS DURING INSTABILITY PERIODS

Petrovska S.

Об'єктом дослідження є випадкові події при формуванні нових економічних та фінансових моделей, зокрема, при кардинальних змінах економічної та соціальної стратегій. Область застосування та різноманітність методів, використовуваних в завданнях прогнозування випадкових процесів, велика. Перспективним математичним апаратом вирішення проблеми є статистичні методи аналізу. На сьогоднішній день існує багато методів прогнозування випадкових процесів, проте більшість існуючих моделей не є придатними для прогнозування нестаціонарних процесів. Одним з найбільш проблемних місць в прогнозуванні часових рядів є те, що єдиної методології, за якою можна було б аналізувати характеристики нестаціонарного випадкового процесу, не існує. Тому необхідно розробляти спеціальні методи аналізу, які можливо застосовувати до окремих випадків нестаціонарних процесів. Оптимальним варіантом вирішення проблеми може стати апроксимація часового ряду дрібно-раціональними функціями або так звана апроксимація Паде. Такий підхід повинен мати перевагу від поліноміальної апроксимації. При поліноміальній апроксимації поліном не може мати горизонтальної асимптоти, що не дає можливості робити довгострокові прогнози. Раціональна апроксимація гарантовано прагне до горизонтальної асимптоти, при цьому усі полюси дрібно-раціональної функції повинні лежати у лівій частині p-площини, тобто площини перетворення Лапласа. Запропоновано метод прогнозування нестаціонарних часових рядів з високою точністю оцінювання та гнучкістю параметрів. Для забезпечення стійкості методу та стабільності отриманих результатів запропоновано примусове введення полюсів апроксимуючої функції в зону стійкості – одиничне коло z-площини з дотриманням правил конформного перетворення. А саме – трансформацією лінійних розмірів та зі збереженням кутів між ортогональними координатами на нескінченно малих околицях координатної *площини (так званий консерватизм кутів). Показано, що при дотриманні конформності запропонованого перетворення зберігаються динамічні характеристики системи оцінювання та прогнозування. Цей метод особливо успішно може застосовуватися при наявності нестаціонарностей самої різної природи.*

Ключові слова: *випадкові процеси, нестаціонарні процеси, часові ряди, апроксимація Паде, довгостроковий прогноз, перетворення Лапласа.*

Объектом исследования являются случайные события при формировании новых экономических и финансовых моделей, в частности, при кардинальных изменениях экономической и социальной стратегии. Область применения и разнообразие методов, используемых в задачах прогнозирования случайных процессов, велика. Перспективным математическим аппаратом решения проблемы являются статистические методы анализа. На сегодняшний день существует много методов прогнозирования случайных процессов, однако большинство существующих моделей не пригодны для прогнозирования нестационарных процессов. Одним из самых проблемных мест в прогнозировании временных рядов является то, что единой методологии, по которой можно было бы анализировать характеристики нестационарного случайного процесса, не существует. Поэтому необходимо разрабатывать специальные методы анализа, которые можно применять к отдельным случаям нестационарных процессов. Оптимальным вариантом решения проблемы может стать аппроксимация временного ряда мелко-рациональными функциями или так называемая аппроксимация Паде. Такой подход должен иметь преимущество от полиномиальной аппроксимации. При полиномиальной аппроксимации поленом не может иметь горизонтальной асимптоты, что не дает возможности делать долгосрочные прогнозы. Рациональная аппроксимация гарантированно стремится к горизонтальной асимптоты, при этом все полюса мелко-рациональной функции должны лежать в левой части p-плоскости, то есть плоскости преобразования Лапласа. Предложен метод прогнозирования нестационарных временных рядов с высокой точностью оценки и гибкостью настроек. Для обеспечения устойчивости метода и стабильности полученных результатов предложено принудительное введение полюсов аппроксимирующей функции в зону устойчивости – единичную окружность z-плоскости с соблюдением правил конформного преобразования. А именно – трансформацией линейных размеров и с сохранением углов между ортогональными координатами на бесконечно малых окрестностях координатной плоскости (так называемый консерватизм углов). Показано, что при соблюдении конформности предложенного преобразования хранятся динамические характеристики системы оценки и прогнозирования. Этот метод особенно успешно может применяться при наличии нестационарности самой различной природы.

Ключевые слова: *случайные процессы, нестационарные процессы, временные ряды, аппроксимация Паде, долгосрочный прогноз, преобразование Лапласа.*

1. Вступ

У періоди нестабільності, які характерні для економіки перехідних періодів, змін економічної стратегії та особливо – в періоди глобальних змін критичного характеру, можуть мати місце події, які впливатимуть на основоположні засади функціонування. Для пророкування, а при можливості – для попередження таких подій необхідні потужні статистичні методи моделювання та прогнозування.

Особливістю змін, що розглядаються, є саме їх раптовість, яка виникає із-за відсутності апріорної інформації. Адекватною моделлю могла б служити модель типу спалаху білого шуму, але внаслідок надширокої смуги такого процесу він не дає практичних висновків для прийняття оперативних та коректних управлінських рішень. Прагнення побудувати модель, яка б найбільш точно відповідала реальній ситуації, негайній та адекватній реакції осіб, які приймають рішення, та необхідність підвищення якості прогнозів ведуть до модифікацій вже існуючих моделей та до появи нових класів моделей. Але при цьому треба ретельно аналізувати неочевидні, на перший погляд, слабкі місця таких моделей.

