до 40 %, что является существенным фактором в пользу необходимости учета данного параметра при расчетах процессов экструзионного формования и проектировании перерабатывающего оборудования.

Результаты исследования не могут быть прямо интерпретированы для исследования полимерных материалов, характер течения которых предусматривает образование низкомолекулярного пристенного слоя со свойствами, отличающимися от свойств основной массы полимера.

Дальнейшее направление исследований заключается в моделировании течения полимера с учетом вышеупомянутого низкомолекулярного пристенного слоя.

Литература

1. Hatzikiriakos, S. G. Wall slip of molten polymers [Text] / S. G. Hatzikiriakos // Progress in Polymer Science. — 2012. — Vol. 37, № 4. — P. 624–643. doi:10.1016/j.progpolymsci.2011.09.004.
2. Толстой, Д. М. Теория пристенного скольжения [Текст] / Д. М. Толстой // Доклады Академии наук СССР. — 1952. — № 5. — 192 с.
3. Кирпиков, В. А. Введение в теорию пограничного слоя [Текст]: науч. пос. / В. А. Кирпиков, Г. Н. Шорин; под ред. А. А. Гухмана. — М.: МИХМ, 1974. — 287 с.
4. Gerbeau, J.-F. Generalized Navier boundary condition and geometric conservation law for surface tension [Text] / J.-F. Gerbeau, T. Lelièvre // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. — 2009. — Vol. 198, № 5–8. — P. 644–656. doi:10.1016/j.cma.2008.09.011.
5. Ferrás, L. L. Profile extrusion die design: the effect of wall slip [Electronic resource] / L. L. Ferrás, J. M. Nóbrega, F. T. Pinho, O. S. Carneiro // MATERIAIS 2007 Porto, 1–4 April 2007. The Polymer Processing Society 23rd Annual Meeting. — Available at: \www/URL: http://paginas.fe.up.pt/~fpinho/pdfs/PPS23_P04-013.pdf.
6. Івіцький, І. І. Числове моделювання впливу пристінного шару на процес течії полімеру в переробному обладнанні [Текст] / І. І. Івіцький, О. Л. Сокольський, В. І. Сівецький, І. О. Мікульонок // Хімічна промисловість України. — 2013. — № 6. — С. 34–37.
7. Івіцький, І. І. Визначення в'язкості пристінного шару при моделюванні течії полімерів у формуючих каналах [Текст]: тези доп. / І. І. Івіцький, О. Л. Сокольський, І. О. Мікульонок // Всеукраїнська наук. конф. молодих вчених та студентів «Сучасні технології одержання композиційних матеріалів, хімічних волокон і нанокомпозитів». — К., 2013. — С. 18–19.
8. Багута, В. А. Математическое моделирование течения полимера в канале фильеры с учетом его пристенного скольжения [Текст] / В. А. Багута, Г. В. Кулинченко // Радіоелектронні і комп'ютерні системи. — 2012. — № 4(56). — С. 140–144.
9. A Rheological Viewpoint of Thermoplastic Melts [Electronic resource] / Rheology application note. — Available at: \www/URL: http://www.iesmat.com/iesmat/upload/file/Malvern/Productos-MAL/REO-A%20rheological%20view%20point%20of%20thermoplastic%20melts.pdf.
10. Saeed, U. Characterization of glass fiber-reinforced high-density polyethylene [Electronic resource] / U. Saeed, K. Hussain, G. Rizvi // Society of Plastics Engineers. — 2 May 2014. — Available at: \www/URL: http://www.4spepro.org/view.php?article=005393-2014-04-29. doi:10.2417/spepro.005393.

МОДЕЛЮВАННЯ ПРИСТІННОГО КОВЗАННЯ ПОЛІМЕРУ

У статті розглянуто вплив ефекту пристінного ковзання при плавленні полімеру на процес екструзійного формування. Проведено моделювання течії полімеру в каналі з урахуванням пристінного ковзання, результати якого були співставлені з експериментально отриманими залежностями, що дозволило отримати можливість порівняти параметри процесу з урахуванням пристінного ковзання і без нього.

Ключові слова: течія полімеру, плавлення полімеру, пристінне ковзання.

Ивицкий Игорь Игоревич, *аспирант, кафедра химического, полимерного и силикатного машиностроения, Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт», Украина,* ***e-mail: ivitskiy@gmail.com****.*

Івіцький Ігор Ігорович, *аспірант, кафедра хімічного, полімерного та силікатного машинобудування, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут», Україна.*

Ivitskyi Igor, *National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute», Ukraine,* ***e-mail: ivitskiy@gmail.com***

УДК 539.3

DOI: 10.15587/2312-8372.2014.27939

Погорелова О. С.,
Постникова Т. Г.,
Отрашевская В. В.

