УДК 517.983
DOI: 10.15587/2706-5448.2020.210775

ЗНАХОДЖЕННЯ УМОВ СКІНЧЕННОСТІ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА НЕСАМОСПРЯЖЕНОЇ МОДЕЛІ ФРІДРІХСА У ВИПАДКУ ОДНОВИМІРНОГО ЗБУРЕННЯ

Черемних Є. В., Івасик Г. В., Олексів І. Я.

Об'єктом даного дослідження є модель Фрідріхса у випадку одновимірного збурення оператора множення на незалежну змінну. Одним з найбільш проблемних місць у даній теорії є випадки, коли кількість власних значень є нескінченна. Тому важливим є знаходження умов, при яких матимемо скінченну кількість власних значень.

В даній роботі використано стандартні методи функціонального аналізу, а саме: обчислення норм операторів, знаходження спряженого оператора, обчислення норм функціоналів, обчислення резольвенти оператора з обґрунтуванням умов існування резольвенти. Традиційно, збурення оператора подано у факторизованому вигляді (тобто у вигляді добутку двох операторів, один з яких діє з основного простору у певний допоміжний простір, а інший, навпаки, з допоміжного простору в основний). Крім методів функціонального аналізу, доводилось працювати з невласними інтегралами по нескінченному проміжку. Підкреслимо, що у даній роботі також використано поняття малості по нормі та поняття малості по розмірності. В даному випадку розмірність оператора збурення є одновимірною.

Отримано таке твердження: якщо встановлено, що в інтегралі є скінченна кількість власних значень і якщо при цьому встановлено, що резольвента прямує до нуля при $\sigma \to \infty$, тоді на всій осі буде скінченна кількість власних значень. За рахунок накладання умови на різницю між збуренням і спряженим збуренням знаходимо скінченність спектра оператора. Завдяки тому, що маємо скінченність спектра, то отримуємо можливість працювати з виразами різної тематики. Цей факт значно спрощує всі обчислення незалежно від того, якої природи досліджувані вирази: механічної, фізичної чи іншої.

Завдяки скінченній кількості власних значень збуреного оператора отримуємо перевагу у тому, що нема потреби просумувати нескінченну кількість доданків у виразах, адже це фактично було б неможливим.

Ключові слова: *дискретний спектр, модель Фрідріхса, умова обмеженості оператора, інтегральний оператор, Гільбертів простір, компактність оператора.*

1. Вступ

Інформація про скінченну кількість всіх власних значень даного оператора є актуальною та цінною оскільки буває так, що розглядають важливий об'єкт, але у нього є нескінченна кількість власних значень, що значно гальмує подальші дослідження. Отже, модель Фрідріхса в довільному інтервалі може мати скінченну множину власних значень за умови певного обмеження.

Спектральна теорія є одним з найважливіших напрямів теорії лінійних операторів. Сучасні тенденції розвитку теорії операторів диктують необхідність відповідних знань про кількість власних значень. Відомо, що розв’язання диференціальних рівнянь після застосування відповідного перетворення Фур'є у багатьох випадках зводиться до аналізу несамоспряженої моделі Фрідріхса, тобто суми оператора множення на незалежну змінну та оператора, збуреного обмеженим множником [1].

Модель Фрідріхса відіграє допоміжну роль у вивченні сімейства деяких матриць оператора [2]. Це можна застосувати до різних фізичних задач, використовуючи позитивно визначені оператори моделі Фрідріхса без їх спектрального розкладу та рівності Парсевала. У роботі [3] досліджено пряму та обернену задачу для оператора Штурма-Ліувілля, вивчено його спектральні особливості та встановлена ортогональність власних функцій та власні значення. Розглянуто асимптотичну формулу власних значень та власних функцій оператора Штурма-Ліувілля та отримано спектральний розклад. Показано, що власні функції утворюють повну систему та знайдено функцію Вейля. Доведено теорему єдності для розв’язку оберненої задачі. У цій роботі ці результати отримані для скінченного проміжку $(0,\pi)$, тобто йдеться про простір $L^2(0,\pi)$. А ось проблема локалізації спектральних особливостей дисипативних операторів з точки зору асимптотики відповідної експоненціальної функції розглянута в роботі [4] та представлено розв’язок цієї задачі для спектральних особливостей вищих порядків. В [5] подано умови для моделі Фрідріха, які дозволяють написати формулу для стрибка резольвенти на неперервному спектрі, але вони є об'ємними та незручними для використання, а також немає прямого зв'язку з резольвентою. Також було вивчено спектральні властивості оператора моделі з акцентом на асимптотику для числа нескінченно багатьох власних значень (випадок ефекту Єфімова) [6]. А у [7] доведено скінченність ряду зв'язаних станів відповідного оператора Шредінгера у випадку, коли потенціали задовольняють деяким умовам, а нуль є регулярною точкою для двочастинного субгамільтоніана. А також знайдено такий набір значень для значень маси частинок, що оператор Шредінгера може мати лише скінченну кількість власних значень, що лежать зліва від суттєвого спектра. Синтез останніх досягнень спектральної теорії магнітного оператора Шредінгера, який можна вважати каталогом конкретних прикладів магнітної спектральної асимптотики міститься у дослідженні [8]. Всі згадані роботи підтверджують актуальність обраної теми. Таким чином, *об’єктом даного дослідження* обрано модель Фрідріхса у випадку одновимірного збурення оператора множення на незалежну змінну. А *мета дослідження* полягає у доведенні скінченності дискретного спектра транспортного оператора.