Пошуку відповідей на ці актуальні питання і присвячена дана робота.

2. Об'єкт дослідження та його технологічний аудит

При формуванні економічних стратегій з точки зору математичного моделювання виникає задача прогнозування часових рядів різного походження, оскільки є вплив багатьох факторів. При цьому необхідно аналізувати безліч чинників, що визначають поведінку того чи іншого об'єкта. При прогнозуванні економічних показників досить жорстко висуваються вимоги до точності прогнозування, це призводить до постійного пошуку нових простих і адекватних, як правило, формальних математичних моделей. Таким чином, *об'єктом дослідження* є випадкові події при формуванні нових економічних та фінансових моделей, зокрема, при кардинальних змінах економічної та соціальної стратегій.

Одним з найбільш проблемних місць в прогнозуванні часових рядів є те, що єдиної методології, за якою можна було б аналізувати характеристики нестаціонарного випадкового процесу, не існує в принципі. Тому необхідно розробляти спеціальні методи аналізу, які можливо застосовувати до окремих випадків нестаціонарних процесів.

Оскільки єдиного підходу до аналізу характеристик нестаціонарного випадкового процесу не існує в принципі, необхідно шукати шляхи вирішення проблеми. Для цього можна застосовувати альтернативні підходи. Перший – розробити класифікацію нестаціонарних випадкових процесів з вичерпним математичним описом усіх характеристик кожного класу. На основі цієї математичної моделі теоретично можна синтезувати загальний метод та алгоритм оцінювання. Другий – розробляти спеціальні методи аналізу, які можливо застосовувати тільки до окремих класів нестаціонарних процесів.

На думку автора даної роботи, загальний метод та алгоритм обробки, який охоплював би усі можливі класи нестаціонарних випадкових процесів, матиме занадто високу складність для того, щоб отримувати результати прийнятної якості. Як завжди, оптимум між двома альтернативними підходами – з нульовою якістю обслужити всі випадкові процеси або з ідеальною якістю обслужити пусту множину випадкових процесів – лежить десь посередині.

3. Мета та задачі дослідження

Метою даної роботи є розробка потужного та точного методу прогнозування нестаціонарних часових рядів з можливістю оцінювання параметрів випадкових процесів.

Для досягнення поставленої мети необхідно виконати такі задачі:

1. Провести аналіз існуючих підходів до прогнозування раптових подій.
2. Обґрунтувати та обрати підхід до прогнозування випадкових процесів.
3. Оцінити локальні характеристики нестаціонарності процесу за поточною реалізацією та синтез відповідних методів й алгоритмів апроксимації.

4. Дослідження існуючих рішень проблеми

На сьогоднішній день розроблено безліч моделей прогнозування раптових подій. Математичні моделі раптових змін можуть будуватися, наприклад, на основі теорії викидів випадкових процесів [1] або методами на базі теорії марковських процесів [2]. Однак ці теорії, при досить високому ступені абстракції рідко дають практичні результати, які можна було б застосовувати для досягнення реальних цілей.

Останнім часом набули популярності нейромережеві моделі прогнозування. Основним недоліком класу нейромережевих моделей є недоступність проміжних обчислень, що виконуються системою, і, як наслідок, складність інтерпретації результатів моделювання. Крім того, слабкою стороною даного класу моделей є складність вибору алгоритму навчання нейронної мережі [3, 4].

Роль статистичних методів аналізу в даний час не втрачає значення та неухильно зростає. Область застосування та різноманітність методів, використовуваних в завданнях прогнозування часових рядів, велика. При цьому більшість запропонованих методів [5] відносяться до аналізу стаціонарних часових рядів. Але залишається питання, якщо ряд нестаціонарний, то ці методи не дають достовірного результату. Найчастіше за природою походження досліджувані часові ряди є результатом спостереження поведінки складних систем, детермінований опис яких є неможливий [6].

В літературних джерелах описано різні підходи до аналізу часових рядів. Це пов’язано, перш за все, із різноманітністю походження часових рядів. Серед основних робіт присвячених вирішення цієї проблеми, можна виділити роботи, спрямовані на побудову адекватних математичних моделей часових рядів, зокрема, фінансових часових рядів [7, 8]. Ці моделі будуються з використанням результатів теорії системного аналізу та теорії конфлікту [9, 10].

Для прогнозування нестаціонарних процесів у більшості проаналізованих робіт використовують регресійні моделі з урахуванням тренду різних видів [11, 12]. Однак при цьому не враховуються суттєві обмеження результатів прогнозування на основі тренду. Зокрема, у випадках, коли процес містить повільний тренд або стрибки математичного сподівання. У якості тренду зазвичай беруть поліноміальну модель. Проектування тренду на великий термін в майбутнє є недоцільним, оскільки рано чи пізно змінна повинна стабілізуватися, а поліном не може мати горизонтальної асимптоти. Крім того, виділення тренду та сезонної складової слід здійснювати за допомогою ітераційного процесу, що передбачає, по крайній мірі, дві оцінки кожного компонента. В результаті обсяг обчислень буде, як правило, значним навіть для швидкодіючих комп'ютерів [13].