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ С ДВУМЯ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

Рассматривается возможность применения численного метода продолжения решения по параметру к механической системе с повторяющимися ударами. Излагаются теоретические основы метода в сочетании с методами стрельбы и Ньютона-Рафсона. Методика адаптирована для виброударной системы с двумя степенями свободы. Параметризация выполняется по длине дуги кривой решений. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия Герца.

Ключевые слова: *виброударная система, метод продолжения по параметру, сила Герца, длина дуги.*

1. Введение

Системы с ударами играют важную роль в теории колебаний механических систем, и изучение их динамического поведения в различных условиях функционирования вызывает большой интерес.

Для анализа динамики виброударных систем (ВУС) в данной работе используется метод продолжения решения по параметру в сочетании с методами стрельбы и Ньютона-Рафсона. Применение этой методики позволяет находить решения шаг за шагом для каждого значения параметра продолжения (ведущего параметра), пропуская переходной процесс, что сокращает время построения решений уравнений движения в установившихся режимах колебаний в десятки раз. Такая методика обеспечивает также возможность достаточно просто распознавать зоны неустойчивости режима колебаний и находить точки бифуркации.

Применение метода продолжения по параметру к исследованию динамики ВУС связано с некоторыми особенностями и трудностями. Специфика ВУС обусловлена повторяющимися ударами, т. е. постоянным изменением структуры механической системы, а также разрывностью скоростей элементов системы. Поэтому исследование динамики ВУС методом продолжения по параметру встречается в научной литературе достаточно редко.

Таким образом, исследование динамического поведения ВУС, определение устойчивости колебательных режимов, отыскание точек бифуркации с помощью современного численного метода продолжения решения по параметру и моделирования удара нелинейной силой контактного взаимодействия является весьма актуальным и востребованным.

2. Анализ литературных данных и постановка проблемы

Исследование динамики ВУС бурно развивается в последние десятилетия. В ряде работ (например, [1–3]) дан обширный обзор задач и методики их решения. Эти работы содержат также большой обзор современной литературы.

Метод продолжения решения по параметру известен давно, он с успехом применяется к решению различных нелинейных проблем. В фундаментальных трудах [4, 5] приводится описание сущности метода продолжения, его сильных сторон, методики его применения к разным задачам. Существенный вклад в совершенствование и применение этого метода для анализа эволюции установившихся регулярных режимов колебаний нелинейных механических систем был внесен исследованиями, результаты которых изложены в монографии [6]. Предложенную в этой монографии методику удалось применить к исследованию динамики ВУС.

Таким образом, постановка проблемы состоит в следующем: выполнить анализ динамического поведения ВУС методом продолжения решения по параметру, при этом параметром продолжения выбрать длину дуги кривой решений. Такая параметризация в настоящее время признана наилучшей, она позволяет проходить точки поворота и определять точки ветвления.

3. Цель и задачи исследования

Цели настоящей статьи:

1. Адаптировать методику продолжения решения по параметру к исследованию динамики двухмассовой ВУС с двумя степенями свободы.
2. Применить адаптированную методику к механической системе с повторяющимися ударами, учитывая особенности ВУС.
3. Использовать для параметризации в качестве параметра продолжения длину дуги кривой решений.

Для достижения этих целей авторы рассмотрели динамику двухмассовой ВУС с двумя степенями свободы под действием периодической внешней нагрузки. Адаптация методики продолжения по параметру к такой системе и ее теоретические основы изложены в дальнейшем тексте статьи.

4. Формулировка проблемы. Исходные уравнения

Рассматривается применение метода продолжения по параметру для анализа динамики ВУС на примере двухмассовой системы с двумя степенями свободы, находящейся под действием периодического внешнего воздействия (рис. 1).