2. Методика проведення досліджень

В даній роботі використано методи обчислення норм операторів, знаходження спряженого оператора, обчислення норм функціоналів, обчислення резольвенти оператора з обґрунтуванням умов існування самої резольвенти.

Відомо, що операція диференціювання після перетворення Фур'є переходить в операцію множення на незалежну змінну [9]. Нагадаємо, що диференціальні операції часто з'являються в різноманітних прикладних задачах: фізичних, механічних і навіть хімічних.

Популярним є зручний простір $L^2(a,b)$ – простір функцій, інтегрованих з квадратом на інтервалі (a,b).

Модель Фрідріхса – це вираз в Гільбертовому просторі функцій, що має вигляд:

$$Tf = Sf + Vf,$$

де $Sf(x) = xf(x)$ – оператор множення, а $Vf(x)$ – інтегральний оператор. Якщо оператор V – «малий», то оператор S – «близький» до оператора T. Можливий варіант малості по нормі, а варіант малості розмірності, як в даному випадку, одновимірне збурення.

Розглядаємо модель Фрідріхса у просторі функцій, інтегрованих з квадратом на півосі та одновимірним збуренням. В даній роботі використовуються методи з транспортним оператором з матричним потенціалом, методи, які є аналогічні до використаних у роботі [10].

Дану роботу можна розглядати як доповнення до праці [10].

В просторі $H = L^2(0,\infty)$ розглядаємо оператор:

$$T = S + V,$$

де $V = A^*B,$ де $A: H \to G$, $B: H \to G$, де G – деякий Гільбертів простір. Оператори мають вигляд:

$$A\phi = \int_0^\infty \phi(s)\alpha(s)\,ds,\ B\phi = \int_0^\infty \phi(s)\beta(s)\,ds,\ \alpha(s) \in G,\ \beta(s) \in G. \tag{1}$$

Резольвента $T_\zeta = (T - \zeta)^{-1}$ має вигляд:

$$T_\zeta = S_\zeta - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta,\ S_\zeta = (S - \zeta)^{-1}, \tag{2}$$

де

$$K(\zeta) = 1 + BS_\zeta A^*. \tag{3}$$

Для обчислення резольвенти використовуємо формулу, отриману у роботі [5]. Дійсно, позначимо $T_\zeta f = g,$ тоді отримаємо:

$$(T - \zeta)g = (S - \zeta)g + A^*Bg = f.$$

Діємо оператором:

$$S_\zeta : g + S_\zeta A^* Bg = S_\zeta f. \tag{4}$$

Діємо оператором:

$$S_\zeta : g + S_\zeta A^* Bg = S_\zeta f \;\; B : Bg + BS_\zeta A^* Bg = BS_\zeta f,$$

або (3):

$$Bg = K(\zeta)^{-1} BS_\zeta .$$

Тоді маємо:

$$g + S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} BS_\zeta f = S_\zeta f.$$

Підставляємо в представлення (4):

$$g = T_\zeta f, \quad T_\zeta f = S_\zeta f - S_\zeta A^* K(\zeta)^{-1} K(\zeta)^{-1} BS_\zeta f,$$

що і доводить вигляд (2).

Шукаємо оператори $A^*, B : G \to H$, що означає $(A\phi, c)_G = (\phi, A^* c)_H$. Згідно з рівнянням (1) маємо:

$$\int_0^\infty \phi(x)(\alpha(s), c)\,ds = (\phi, A^* c)_H .$$

Отже,

$$A^* c(s) = \overline{(\alpha(s), c)_G} = (c, \alpha(s))_G . \tag{5}$$

Позначимо:

$$\phi(s) = A^* c(s) = \overline{(\alpha(s), c)_G} = (c, \alpha(x)). \tag{6}$$

Згідно з позначенням (3), маємо (1):

$$K(\zeta)c = c + BS_\zeta A^* c = c + BS_\zeta \phi_1 = c + \int_0^\infty \frac{\phi_1(s)}{s - \zeta}\,ds.$$

Позначимо:

$$R_\zeta \phi(s) = \frac{\phi(s) - \phi(\zeta)}{s - \zeta}, \tag{7}$$

тоді оператор:

$$N(\zeta) = 1 + BR_\zeta A^* \tag{8}$$

є оборотнім в околі точки $\zeta = 0$ крім, можливо, дискретної множини.