Полином навіть високого степеню не дає гарного прогнозу. У всякому разі, його можна використовувати в цій якості лише для досить близького майбутнього. Для значень ж, розташованих на значному віддаленні, цей поліном зростає, причому зростає і його похідна. Відповідно, зростає й похибка прогнозу [14, 15].

Таким чином, результати аналізу дозволяють зробити висновок про те, що, непогані результати може дати апроксимація ряду дрібно-раціональними функціями або так звана апроксимація Паде [16, 17]. Такий підхід повинен мати перевагу від поліноміальної апроксимації. При поліноміальній апроксимації поліном не може мати горизонтальної асимптоти, що не дає можливості робити довгострокові прогнози. Раціональна апроксимація гарантовано прагне до горизонтальної асимптоти, при цьому усі полюси дрібно-раціональної функції повинні лежати у лівій частині *p*-площини, тобто площини перетворення Лапласа.

5. Методи дослідження

Апроксимація Паде [18] представляє функцію у вигляді відношення двох поліномів. Використовуючи апроксимацію Паде за допомогою раціональної (точніше, дрібно-раціональної) функції, можна позбутися обмежень, пов'язаних з розкладанням у ряд Тейлора.

Поки вважаємо функцію, що підлягає апроксимації, функцією дійсної змінної. Слідуючи Бейкеру [19], конкретизуємо коефіцієнти поліномів. Очевидно, вони визначаються коефіцієнтами розкладання функції в ряд Тейлора. Таким чином, якщо задано розкладання в степеневий ряд виду:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i, \qquad (1)$$

то апроксимація Паде є раціональною функцією виду:

$$\frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M}, \qquad (2)$$

розкладання якої в ряд Тейлора співпадає з розкладанням (1).

Функція (2) має $L+1$ коефіцієнтів у чисельнику та $M+1$ коефіцієнтів у знаменнику. Весь набір коефіцієнтів визначається з точністю до загального множника. Для спрощення можна покласти один з постійних членів (a_0 або b_0) рівним одиниці, оскільки це не впливає на динамічні властивості процесу, який підлягає апроксимації. Покладемо для визначеності $b_0 = 1$. Тоді матимемо $L+1$ вільних членів у чисельнику та M у знаменнику дробі (2), тобто $L+M+1$ вільних членів всього. Тоді коефіцієнти розкладання функції $[L/M]$ у ряд

Тейлора при ступенях $1, x, x^2, \ldots, x^{L+M}$ повинні співпадати з відповідними коефіцієнтами ряду (1). Звідси випливає очевидне співвідношення:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_L x^L}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M} + O\left(x^{L+M+1}\right). \tag{3}$$

Умножимо функцію (3) на знаменник дробі. Знаходимо, що:

$$\begin{gathered}\left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M\right) \cdot \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i = \left(b_0 + b_1 x + \ldots + b_M x^M\right) \times \\ \times \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots\right) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_L x^L + O\left(x^{L+M+1}\right).\end{gathered} \tag{4}$$

Прирівнюючи коефіцієнти при $x^{L+1}, x^{L+2}, \ldots, x^{L+M}$, отримаємо очевидні рівності:

$$\begin{gathered} b_M c_{L-M+1} + b_{M-1} c_{L-M+2} + \ldots b_0 c_{L+1} = 0; \\ b_M c_{L-M+2} + b_{M-1} c_{L-M+3} + \ldots b_0 c_{L+2} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_M c_L + b_{M-1} c_{L+1} + \ldots b_0 c_{L+M} = 0. \end{gathered} \tag{5}$$

Для узагальнення покладемо $c_j \equiv 0$ при $j < 0$.

Нагадаємо, що за визначенням $b_0 = 1$. Тоді можна переписати рівності (5) у вигляді системи M лінійних рівнянь з M невідомими коефіцієнтами знаменника:

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_{L+M} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Порівнюючи у формулі (4) коефіцієнти при однакових ступенях x – $1, x, x^2, \ldots, x^L$, знайдемо коефіцієнти чисельника $a_0, a_1, \ldots, a_L$:

$$
\begin{aligned}
& a_0 = c_0; \\
& a_1 = c_1 + b_1 c_0; \\
& \vdots \\
& a_L = c_L + \sum_{k=1}^{\min[L,M]} b_k c_{L-k}.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Як видно з виразу (7), у загальному випадку мінімальне число доданків у сумі $\sum_{k=1}^{\min[L,M]} b_k c_{L-k}$ обирається з пари $[L,M]$: якщо $L > M$, обирається число M, якщо $L < M$ – обирається число L. Однак у задачі апроксимації є додаткові міркування по співвідношенню степенів L та M, які будуть обговорені далі.

Формули (6), (7) представляють собою пару рівнянь Паде. З цих рівнянь визначаються коефіцієнти чисельника та знаменника апроксимації Паде $[L/M]$ (у тому випадку, коли система рівнянь (6) має стійкий розв'язок. Умови отримання стійкого розв'язку також обговорені нижче).

Коефіцієнти членів ряду Тейлора, в який розкладається функція $f(x)$ по ступеням $1, x, x^2, \ldots, x^{L+M}$, співпадають з відповідними коефіцієнтами ряду (1).