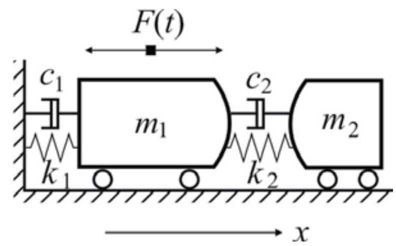

Рис. 1. Расчетная схема ВУС

Эта модель состоит из основного тела и присоединенного, которое может играть роль ударного или безударного динамического гасителя колебаний. Тела связаны линейными упругими пружинами и демпферами. На основное тело действует периодическая нагрузка:

$$F(t) = P\cos(\omega t + \phi_0). \tag{1}$$

Система уравнений движения имеет вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1\dot{x}_1 - \omega_1^2 x_1 - 2\xi_2\omega_2\chi(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \\
&- \omega_2^2\chi(x_1 - x_2 + D) + \frac{1}{m_1}[F(t) - F_{con}(x_1 - x_2)], \\
\ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_2^2(x_2 - x_1 - D) + \\
&+ \frac{1}{m_2}F_{con}(x_1 - x_2),
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}};$$

$$\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2};$$

$$\chi = \frac{m_1}{m_2},$$

$F_{con}(x_1 - x_2)$ — сила контактного взаимодействия, моделирующая удар и действующая лишь во время удара.

Начальные условия задачи:

$$x_1(0)=0,\ x_2(0)=D,\ \dot{x}_1(0)=0,\ \dot{x}_2(0)=0. \quad (3)$$

Удары между телами считаются коллинеарными, упругими, низкоскоростными, без трения. Поверхности контакта гладкие, криволинейные, без шероховатостей. Так что геометрия поверхностей в зоне контакта может быть аппроксимирована «герцевой» геометрией. Вопрос о способах моделирования удара в виброударных системах достаточно подробно рассматривался авторами в [7, 8]. В данной работе для моделирования удара используется контактная сила Герца на основе его квазистатической теории [9]:

$$F_{con}(x_1-x_2)=K[(x_1-x_2)\cdot H(x_1-x_2)]^{3/2},$$

$$K=\frac{4}{3}\frac{q}{(\delta_1+\delta_2)\sqrt{A+B}},\ \delta_1=\frac{1-\nu_1^2}{E_1\pi},\ \delta_2=\frac{1-\nu_2^2}{E_2\pi}, \quad (4)$$

где (x_1-x_2) — относительное сближение тел, $H(x_1-x_2)$ — ступенчатая функция Хевисайда, ν_i и E_i — коэффициенты Пуассона и модули Юнга для обоих тел, A, B и q — характеристики местной геометрии зоны контакта. Поверхности обоих тел в зоне контакта принимаются сферическими, тогда $A=B=1/2R_1+1/2R_2$, где R_1, R_2 — радиусы поверхностей контакта. Такой способ моделирования удара в настоящее время широко используется для анализа динамики ВУС.

5. Теоретические основы построения динамических характеристик

Для построения характеристик движения ВУС нелинейная система дифференциальных уравнений движения (2) интегрируется методом продолжения решения по параметру следующим образом.

Порядок нелинейной системы уравнений движения (ВУС) (2) понижается введением новых переменных $x_3=\dot{x}_1,\ x_4=\dot{x}_2$. Получаемая при этом неавтономная система нелинейных ОДУ в общем виде имеет вид:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}=\mathbf{f}(t,\tilde{\mathbf{x}},\alpha), \quad (5)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$. Будем считать параметр α 5-й переменной наряду с $x_1,...,x_4$: $x_5=\alpha$. Введем вектор:

$$\mathbf{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5)^T. \quad (6)$$

Так как ВУС находится под действием периодической внешней нагрузки, то и решения системы (5) будут периодическими.

Выберем некоторое начальное значение параметра $\alpha=\alpha_0$ и найдем решение системы (5) с начальными условиями (3) прямым численным интегрированием (например, методом Рунге-Кутта). После окончания переходного процесса в установившемся режиме колебаний выбираем состояние, соответствующее некоторому выбранному моменту времени $t=t_0$. Это состояние будем считать исходным для продолжения решения. Значение вектора решений в этом состоянии определяет начальные условия продолжения. Обозначим:

$$x(t_0)=\eta,\quad \eta=(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5)^T. \quad (7)$$

В качестве параметра продолжения используется длина дуги кривой решений s. Решение системы (5) будет зависеть от времени t, параметра продолжения s и начальных условий η. Если при движении вдоль кривой решений на k-м шаге параметр продолжения имеет значение $s^{(k)}$, то на следующем $(k+1)$-ом шаге он получит приращение $\Delta s^{(k)}$:

$$s^{(k+1)}=s^{(k)}+\Delta s^{(k)}. \quad (8)$$

Начальные значения неизвестных также получат приращения:

$$\eta^{(k+1)}=\eta^{(k)}+\Delta\eta^{(k)}. \quad (9)$$

Для периодических решений на каждом шаге продолжения должно выполняться условие периодичности (краевое условие) для первых четырех координат вектора $\mathbf{x}$, т. е. для вектора $\tilde{\mathbf{x}}$:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}(t_0+T,\ \eta^{(k+1)})=\tilde{\eta}^{(k+1)}, \quad (10)$$

где $\tilde{\eta}^{(k+1)}=(\eta_1^{(k+1)},\ \eta_2^{(k+1)},\ \eta_3^{(k+1)},\ \eta_4^{(k+1)})$.