Позначимо:

$$\phi_\sigma(s) = R_\sigma \alpha(s) = \frac{\alpha(s) - \alpha(\sigma)}{s - \sigma}, \quad R_\sigma \alpha(\sigma) = \alpha'(\sigma), \tag{9}$$

$$\phi'_\sigma(s) = \frac{\alpha'(s)(s-\zeta) - 1\cdot(\alpha(\zeta) - \alpha(\sigma))}{(s-\sigma)^2}. \tag{10}$$

Далі,

$$R_\sigma{}^2(s) = R_\sigma(R_\sigma(s)) = \frac{R_\sigma(s) - R_\sigma(\sigma)}{s - \sigma} = \frac{\dfrac{\alpha(s) - \alpha(\sigma)}{s - \sigma} - \alpha'(\sigma)}{s - \sigma} =$$

$$= \frac{\alpha(s) - \alpha(\sigma) - \alpha'(\sigma)(s - \sigma)}{(s-\sigma)^2} = -\phi'_\sigma(s).$$

Отже,

$$\phi'_\sigma(s) = -R^2{}_\sigma(s). \tag{11}$$

Теорема. Нехай $V = (\bullet, \beta)_H \alpha$ та $[\sigma_1, \sigma_2]$ – довільний скінченний інтервал напівосі $[0, \infty]$. Тоді, якщо:

$$\|V - V^*\| \le \min_{[\sigma_1, \sigma_2]} \frac{\|R_\sigma \alpha\|_H}{\|R^2{}_\sigma \alpha\|_H}, \tag{12}$$

то оператор $T = S + V$ в інтервалі $[\sigma_1, \sigma_2]$ може мати лише скінченну множину власних значень.

Доведення. Для доведення цієї теореми використаємо методи, подібні до методів у роботі [7]. Якщо $(T - \sigma)\phi = 0$, то власний елемент має вигляд $\phi = \phi_0$ (9), де $\alpha(\sigma) = 0$. Дійсно, якщо $T = S + (\bullet, \beta)_H \alpha = 0$, то $(S - \sigma)\phi + (\phi, \beta)_H \alpha = 0$ або $(S - \sigma)\phi(s) + (\phi, \beta)_H \alpha(s) = 0$, звідки:

$$\phi(s) = -\frac{(\phi,\beta)_H}{s-\sigma}\alpha(s).$$

Так як $\phi(s)$ є інтегрованою, то $\alpha(\sigma)=0$ і тоді:

$$\phi(s) = -(\phi,\beta)_H \frac{\alpha(s)-\alpha(\sigma)}{s-\sigma} = -(\phi,\beta) R_\sigma \alpha(s).$$

Припустимо, що оператор T за умови (10) має нескінченність власних значень в $[\sigma_1,\sigma_2]$, знаходимо збіжну підпослідовність $\sigma_k \to \sigma_0 \in [\sigma_1,\sigma_2]$ власних значень. Внаслідок замкненості оператора T випливає, що σ_0 – також власне значення. Так як $D(T^*) = D(T)$, то:

$$\left(T_{\sigma_{\sigma_k}}, \phi_{\sigma_0}\right)_H = \left(\phi_{\sigma_k}, T\phi_{\sigma_0}\right)_H + \left(\phi_{\sigma_k}, \left(T^* - T\right)\phi_\sigma\right)_H,$$

або

$$\sigma_k\left(\phi_{\sigma_k}, \phi_{\sigma_0}\right) - \sigma_0\left(\phi_{\sigma_k}\ , \phi_{\sigma_0}\right) = \left(\phi_{\sigma_k}, \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right),$$
$$(\sigma_k - \sigma_0)\left(\phi_{\sigma_k}, \phi_{\sigma_0}\right) = \left(\phi_{\sigma_k}, \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right)_H.$$

При $k \to \infty$ маємо:

$$0 = \left(\phi_{\sigma_0}, \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right)_H,$$

тому

$$(\sigma_k - \sigma_0)\left(\phi_{\sigma_k}, \phi_{\sigma_0}\right)_H = \left(\phi_{\sigma_k} - \sigma_{\sigma_0}, \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right)_H.$$

Поділимо на $\sigma_k - \sigma_0 \to \infty$ і $k \to \infty$, тоді:

$$\left\|\phi_\sigma\right\|_H^{\,2} = \left(\phi'_\sigma, \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right)_H,$$
$$\left\|\phi_{\sigma_0}\right\|^2 = \left(\phi_{\sigma_0}{}', \left(V^* - V\right)\phi_{\sigma_0}\right),$$
$$\left\|\sigma_{\sigma_0}\right\| \le \left\|\phi_\sigma{}'\right\| \cdot \left\|V^* - V'\right\|,$$

що суперечить рівності (10).