Якщо вважати функцію $f(z)$ аналітичною функцією, що визначається на всій площині комплексної змінної єдиним образом, цю функцію можна розповсюдити на комплексну область. Нехай на відрізку $[x_1, x_2]$ дійсної вісі X задана неперервна функція $f(x)$ дійсної змінної. Тоді в деякій області $\wp$ комплексної площини, яка містить відрізок $[x_1, x_2]$ дійсної вісі, може існувати лише одна аналітична функція $f(z)$ комплексної змінної z, що приймає дані значення $f(x)$ на відрізку $[x_1, x_2]$. Функція $f(z)$ є аналітичним подовженням функції $f(x)$ дійсної змінної x в комплексну область $\wp$. При цьому матиме місце природний перехід від розкладання функції $f(x)$ у ряд Тейлора до розкладання функції $f(z)$ у ряд Лорана [20, 21]:

$$
f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{(z - z_0)^n},
\tag{8}
$$

де z_0 – фіксована точка z-площини.

Нехай ряд Лорана має кінцеве число m членів з негативними ступенями. Тоді ізольована особа точка функції $f(z)$ є полюсом m-го порядку. За допомогою апроксимації Паде ряду Лорана $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ можна отримати наближення функції $f(z)$ з похибкою, що необмежено прагне до нуля, але тут виникають дві проблеми: побудови апроксимації Паде та її збіжності до функції, яка апроксимується. Для побудови апроксимації Паде за виразами (6) та (7) треба мати тільки коефіцієнти ряду (8). Проблему стійкості та збіжності отриманих рішень розглянемо у наступному підрозділі.

6. Результати дослідження

Як відомо, будь-який ступеневий ряд має свою область збіжності – коло збіжності радіусом R. При $|z| < R$ ряд збігається, при $|z| > R$ – розбігається. Якщо $R \to \infty$, ряд представляє собою функцію, аналітичну всюди в комплексній площині [18]. Значення функції в довільній точці z може бути наближено отримано безпосереднім сумуванням ряду, причому похибка наближення (апроксимації) при необмеженому збільшенні числа членів ряду монотонно прагне до нуля:

$$\varepsilon_{appr} = \left| f(z) - \sum_{k=-K}^{K} c_k z^k \right| \to 0 \text{ при } K \to \infty .$$

Якщо послідовність апроксимацій Паде формального степеневого ряду (8) збігається до функції $f(z)$ у колі збіжності $\mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}$, у практичних застосуваннях можна з упевненістю вважати, що ряд Лорана типу (8) відповідає функції $f(z)$. Якщо ряд Лорана збігається до функції $f(z)$ у колі $|z| < R,\ 0 < R < \infty$, то теоретично послідовність апроксимацій Паде може збігатися в більш широкій області. Але для практичних застосувань (і саме для них!) принциповий інтерес має проблема стійкості рішення: при яких умовах поліном:

$$\frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots + b_M z^M}, \tag{9}$$

який, по суті, відіграє роль аналітичного подовження поліному (2) на площину комплексної змінної z, буде стійким. Позитивна відповідь на це питання буде мати місце при задоволенні умови збіжності апроксимації Паде у одиничному колі z-площини [17]. Дана умова задовольняється порівняно просто.

У відповідності з основною теоремою вищої алгебри [17] поліном довільного ступеню (припустимо, ступеню N) з дійсними коефіцієнтами має рівно N коренів, які є або дійсними, або створюють комплексно-зв'язані пари. Тоді знаменник поліному (2) та чисто формально знаменник поліному (9) мають рівно M коренів. Ці корені є полюсами функції комплексної змінної (9). Якщо ці полюси не виходять за межі одиничного кола z-площини, об'єкт (цифровий фільтр, різницеве рівняння тощо) є стійким. Іншими словами, він повертається у стабільний стан після завершення збудження.

Таким чином, при застосуванні апроксимації Паде треба контролювати абсолютні значення полюсів апроксимуючого поліному. Це – своєрідна платня, яку приходиться платити за високу точність апроксимацій Паде та їх збіжність до горизонтальної асимптоти навіть при низькому порядку апроксимуючого полінома [17, 19]. У зв'язку з цим відмітимо, що апроксимуючий поліном зберігатиме свої властивості прагнення до горизонтальної асимптоти (зокрема, до вісі абсцис) при виконанні простої умови. У виразах типу (9) завжди повинно виконуватися правило $L < M$, тобто ступінь чисельника функції (9) повинен завжди бути менше ступеня знаменника.

На завершення цього підрозділу розглянемо ще один тонкий момент конструювання апроксимації Паде. Якщо в апроксимуючому поліномі (9) один чи декілька полюсів виходять за межі одиничного кола z-площини, то ряд Лорана є таким, що розходиться усюди, крім точки $z = 0$, а його застосування, по суті, стає марним.

Для примусового повернення полінома виду (9) до стійкого стану необхідно повернути «ненадійні» полюси всередину одиничного кола. Для цього треба зробити модулі полюсів меншими одиниці, але так, щоб кутове положення цих полюсів не змінювалося, тобто дотриматися правила консерватизму кутів [21]. Найпростіше за все це можна зробити, представивши полюс як комплексне число у показовій формі. Нехай m-й полюс $p_m = |p_m| \cdot exp\left(j\varphi_{pm}\right)$, причому $|p_m| > 1$. Візьмемо новий полюс:

$$p_{m\,new} = \left[1/|p_m|\right] \cdot exp\left(j\varphi_{pm}\right).$$

На рис. 1 показана діаграма розташування початкового полюса p_m, який по модулю більше одиниці, що призводить до нестійкості функції $f\left(z\right)$, та модифікованого полюса $p_{m\,new}$, модуль якого $\left|p_{m\,new}\right| = 1/|p_m|$ за визначенням менше одиниці.