Отсюда с учетом (9) получим:

$$\tilde{\mathbf{x}}^{(k+1)}(t_0+T,\ \eta^{(k)}+\Delta\eta^{(k)})=\tilde{\eta}^{(k)}+\Delta\tilde{\eta}^{(k)}. \quad (11)$$

Соотношения (11) представляют собой систему 4-х нелинейных уравнений с пятью неизвестными:

$$\Delta\eta_1^{(k)},\ \Delta\eta_2^{(k)},\ \Delta\eta_3^{(k)},\ \Delta\eta_4^{(k)},\ \Delta\eta_5^{(k)}. \quad (12)$$

Для ее линеаризации разложим левые части соотношений (11) в ряд Тейлора относительно неизвестных приращений начальных значений переменных (12) и отбросим члены выше первого порядка. Получим алгебраическую линейную систему 4-х уравнений с пятью неизвестными (12).

Обозначим через $\mathbf{J}$ матрицу Якоби:

$$\mathbf{J}=\left[\frac{\partial x_i^{(k)}}{\partial\eta_j^{(k)}}\right],\ i,j=1,\ ...,\ 4. \quad (13)$$

Через $\mathbf{C}$ обозначим матрицу, полученную дописыванием к матрице $\mathbf{J}$-$\mathbf{E}$ ($\mathbf{E}$ — единичная матрица) столбца $\frac{\partial\mathbf{x}^{(k)}}{\partial\eta_5^{(k)}}$. Полученная система линейных алгебраических уравнений записывается в виде:

$$\mathbf{C}\cdot\Delta\eta^{(k)}=0. \qquad (14)$$

Эту систему будем решать способом, изложенным в [10, 11]. Зафиксируем некоторый номер неизвестной j. Обозначим через $\mathbf{C}_j$ квадратную матрицу размером 4×4, полученную из матрицы $\mathbf{C}$ вычеркиванием j-го столбца, через $\gamma=\dfrac{\partial\mathbf{x}^{(k)}}{\partial\eta_j^{(k)}}$ вычеркнутый столбец, через $\Delta\hat{\eta}^{(k)}=(\Delta\eta_1^{(k)},\ ...,\ \Delta\eta_{j-1}^{(k)},\ \Delta\eta_{j+1}^{(k)},\ ...,\ \Delta\eta_5^{(k)})$ — вектор приращений начальных условий после вычеркивания. Тогда систему (14) можно записать в виде:

$$\mathbf{C}_j\cdot\Delta\hat{\eta}^{(k)}=-\Delta\eta_j^{(k)}\cdot\gamma. \qquad (15)$$

Решая систему (15), найдем зависимость координат вектора $\Delta\hat{\eta}^{(k)}$ от выбранной неизвестной $\Delta\eta_i^{(k)}$. Для этого необходимо, чтобы матрица $\mathbf{C}_j$ была невырожденной, чего в точке поворота всегда можно достичь надлежащим выбором номера j. В этом случае решение системы (15), зависящее от $\Delta\eta_j^{(k)}$, записывается в виде:

$$\Delta\hat{\eta}^{(k)}=-\Delta\eta_j^{(k)}\cdot\mathbf{C}_j^{-1}\cdot\gamma. \qquad (16)$$

Как уже отмечалось, в качестве параметра продолжения выбрана длина дуги кривой решений. Поэтому его приращение $\Delta s^{(k)}$ на k-м шаге определяется равенством:

$$\sum_{i=1}^{5}(\Delta\eta_i^{(k)})^2=(\Delta s^{(k)})^2. \qquad (17)$$

Отсюда, учитывая (16), при заданном $\Delta s^{(k)}$ найдем с точностью до знака неизвестное $\Delta\eta_j^{(k)}$, а потом и остальные неизвестные по формуле (16).

Выбор номера j и знака неизвестного $\Delta\eta_j^{(k)}$ определяется спецификой задачи способом, аналогичным описанному в [10, 11].