3. Результати досліджень та обговорення

Скінченність дискретного спектра, яка одержана раніше в роботі [10], тепер одержана для моделі Фрідріхса.

Модель Фрідріхса в довільному інтервалі може мати скінченну множину власних значень за умови певного обмеження. Надалі, можна посилити результати: замість скінченності спектра в скінченному інтервалі можна одержати скінченність в цілій півосі. Якщо переконатись, що резольвента прямує до нуля коли параметр прямує до нескінченності і якщо скінченний інтервал містить всі власні значення.

Іноді трапляється, що власні значення знаходяться на неперервному спектрі. Скінченність дискретного спектра, яка була одержана в роботі [10], у даній роботі одержана для моделі Фрідріхса.

4. Висновки

Важливим результатом теоретичного характеру є твердження про те, що за певних обмежень модель Фрідріхса в довільному інтервалі може мати скінченну множину власних значень.

Отже, модель Фрідріхса $T = S + V$ в довільному інтервалі $[\sigma_1, \sigma_2] \subset [0, \infty)$ може мати скінченну множину власних значень за умови певного обмеження на збурення, а саме:

$$\left\| V - V^* \right\| < \min_{\sigma \in [\sigma_1, \sigma_2]} \frac{\left\| R_\sigma \alpha \right\|}{\left\| R_\sigma^2 \alpha \right\|_H}, \ V = (\cdot, \beta)\alpha.$$

Надалі можна посилити результати: замість скінченності спектра в $[\sigma_1, \sigma_2] \subset [0, \infty)$ можна одержати скінченність в цілій півосі $[0, \infty)$, якщо переконатись, що резольвента $T_\sigma f$ прямує до нуля при $\sigma \to \infty$, якщо $[\sigma_1, \sigma_2]$ містить всі власні значення оператора T.

Результат цієї роботи має важливий теоретичний характер.

Література

1. Ibragimova, B. M. (2014). The eigenvalues of the Friedrichs model in the one-dimensional case. *The young scientist, 5,* 1–3.
2. Muminov, M. I., Rasulov, T. H. (2014). On the number of eigenvalues of the family of operator matrices. *Nanosystems: physics, chemistry, mathematics, 5 (5),* 619–625.
3. Mamedov, K. R. oglu, Karahan, D. (2015). On an inverse spectral problem for Sturm – Liouville operator with discontinuous coefficient. *Ufa Mathematical Journal, 7 (3),* 119–131. doi: http://doi.org/10.13108/2015-7-3-119
4. Naboko, S., Romanov, R. (2004). Spectral singularities and asymptotics of contractive semigroups. *Acta Scientiarum Mathematicarum, 70,* 379–403.
5. Cheremnikh, E. V. (2012). A remark about calculation of the jump of the resolvent in Friedrichs' model. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 1 (4 (55)),* 37–40. Available at: http://journals.uran.ua/eejet/article/view/3317
6. Muminov, Z., Ismail, F., Eshkuvatov, Z., Rasulov, J. (2013). On the Discrete Spectrum of a Model Operator in Fermionic Fock Space. *Abstract and Applied Analysis, 2013,* 1–12. doi: http://doi.org/10.1155/2013/875194

7. Muminov, M. E., Shermatova, Y. M. (2016). On finiteness of discrete spectrum of three-particle Schrödinger operator on a lattice. *Russian Mathematics, 60 (1),* 22–29. doi: http://doi.org/10.3103/s1066369x16010035

8. Raymond, N. (2017). *Bound states of the magnetic Schrodinger operator. Vol. 27. EMS Tracts in Mathematics.* European Mathematical Society (EMS). Zurich, 394.

9. Cheremnikh, E., Ivasyk, H., Alieksieiev, V., Kuchma, M., Brodyak, O. (2018). Construction of spectral decomposition for non-self-adjoint friedrichs model operator. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies, 4 (4 (94)),* 6–18. doi: http://doi.org/10.15587/1729-4061.2018.140717

10. Diaba, F., Larribi, N., Cheremnikh, E. V. (2016). Finiteness of the point spectrum of transport operator with matricial 2x2 potential. *Global Journal of pure and applied mathematics, 12 (3),* 2561–2571.