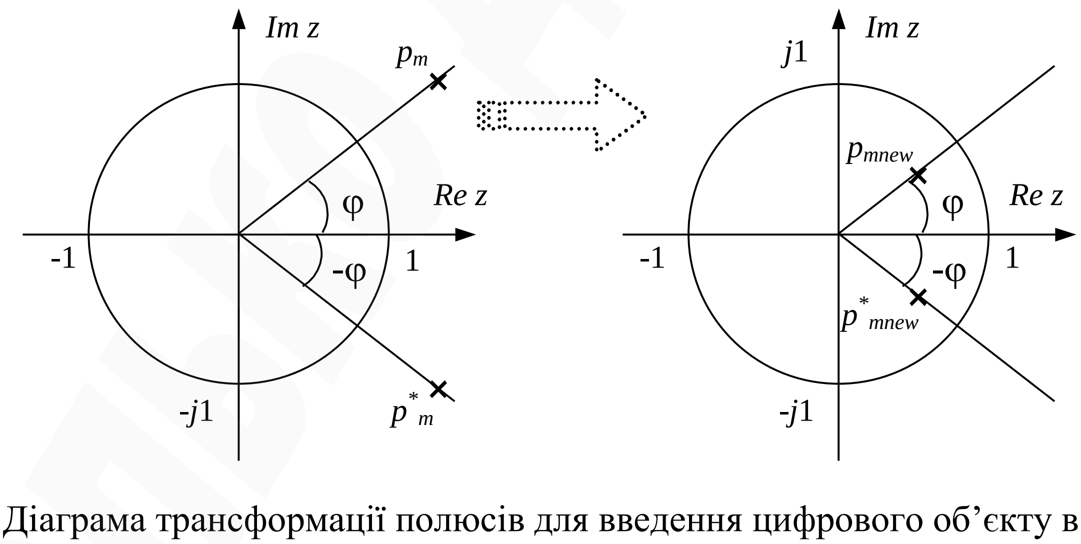
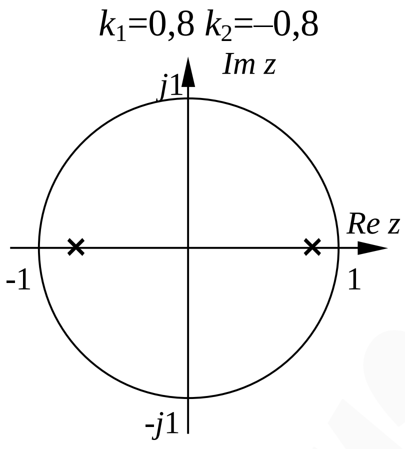
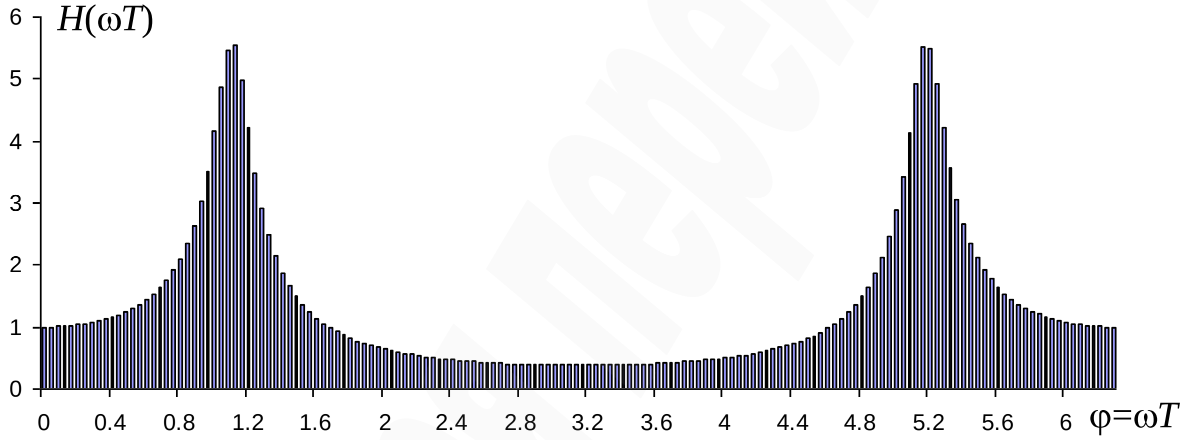


Рис. 1. Діаграма трансформації полюсів для введення цифрового об'єкту в зону стійкості. $\left|p_{m\,new}\right| = 1/|p_m|$, $\left|p^*_{m\,new}\right| = 1/\left|p^*_m\right|$, $\varphi = const$, $-\varphi = const$