Коэффициенты системы (14) вычисляем, решая систему дифференциальных уравнений в вариациях относительно соответствующих вариационных переменных. Для этого, рассматривая $\tilde{\mathbf{x}}$ как функцию $\tilde{\eta}$ и α, введем обозначения:

$$p_{ij}(t)=\frac{\partial x_i}{\partial\eta_j},\quad q_i=\frac{\partial x_i}{\partial\alpha},\quad i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (18)$$

Дифференцируя уравнения системы (5) по переменным η_j и по параметру α, находим:

$$\frac{dp_{ij}}{dt}=\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}p_{lj},\quad i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (19)$$

$$\frac{dq_i}{dt}=\sum_{l=1}^{4}\frac{\partial f_i}{\partial x_l}q_l+\frac{\partial f_i}{\partial\alpha},\quad i,j=1,\ 2,\ 3,\ 4. \qquad (20)$$

Начальные условия для этих уравнений в вариациях имеют вид:

$$p_{ij}(t_0)=\delta_{ij},\quad q_i(t_0)=0, \qquad (21)$$

где δ_{ij} — символ Кронекера (равный 0 при $i\neq j$ и 1 при $i=j$).

Для коррекции получаемых решений на каждом шаге продолжения вычисляется вектор невязки:

$$\mathbf{r}^{(k)}=\mathbf{x}^{(k)}(t_0+T)-\mathbf{x}^{(k)}(t_0). \qquad (22)$$

Невязка характеризует погрешность выполнения условий периодичности на k-м шаге продолжения при численном решении задачи.

Решая систему (14), найдем приращения начальных условий $\Delta\eta^{(k)}$. Новые начальные значения неизвестных на $(k+1)$-м шаге продолжения вычисляем по формулам (9). Они определяют решение системы (5) на $(k+1)$-м шаге. Проверяем невязку. Если невязка мала, то полученное решение определяет точку на диаграмме решений, и можно переходить на следующий шаг. Если невязка велика, то уменьшаем приращение параметра продолжения $\Delta s^{(k)}$ и, вернувшись на шаг назад, повторяем процесс продолжения на k-м шаге с откорректированным приращением $\Delta s^{(k)}$.

При изменении параметра α устойчивость решений на одной ветви может изменяться. Значения параметра, при которых теряется устойчивость и от исходной ветви решений отходит новая ветвь (т. е. бифуркационные значения параметра), характеризуются величинами модулей собственных чисел матрицы монодромии (мультипликаторов). Матрица монодромии имеет вид:

$$\mathbf{B}=\left[\frac{\partial x_i(t_0+T)}{\partial\eta_j}\right]=\left[p_{ij}(t_0+T)\right].$$

Периодическое решение является неустойчивым, если хотя бы один из мультипликаторов μ_i выходит за единичный круг в комплексной плоскости. Значения такого мультипликатора характеризуют тип бифуркации в этой бифуркационной точке.

6. Особенности применения метода, связанные с ударом

Известно достаточное количество программных средств (*AUTO, DERPAR, MATCONT, HOMPACK* и др.), где реализован тот или иной алгоритм продолжения решения по параметру. При использовании этих пакетов специфику задачи необходимо учитывать, разрабатывая дополнительные программы. Специфика исследования виброударной системы обусловлена постоянным изменением ее структуры при повторяющихся соударениях между элементами. Поэтому необходимо внимательно отслеживать моменты начала и конца удара, корректировать (значительно уменьшать) шаг по времени на периоде удара, используя формулу длительности удара [12]. Необходимо также учитывать сложности, связанные с положением исходной точки $t=t_0$ на каждом шаге продолжения относительно интервала удара.

7. Выводы

1. Методика продолжения решения по параметру в совокупности с методом стрельбы и методом Ньютона-Рафсона адаптирована и применена к исследованию динамики двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы.

2. Показана возможность применения этой методики для исследования движения ВУС с учетом особенностей влияния повторяющихся ударов.

3. Методика продолжения позволяет находить зоны устойчивости и неустойчивости периодических решений по значениям собственных чисел матрицы монодромии (мультипликаторам) на основе теории Флоке.

4. Моделирование удара нелинейной контактной силой Герца во-первых, облегчает построения метода продолжения, во-вторых, позволяет найти закон движения тел виброударной системы на всей временной оси, включая период удара, в-третьих, дает возможность определить величины и закон изменения ударных контактных сил.

