

Дядюн С. В.,  
Штельма О. Н.

# МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ВОДОСНАБЖЕНИЯ СОВМЕСТНО С АКТИВНЫМИ ИСТОЧНИКАМИ И РЕГУЛИРУЮЩИМИ ЕМКОСТЯМИ

*Представлена математическая модель установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, включающих в себя водопроводную сеть совместно с работающими на нее насосными станциями и регулируемыми емкостями. Разработанная математическая модель используется при управлении системами водоснабжения для решения задач анализа потокораспределения в сети при реализации управляющих воздействий на насосных станциях.*

**Ключевые слова:** управление, критерий, качество, эффективность, модель, функционирование, система водоснабжения, насосная станция.

## 1. Введение

При эксплуатации реальных систем подачи и распределения воды (СПРВ) и имитационном моделировании систем оперативного управления режимами их функционирования возникает задача анализа установившегося потокораспределения в СПРВ. Для ее решения нужно иметь математическую модель водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями, которая обеспечивает возможность параллельного включения произвольного количества агрегатов насосных станций (НС) без необходимости предварительного эквивалентирования их характеристик.

## 2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Методам математического моделирования функционирования СПРВ посвящено много фундаментальных работ [1–7]. Математическая модель установившегося потокораспределения в водопроводной сети без активных элементов достаточно хорошо известна и разработана в [1, 5]. Целью данных исследований являлись разработка математической модели установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, включающих в себя водопроводную сеть совместно с работающими на нее насосными станциями и регулирующими емкостями.

## 3. Результаты исследований модели СПРВ

Пусть  $G(V, E)$  — граф СПРВ, моделирующий ее структуру и отображающий взаимосвязи между отдельными элементами. Здесь  $V$  — множество всех узлов СПРВ;  $E$  — множество всех дуг СПРВ. Соединим все входы и выходы графа  $G(V, E)$ , через которые вода соответственно поступает в сеть и отбирается из нее, с нулевой фиктивной точкой.

Обозначим  $L$  — множество насосных станций и регулирующих емкостей, тогда элементами этого множества будут фиктивные дуги, соединяющие нулевую точку со входами всех НС и регулирующих емкостей;  $M$  — множество пассивных элементов, т. е. магистральных

участков (трубопроводов) водопроводной сети, являющихся реальными дугами графа;  $N$  — множество узлов СПРВ с подсоединенными к ним потребителями, т. е. множество фиктивных дуг модели СПРВ. При этом множество узлов графа СПРВ состоит из двух непересекающихся подмножеств  $V = N \cup N'$ , где  $N'$  — подмножество промежуточных узлов модели СПРВ, т. е. таких узлов, в которых нет отбора воды, однако по тем или иным соображениям их нужно отразить в модели СПРВ. Кроме того, введем множество  $K = \bigcup_{j \in L} L_j$ , характеризующее общее количество дуг с насосными агрегатами на всех насосных станциях СПРВ. Таким образом, элементами множества  $K$  служат звенья всех насосных станций, каждое из которых включает в себя непосредственно сам активный элемент (насос), а также примыкающие к нему участки с регулируемой и нерегулируемой задвижками. При этом, как известно [3], каждому звену насосной станции соответствует уравнение, описывающее процесс движения воды через данный насосный агрегат:

$$H_{ВХ} - r_{i1}q_i^2 + (\Psi_{0i} + \Psi_{1i}q_i + \Psi_{2i}q_i^2)(D_i / D_i')^2 (n_i / n_i')^2 - r_{i3}(\lambda_i)q_i^2 - H_{ВЫХ} = 0, \quad i \in L_j. \quad (1)$$

Здесь  $H_{ВХ}$ ,  $H_{ВЫХ}$  — давление соответственно на входе и выходе НС;  $q_i$  — расход воды через  $i$ -е звено;  $\Psi_{0i}$ ,  $\Psi_{1i}$ ,  $\Psi_{2i}$  — коэффициенты аппроксимации нагрузочной характеристики  $H(q)$   $i$ -го насосного агрегата;  $r_{i1}$ ,  $r_{i3}$  — сопротивления участков с нерегулируемой и регулируемой задвижками, находящимися соответственно во всасывающей и напорной линии  $i$ -го насоса;  $\lambda_i$  — степень открытия  $i$ -й регулируемой задвижки;  $D_i$ ,  $D_i'$  — соответственно нормальный и срезанный диаметр рабочего колеса  $i$ -го насоса;  $n_i$ ,  $n_i'$  — соответственно фактическая и номинальная частота вращения рабочего колеса  $i$ -го насосного агрегата (при наличии на нем регулируемого привода).