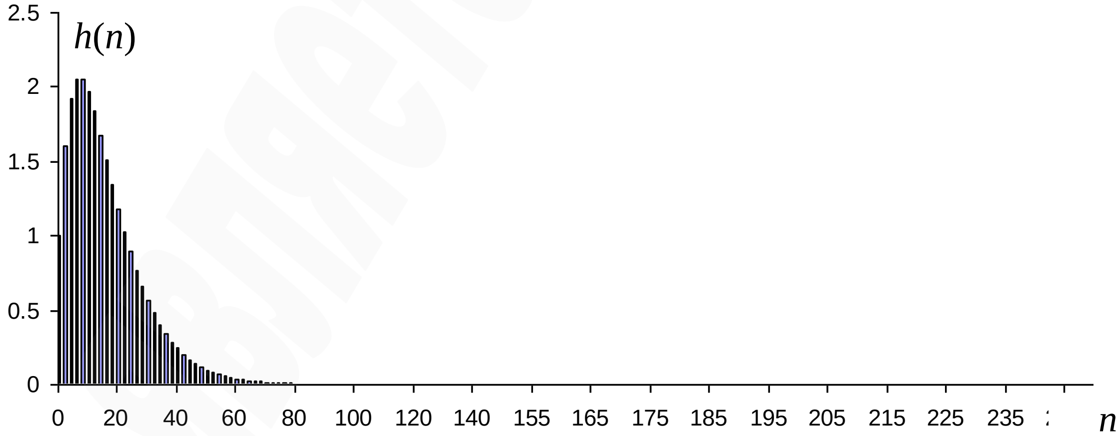
При дзеркальному відображенні полюса всередину одиничного кола з дотриманням консерватизму кутів динаміка зміни станів об'єкту не порушується [22]. На рис. 2, 3 у якості прикладу показані амплітудно-частотні та імпульсні характеристики цифрового фільтра другого порядку; стійкого – імпульсна характеристика прагне до нуля (рис. 2) та нестійкого – імпульсна характеристика необмежено зростає (рис. 3).



а

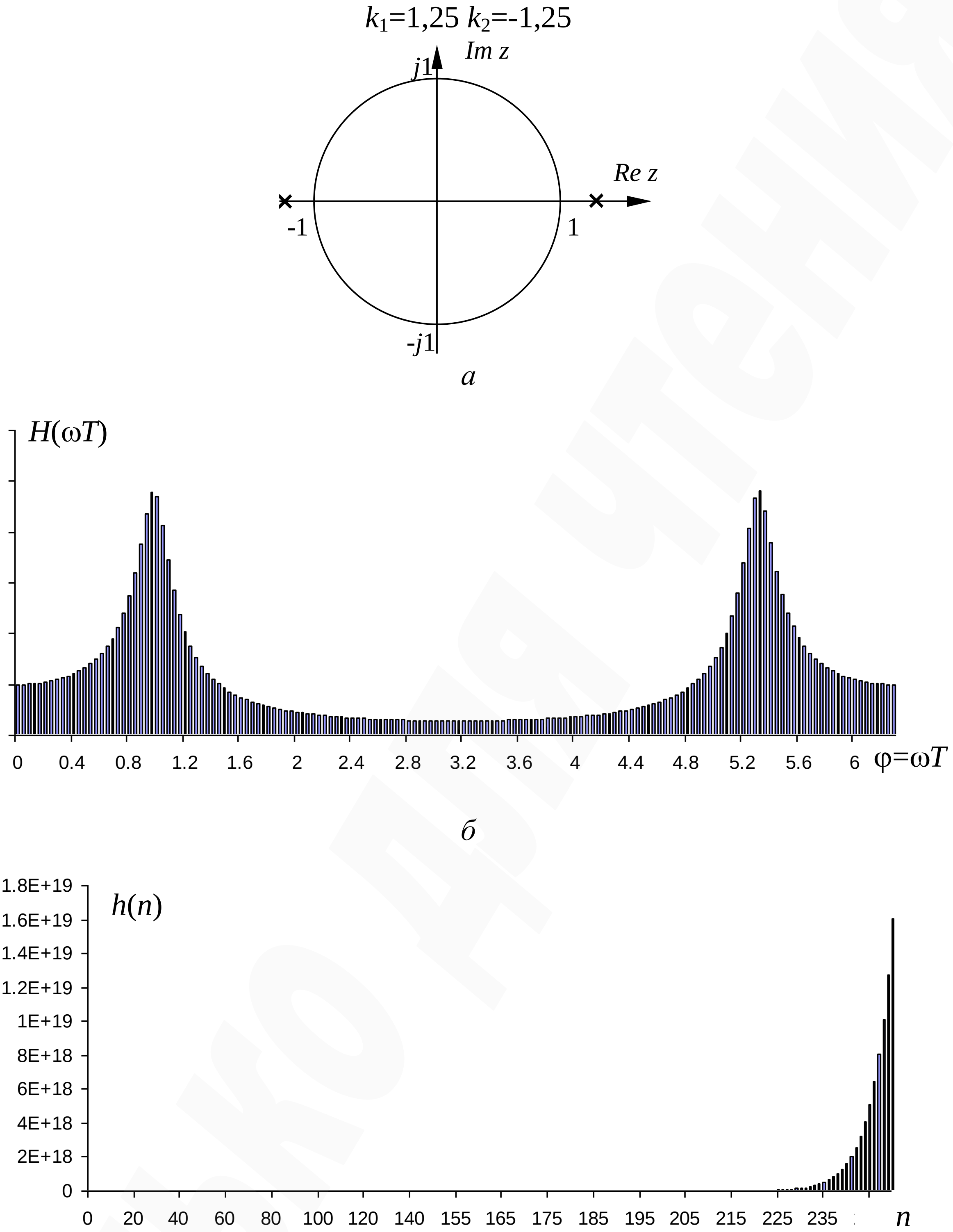


б



в

Рис. 2. Стійкий об’єкт: *а* – полюси всередині одиничної окружності;
б – амплітудно-частотна характеристика;
в – імпульсна характеристика