Литература

1. Babitsky, V. I. Theory of Vibro-Impact Systems and Applications [Electronic resource] / V. I. Babitsky // Foundations of Engineering Mechanics. — 1998. — Available at: \www/URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-540-69635-3.
2. Иванов, А. П. Динамика систем с механическими соударениями [Текст] / А. П. Иванов. — М.: Междунар. программа образования, 1997. — 336 с.
3. Ibrahim, R. A. Vibro-Impact Dynamics [Electronic resource] / R. A. Ibrahim // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics. — 2009. — Vol. 43. — Available at: \www/URL: http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-00275-5.
4. Шалашилин, В. И. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике [Текст] / В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов. — М.: Эдиториал УРСС, 1999. — 224 с.
5. Allgower, E. L. Introduction to Numerical Continuation Methods [Electronic resource] / E. L. Allgower, K. Georg. — Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003. — Available at: \www/URL: http://dx.doi.org/10.1137/ 1.9780898719154.
6. Гуляев В. И. Устойчивость периодических процессов в нелинейных механических системах [Текст] / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк, Е. С. Дехтярюк, П. П. Лизунов. — Львов: Вища школа, 1983. — 286 с.
7. Bazhenov, V. A. Comparison of Two Impact Simulation Methods Used for Nonlinear Vibroimpact Systems with Rigid and Soft Impacts [Text] / V. A. Bazhenov, O. S. Pogorelova, T. G. Postnikova // Journal of Nonlinear Dynamics. — 2013. — Vol. 2013. — P. 1–12. doi:10.1155/2013/485676.
8. Баженов, В. А. Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах [Текст] / В. А. Баженов, О. С. Погорелова, Т. Г. Постникова, С. Н. Гончаренко // Проблемы прочности. — 2009. — № 4. — С. 69–77. — Режим доступа: \www/URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/48406.
9. Goldsmith, W. Impact: The Theory and Physical Behavior of Colliding Solids [Text] / W. Goldsmith, J. T. Frasier // Journal of Applied Mechanics. — 1961. — Vol. 28, № 4. — P. 639. doi:10.1115/1.3641808.
10. Холодниок, М. Методы анализа нелинейных динамических моделей [Текст]: пер. с чешск. / М. Холодниок, А. Клич, М. Кубичек, М. Марек. — М.: Мир, 1991. — 368 с.
11. Kubíček, M. Algorithm 502: Dependence of Solution of Nonlinear Systems on a Parameter [C5] [Text] / M. Kubíček // ACM Transactions on Mathematical Software. — 1976. — Vol. 2, № 1. — P. 98–107. doi:10.1145/355666.355675.
12. Johnson, K. L. Contact Mechanics [Text] / K. L. Johnson. — Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1985. — 468 p.

ЗАСТОСУВАННЯ ПРОДОВЖЕННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ З ДВОМА СТУПНЯМИ ВІЛЬНОСТІ

Розглядається можливість застосування чисельного методу продовження за параметром до механічної системи з ударами, що повторюються. Викладаються теоретичні основи методу у поєднанні з методами стрільби та Ньютона-Рафсона. Методика адаптована для віброудара системи з двома ступнями вільності. Параметризація виконується за довжиною дуги кривої розв'язків. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії Герца.

Ключові слова: віброударна система, метод продовження за параметром, сила Герца, довжина дуги.

Погорелова Ольга Семеновна, *кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина,* ***e-mail: pogos13@ukr.net****.*

Постникова Татьяна Георгиевна, *кандидат технических наук, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский институт строительной механики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина,* ***e-mail: posttan@ukr.net****.*

Отрашевская Валентина Владимировна, *кандидат физико-математических наук, доцент, кафедра высшей математики, Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Украина,* ***e-mail: otrashevska_vv@ukr.net****.*

Погорелова Ольга Семенівна, *кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, Науково-дослідний інститут будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна.*

Постнікова Тетяна Георгіївна, *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, Науково-дослідний інститут будівельної механіки, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна.*

Отрашевська Валентина Володимирівна, *кандидат фізико-математичних наук, доцент, кафедра вищої математики, Київський національний університет будівництва і архітектури, Україна.*

Pogorelova Olga, *Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine,* ***e-mail: pogos13@ukr.net****.*

Postnikova Tatiana, *Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine,* ***e-mail: posttan@ukr.net****.*

Otrashevskaya Valentina, *Kyiv National University of Construction and Architecture, Ukraine,* ***e-mail: otrashevska_vv@ukr.net***