Для однозначности направления потока воды, переключаемой  $i$ -м включенным агрегатом СПРВ, представим (1) в несколько ином виде:

$$H_{\text{BX}} - r_{i1} q_i |q_i| + (\Psi_{0i} + \Psi_{1i} |q_i| + \Psi_{2i} q_i |q_i|) \times \\ \times (D_i / D_i')^2 (n_i / n_i')^2 - r_{i3} (\lambda_i) q_i |q_i| - H_{\text{ВЫХ}} = 0, \quad i \in L_j. \quad (2)$$

Потеря напора для активного элемента, будь то НС или отдельно работающий насосный агрегат, всегда есть величина отрицательная, так что в данном случае можно говорить о «приобретении» напора.

Выберем дерево графа СПРВ таким образом, чтобы в него вошли магистральные участки сети и участки с насосами (принадлежащими разным НС СПРВ), а также одна фиктивная ветвь, соединяющая нулевую точку со входом некоторой из НС. Присвоим ей номер 1. При этом все фиктивные участки, инцидентные узлам СПРВ, которые являются входами НС (кроме первого) и регулирующих емкостей, а также участки с потребителями будут отнесены к хордам, магистральные же участки и участки с насосами частично станут хордами, а частично — ветвями дерева. Полагаем, что индекс 1, присвоенный множествами соответственно  $L, M, N, K, E$  характеризует принадлежность их элементов к ветвям дерева, а индекс 2 — к хордам. В результате такого выбора множество всех дуг графа СПРВ представимо как  $E = E_1 \cup E_2$ , где  $E_1 = M_1 \cup K_1 \cup L_1$ ,  $E_2 = M_2 \cup K_2 \cup L_2 \cup N_2$ ,  $L_1 = \{1\}$ ,  $N_1 = \emptyset$ ,  $N_2 = N$ . Множество  $L_2$  разобьем на два непересекающихся подмножества  $L_2 = L_2^{(a)} \cup L_2^{(p)}$ , где  $L_2^{(a)}$  — множество хорд с активными элементами (НС);  $L_2^{(p)}$  — множество хорд с регулирующими емкостями (водонапорными башнями, колоннами, резервуарами, которые являются пассивно-активными регулирующими элементами сети).

Кроме того, обозначим  $q_i$  — расход воды в  $i$ -м участке сети,  $i \in M$ ;  $r_i$  — гидравлическое сопротивление  $i$ -го участка сети,  $i \in M$ ;  $h_i^{(r)}$  — перепад геодезических отметок начала и конца  $i$ -го участка;  $h_i$  — потеря давления на  $i$ -м участке сети,  $i \in M$ .

С учетом произведенного выбора дерева графа СПРВ, а также того факта, что сумма перепадов геодезических высот по любому замкнутому циклу, содержащему магистральные участки сети, равна нулю, т. е.:

$$h_i^{(r)} + \sum_{r \in M_1} b_{1ri} h_r^{(r)} = 0, \quad i \in M_2, \quad (3)$$

математическая модель установившегося потокораспределения в водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями примет вид:

$$f_r = \text{sign} q_r r_i |q_r|^2 + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} \text{sign} q_i r_i |q_i|^2 = 0, \quad r \in M_2; \quad (4)$$

$$f_r = H_{\text{BX}1} + \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi_{2k} q_k |q_k| - h_r - \\ - \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(3)}) = 0, \quad r \in N, \quad k \in K_1; \quad (5)$$

$$f_k = \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi_{2k} q_k |q_k| + \\ + x_i (\Psi_{0i} + \Psi_{1i} |q_i| + \Psi_{2i} q_i |q_i|) = 0, \quad k \in K_2, \quad i \in K_1; \quad (6)$$

$$f_r = \text{sign} q_r r_i |q_r|^2 + h_r^{(r)} + h_r^{(p)} + \\ + \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(3)}) + \Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \\ + \Psi_{2k} q_k |q_k| = 0, \quad r \in L_2^{(p)}, \quad k \in K_1; \quad (7)$$