в

Рис. 3. Нестійкий об’єкт: *а* – полюси поза одиничною окружністю;
б – амплітудно-частотна характеристика;
в – імпульсна характеристика

Зверніть увагу на ідентичність амплітудно-частотних характеристик на відміну від розходження імпульсних характеристик. Отже, можна стверджувати, що запропоноване перетворення є конформним.

7. SWOT-аналіз результатів досліджень

Strengths. Для отримання найбільш точних результатів прогнозу в запропонованому методі використано підхід, заснований на апроксимації Паде, при зазначеному способі ідентифікації параметрів випадкових процесів, буде забезпечена найбільша точність прогнозу.

Weaknesses. Негативною стороною при застосуванні апроксимації Паде є те, що треба контролювати абсолютні значення полюсів апроксимуючого поліному. Проте, ця незручність компенсується високою точністю апроксимацій Паде та їх збіжністю до горизонтальної асимптоти, навіть при низькому порядку апроксимуючого полінома.

Opportunities. У подальшому планується розробити метод спрощення аналізу шляхом розкладання апроксимуючої функції високого порядку на адитивну композицію елементарних ланок першого чи другого порядку з дійсними коефіцієнтами. Для обчислення вагових коефіцієнтів елементарних ланок доцільно використовувати метод теорії лишків – потужний та ефективний метод теорії функцій комплексної змінної.

Threats. Практично неможливо, щоб статистичні моделі були «всеосяжними» у сенсі включення всіх відповідних змінних, які впливають на параметри процесу. Неідеальна природа статистичних моделей посилюється реальним свідченням того, що вихідні дані часто є неповними, непослідовно закодованими та взагалі «сирими». Основні фактори впливу на характеристики досліджуваних процесів є настільки різними та непередбачуваними, що результати кожного нового експерименту є практично унікальними. Натурально, статистичний аналіз необхідно проводити лише за одною вибіркою-реалізацією випадкового процесу.

8. Висновки

1. Проведено аналіз існуючих підходів до прогнозування раптових подій, який показав, що на сьогоднішній день існує багато методів прогнозування випадкових процесів, серед яких методи, засновані на теорії ланцюгів Маркова, теорії випадкових викидів, нейромережеві моделі та ін.

2. Показано, що більшість існуючих моделей не є придатними для прогнозування нестаціонарних процесів. Це пов’язано, перш за все, із різноманітністю походження часових рядів. Показано, що оптимальним варіантом вирішення проблеми може стати апроксимація часового ряду дрібно-раціональними функціями або так звана апроксимація Паде.

3. Для оперативного та точного пророкування глобальних подій у періоди нестабільності в роботі запропоновано новий потужний метод статистичної обробки та прогнозування часових рядів з урахуванням специфіки нестаціонарності процесу, оцінкою його локальних характеристик. Метод прогнозування нестаціонарних часових рядів розроблено з високою точністю оцінювання та гнучкістю параметрів. Цей метод особливо успішно може застосовуватися при наявності нестаціонарностей самої різної природи. Для забезпечення стійкості методу та стабільності отриманих результатів

запропоновано примусове введення полюсів апроксимуючої функції в зону стійкості – одиничне коло *z*-площини з дотриманням правил конформного перетворення. А саме – трансформацією лінійних розмірів та зі збереженням кутів між ортогональними координатами на нескінченно малих околицях координатної площини (так званий консерватизм кутів). Показано, що при дотриманні конформності запропонованого перетворення зберігаються динамічні характеристики системи оцінювання та прогнозування.