$$f_r = H_{\text{BX}1} - H_{\text{BX}r} + \\ + \sum_{k \in K_1} [\text{sign} q_k (\Psi_{0k} + \Psi_{1k} |q_k| + \Psi_{2k} q_k |q_k|)] - \\ - \sum_{i \in M_1} b_{1ri} (\text{sign} q_i r_i |q_i|^2 + h_i^{(3)}) = 0, \quad r \in L_2^{(a)}; \quad (8)$$

$$q_i = \sum_{r \in M_2} b_{1ri} q_r + \sum_{k \in K_2} x_k q_k + Q_i^+, \quad i \in M_1 \cup L_1 \cup K_1, \quad (9)$$

где

$$\Psi_{2k} = \Psi_{2k} (D_k / D_k')^2 (n_k / n_k')^2 - r_{k1} - r_{k3} (\lambda_k), \quad k \in K_1 \cup K_2,$$

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-й насос включен,} \\ 0, & \text{если } i\text{-й насос выключен, } i \in K_1 \cup K_1, \end{cases}$$

$$Q_i^+ = \sum_{k \in N \cup L_2} b_{1ki} q_k = \text{const},$$

$H_{\text{BX}1}, H_{\text{BX}k}$  — давление на входе соответственно 1-й и  $k$ -й НС;  $b_{1ri}$  — элемент цикломатической матрицы  $B_1$  [2]. Величина, помеченная индексом «+» — задана. В приведенной математической модели СПРВ предполагается, что фиктивные участки с потребителями направлены от сети к нулевой фиктивной точке, а участки с насосами и соответствующие им фиктивные участки — наоборот.

Проанализируем условия разрешимости системы уравнений математической модели водопроводной сети совместно с активными источниками и регулирующими емкостями. Она может быть решена, если заданы граничные условия функционирования СПРВ в виде комбинации значений переменных расходов и давлений на ее входах и выходах.

#### 4. Выводы

Математическая модель установившегося потокораспределения в системах водоснабжения, содержащих насосные станции и регулирующие емкости, используется для анализа качества функционирования СПРВ при реализации управляющих воздействий на НС [1, 2, 7, 10], оценки эффективности решения задачи оперативно-го планирования режимов функционирования СПРВ на всем рассматриваемом интервале времени [8–10], а также для контроля правильности принимаемых решений по управлению технологическими процессами подачи и распределения воды [3, 7, 9, 10].

#### Литература

1. Евдокимов, А. Г. Оптимальные задачи на инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов. — Харьков: Вища школа, 1976. — 153 с.
2. Евдокимов, А. Г. Потокораспределение в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, В. В. Дубровский, А. Д. Тевяшев. — М.: Стройиздат, 1979. — 199 с.
3. Евдокимов, А. Г. Оперативное управление потокораспределением в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, А. Д. Тевяшев. — Харьков, 1980. — 144 с.
4. Fallside, F. The Development of Modelling and Simulation Techniques Applied to a Computer — Based — Telecontrol Water Supply System [Text] / F. Fallside, P. F. Perry, R. H. Burch, K. C. Marlow // Computer Simulation of Water Resources Systems. — 1975. — № 12. — P. 617–639.

5. Абрамов, Н. Н. Теория и методика расчета систем подачи и распределения воды [Текст] / Н. Н. Абрамов. — М.: Стройиздат, 1985. — 288 с.
6. Меренков, А. П. Теория гидравлических цепей [Текст] / А. П. Меренков, В. Я. Хасилев. — М.: Наука, 1985. — 279 с.
7. Евдокимов, А. Г. Моделирование и оптимизация потоко-распределения в инженерных сетях [Текст] / А. Г. Евдокимов, А. Д. Тевяшев, В. В. Дубровский. — М.: Стройиздат, 1990. — 368 с.
8. Дядюн, С. В. Оптимизация потоко-распределения в системах водоснабжения с большим числом активных источников [Текст] / С. В. Дядюн // Автоматизированные системы управления и приборы автоматики. — Харьков, ХНУРЭ, 2001. — Вып. 115. — С. 36–40.
9. Дядюн, С. В. Моделирование и рациональное управление системами водоснабжения при минимальном объеме оперативной информации [Текст] / С. В. Дядюн // Радиоэлектроника и информатика. — Харьков, ХНУРЭ, 2002. — № 20. — С. 111–115.
10. Дядюн, С. В. Оценка качества и эффективности управления системами водоснабжения в зависимости от степени неопределенности модели объекта [Текст] / С. В. Дядюн // Радиоэлектроника и информатика. — Харьков, ХНУРЭ, 2001. — № 17. — С. 78–81.

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СИСТЕМ ВОДОПОСТАЧАННЯ СПІЛЬНО З АКТИВНИМИ ДЖЕРЕЛАМИ ТА РЕГУЛЮЮЧИМИ ЄМКОСТЯМИ**

Представлено математичну модель усталеного потоко-розподілу в системах водопостачання, що включають в себе водо-

првідну мережу спільно з працюючими на нї насосними станціями і регулюючими ємностями. Розроблена математична модель використовується при управлінні системами водопостачання для розв'язання задач аналізу потоко-розподілу в мережі при реалізації управляючих дій на насосних станціях.

**Ключові слова:** управління, критерій, якість, ефективність, модель, функціонування, система водопостачання, насосна станція.

*Дядюн Сергей Васильевич, кандидат технических наук, доцент, кафедра прикладной математики и информационных технологий, Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Украина, e-mail: daulding@mail.ru.*  
*Штельма Ольга Николаевна, старший преподаватель, кафедра прикладной математики и информационных технологий, Харьковский национальный университет городского хозяйства им. А. Н. Бекетова, Украина, e-mail: olga.shtelma@gmail.com.*

*Дядюн Сергій Васильович, кандидат технічних наук, доцент, кафедра прикладної математики і інформаційних технологій, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, Україна.*  
*Штельма Ольга Миколаївна, старший викладач, кафедра прикладної математики і інформаційних технологій, Харківський національний університет міського господарства ім. О. М. Бекетова, Україна.*

*Dyadun Sergey, O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, Ukraine, e-mail: daulding@mail.ru.*  
*Shtelma Olga, O. M. Beketov National University of Urban Economy in Kharkiv, Ukraine, e-mail: olga.shtelma@gmail.com*

УДК 533.69.04

**Борзенкова А. В.,  
Черепашук Г. А.**

**КАЛИБРОВКА СИСТЕМ ВЗВЕШИВАНИЯ И ЦЕНТРОВКИ ЛЕТАТЕЛЬНЫХ АППАРАТОВ**

*Рассмотрено понятие метрологического моделирования. Установлены метрологические критерии подобия модели и исследуемого объекта. Обосновано применение метода метрологического моделирования при калибровке систем взвешивания и центровки летательных аппаратов. Разработана реалистическая экспериментальная модель летательного аппарата для калибровки систем взвешивания и центровки.*

**Ключевые слова:** *центр тяжести, калибровка, метрологическое моделирование, система взвешивания и центровки.*

**1. Введение**

При эксплуатации летательных аппаратов (ЛА) необходимо производить их взвешивание и определять положение центра тяжести (ЦТ) для обеспечения необходимого уровня надежности и безопасности полетов [1]. В соответствии с требованиями ИКАО 9760 (ICAO — International Civil Aviation Organization) и Federal Aviation Administration, а также НГЛС (Нормы летной годности самолетов) необходимо производить взвешивание и определять фактическое положение ЦТ всех самолетов в процессе их эксплуатации (один раз в 4 года), даже если за это время не выполнялись их доработки или ремонты. Кроме того, внеочередному определению массы и центровке подлежат все переоборудованные и доработанные самолеты, а также самолеты до и пос-

ле ремонта. Взвешивание и центровку ЛА необходимо производить для подтверждения того, что вес находится в допустимых пределах и координаты центра тяжести лежат в допустимом диапазоне. Для этого используют системы взвешивания и центровки ЛА [2].

При метрологических испытаниях таких систем их точность оценивается только в режиме измерения поканального веса, а в режиме определения положения ЦТ летательного аппарата точность не оценивается.

**2. Анализ литературных данных и постановка проблемы**

В существующих системах для определения веса и положения центра тяжести самолетов и вертолетов, разработанных НПО «Дискрет» [3], фирмами «АКСИС»,