References

1. Deng, L., O'Shaughnessy, D. (2018). *Probability and Random Processes. In Speech Processing*. CRC Press, 91–97.
2. De Bastiani, F., Rigby, R. A., Stasinopoulous, D. M., Cysneiros, A. H. M. A., Uribe-Opazo, M. A. (2016). Gaussian Markov random field spatial models in GAMLSS. *Journal of Applied Statistics, 45 (1),* 168–186. doi: http://doi.org/10.1080/02664763.2016.1269728
3. Shaitura, S. V. (2016). Neironnye seti. *Intellektualnye sistemy i tekhnologii,* 47–62.
4. Gelman, A., Carlin, J. B., Stern, H. S., Rubin, D. B. (2000). *Bayesian Data Analysis*. New York: Chapman and Hall, CRC Press, 670.
5. Kastner, G., Frühwirth-Schnatter, S., Lopes, H. F. (2017). Efficient Bayesian Inference for Multivariate Factor Stochastic Volatility Models. *Journal of Computational and Graphical Statistics, 26 (4),* 905–917. doi: http://doi.org/10.1080/10618600.2017.1322091
6. Shumway, R. H., Stoffer, D. S. (2017). *Time series analysis and its applications: with R examples*. Springer. doi: http://doi.org/10.1007/978-3-319-52452-8
7. Lin, L.-C., Sun, L.-H. (2019). Modeling financial interval time series. *PLOS ONE, 14 (2),* e0211709. doi: http://doi.org/10.1371/journal.pone.0211709
8. Tsay, R. S. (2010). *Analysis of Financial Time Series*. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc., 677. doi: http://doi.org/10.1002/9780470644560
9. Kendall, M. G. (1990). *Time series*. E. Arnold, 296.
10. Schelling, T. C. (1981). *The Strategy of Conflict*. Harvard University Press, 328.
11. Anderson, T. W. (1994). *Statistical Analysis of Time Series*. John Wiley & Sons, 720. doi: http://doi.org/10.1002/9781118186428
12. Hosmer, D. W., Lemeshow, Jr. S. (2008). *Applied logistic regression*. Hoboken: John Wiley & Sons Ltd., 396.
13. Bidiuk, P. I., Trofymchuk, O. M., Kozhukhivska, O. A. (2012). Prohnozuvannia volatylnosti finansovykh protsesiv za alternatyvnymy modeliamy. *Naukovi visti Natsionalnoho tekhnichnoho universytetu Ukrainy «Kyivskyi politekhnichnyi instytut», 6,* 36–45.
14. Dodonov, A. H., Lande, D. V. (2011). *Zhyvuchest ynformatsyonnikh system*. Kyiv: Naukova dumka, 256.
15. Niedzwiecki, M., Ciolek, M. (2019). On Noncausal Identification of Nonstationary Multivariate Autoregressive Processes. *IEEE Transactions on Signal Processing, 67 (3),* 769–782. doi: http://doi.org/10.1109/tsp.2018.2885480
16. Dubrovin, V. T. (2010). *Teoriia funkcii kompleksnogo peremennogo (teoriia i praktika)*. Kazan: Kazanskii gosudarstvennii universitet, 102.

17. Astafeva, A. V., Starovoitov, A. P. (2016). Hermite-Padé approximation of exponential functions. *Sbornik: Mathematics, 207 (6),* 3–26. doi: http://doi.org/10.4213/sm8470

18. Schött, J., Locht, I. L. M., Lundin, E., Grånäs, O., Eriksson, O., Di Marco, I. (2016). Analytic continuation by averaging Padé approximants. *Physical Review B, 93 (7).* doi: http://doi.org/10.1103/physrevb.93.075104

19. Brezinski, C., Redivo-Zaglia, M. (2015). New representations of Padé, Padé-type, and partial Padé approximants. *Journal of Computational and Applied Mathematics, 284,* 69–77. doi: http://doi.org/10.1016/j.cam.2014.07.007

20. Kozlowski, V. V., Mishchenko, A. V., Sakhybay, T. (2015). Method of simulation of UAV facilities numerical state. *In 2015 IEEE International Conference Actual Problems of Unmanned Aerial Vehicles Developments (APUAVD),* 109–111. doi: http://doi.org/10.1109/apuavd.2015.7346574

21. Krantz, S. G., Parks, H. R. (2012). Advanced Implicit Function Theorems. *The Implicit Function Theorem,* 117–144. doi: http://doi.org/10.1007/978-1-4614-5981-1_6

22. Schoukens, J., Godfrey, K., Schoukens, M. (2018). Nonparametric Data-Driven Modeling of Linear Systems: Estimating the Frequency Response and Impulse Response Function. *IEEE Control Systems, 38 (4),* 49–88. doi: http://doi.org/10.1109/mcs.2018.2830080

The object of research is random events in the formation of new economic and financial models, in particular, with cardinal changes in economic and social strategies. The scope and variety of methods used in the prediction of random processes is large. Promising mathematical apparatus for solving the problem are statistical methods of analysis. Today, there are many methods for predicting random processes, but most existing models are not suitable for predicting non-stationary processes. One of the most problematic places in forecasting time series is that there is no single methodology by which to analyze the characteristics of a non-stationary random process. Therefore, it is necessary to develop special methods of analysis that can be applied to individual cases of unsteady processes. The optimal solution to the problem may be the approximation of the time series by finely rational functions or the so-called Padé approximation. Such an approach should take advantage of polynomial approximation. In polynomial approximation, polynomial can't have horizontal asymptotes, which makes it impossible to make long-term forecasts. A rational approximation is guaranteed to tend to horizontal asymptotes, with all the poles of the finely rational function lying on the left side of the p-plane, that is, the Laplace transform plane. A method for predicting non-stationary time series with high accuracy of estimation and flexibility of settings is proposed. To ensure the stability of the method and the stability of the obtained results, it is proposed that the poles of the approximating function be introduced into the stability zone – the unit circle of the z-plane in compliance with the rules of conformal transformation. Namely, by transforming linear dimensions and preserving the angles between the orthogonal coordinates on infinitely small neighborhoods of the coordinate plane (the so-called conservatism of angles). It is shown that, subject to the conformity of the proposed transformation, the dynamic characteristics of the estimation and *forecasting system are stored. This method can be especially successfully applied in the presence of non-stationarity of various natures.*

Keywords: *random processes, non-stationary processes, time series, Padé approximation, long-term forecast, Laplace transform.*